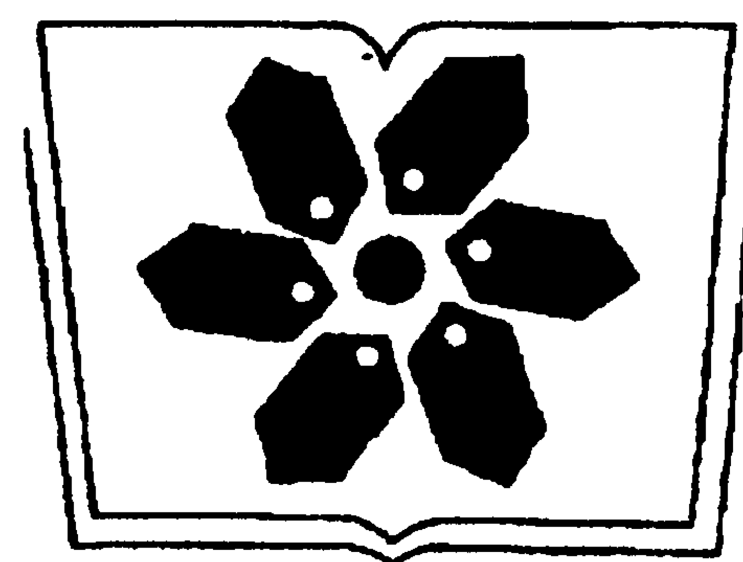


中国科学院科学出版基金资助出版

现代数学基础丛书　101

代数群引论

黎景辉　陈志杰　赵春来 著

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本书同时介绍两类代数群：线性代数群和Abèl概形．全书分为三篇．第一篇介绍定义在代数闭域上的线性代数群，主要讨论根系结构，并且讨论线性代数群的Galois上同调理论及算术性质．第二篇讨论群概形，分成两个部分．前两章是有限群概形，其余三章是讲Abel概形的基本理论．第三篇讨论代数环面的算术性质，并介绍互反律到代数环面上的一个推广．

本书可供大学数学系学生、研究生、教师及相关的研究人员参考．

图书在版编目(CIP)数据

代数群引论/黎景辉，陈志杰，赵春来著．—北京：科学出版社，2006.9

(现代数学基础丛书；101/杨乐主编)

ISBN 7-03-017861-0

I.代… II.①黎… ②陈… ③赵… III.代数群 IV.O187.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第096713号

责任编辑：吕 虹／责任校对：桂伟利

责任印制：安春生／封面设计：王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

天时彩色印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2006年9月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2006年9月第一次印刷 印张：29 1/2

印数：1—3 000 字数：559 000

定价：68.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20 世纪 70 年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了十余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高作出贡献．

杨　乐

2003 年 8 月

前　言

本书讲述代数群. 我们将同时介绍两类代数群：线性代数群和 Abel 概形.

考虑矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 其中 a, b, c, d 为满足条件 $ad - bc = 1$ 的复数. 由这样的矩阵所组成的集合记作 G. 按矩阵乘法, G 便是一个线性代数群.

取复数 g_2, g_3, 使得 $g_2^3 \neq 27g_3^2$. 以 $\mathbb{P}^2$ 记复数域上的射影平面, 以 x, y, z 记 $\mathbb{P}^2$ 上的齐次坐标. 在 $\mathbb{P}^2$ 内满足方程

$$zy^2 = 4x^3 - g_2xz^2 - g_3z^3$$

的点所组成的集合记为 E. 利用椭圆函数的加法性质可以在 E 上定义交换群结构, 并且这个群的运算可以用多项式来表达. 在这个意义下, E 是一个交换射影代数群. 我们常称 E 为椭圆曲线. 把椭圆曲线推广至相对高维数时便是本书所介绍的 Abel 概形.

科学知识的整理和传播是科教兴国的一个重要支柱, 编写教材是达到这个目的的有效手段. 本书的目的是帮助读者学习代数群论.

说起代数群论的历史, 就要从 Gauss 的 “算术教材”(“Disquisitiones Arithmeticae”, 1801) 开始. 它详论了二次型, 在此书的最后一部分讨论了带复乘的椭圆曲线. 至于矩阵群, 自从有了群和矩阵的概念, 就开始被研究了. 由二次型所决定的线性代数群便是正交群. 但是真正研究代数群, 则应该从 20 世纪 50 年代 Weil,.Dieudonné, 华罗庚, Chevalley, 段学复算起 (见文献 [51] 序言). 不久又进入 Grothendieck 时代, 加上代数数论不断提出新的要求, 代数群论就不停地向前发展. 由于代数群以代数几何为语言, 所以便从 Weil 的代数簇体系转移到 Grothendieck 的概形 – 态射体系.

在代数群方面我国一直具有优秀的工作, 也出版过一批很好的书. 关于典型群有 [8]; 对于实数域的情形有 [7], [16], [4], [20], [19]; 关于 Abel 簇的研究有 [238]. 另一方面, 华东师大在曹锡华领导下自 20 世纪 80 年代以来建立了非常成功的强有力的代数群与量子群的基地, 人才辈出 (可参见文献 [1], [78], [299], [337], [406], [404], [109], [405] 等). 这里不能详列, 读者可去 MathSciNet 查找.

全书分为三篇 ①. 在第一篇, 我们介绍定义在代数闭域上的线性代数群 G, 主要是讨论 G 的根系结构. 然后, 我们讨论线性代数群的 Galois 上同调理论及算术性质.

---

①因为本书三篇内容相对独立, 故各篇体例, 如章节、定义、定理、公式等序号自成体系.

第二篇讨论群概形, 分成两个部分. 前两章是有限群概形, 研究的方法和第一篇完全不同. 我们把群概形看作层, 如此便可用同调代数的方法. 为了明白 Abel 概形的挠点, 这部分是必要的.

第二篇其余三章是讲 Abel 概形的基本理论, 在域上的 Abel 概形的理论在 Mumford 的教科书中已有很好的介绍，但是不能避免在一般概形 S 上的 Abel 概形.

以上三种代数结构：线性代数群、Abel 概形和有限平坦群概形, 除了它们都是重要的代数群之外, 还有更重要的原因令我们需要同时了解它们. 比如要了解 Wiles 的费马大定理的证明或要了解来自典型群的志村簇 (Shimura variety) 是 Abel 概形的模空间时, 线性代数群与 Abel 概形是同时出现的, 也是无可避免的.

第三篇讨论代数环面的算术性质. 正如 Abel 簇是具有交换群结构的射影簇, 代数环面则是具有交换群结构的仿射簇. Tate 把代数数域的算术结果推广到代数环面上, 接着 Ono 计算了代数环面的玉河数 (Tamagawa number).

类域论是代数数论的重要部分之一, 而互反律 (reciprocity law) 则是类域论中的中心定理. 在数域上的互反律是首先由日本人高木贞治 (Takagi) 用解析方法证明的, 互反律的代数证明是由 Chevalley、中山正 (Nakayama)、Artin、Tate、Neukirch、Vostokov 发展起来的. 可以说经典的互反律是叙述交换扩张的结构, 而 Langlands 的著名猜想是把互反律推广到非交换扩张去. 这是一个尚未解决的课题. 我们将介绍互反律的一个比较简单的推广：即推广到代数环面上. 这是 Langlands 的工作.

我们假定读者有研究生的基础代数知识. 此外, 代数数域是一个最基本的代数群, 所以读者最好先学习一点初步的代数数论, 如 [3]. 在阅读第一篇之前, 我们假设读者学过代数簇的初等理论, 如 [27] 的第一章或 [14]. 要阅读本书的第二篇, 读者需要具备概形的基本知识, 如 [27] 的第二章或 [14], 并且需要了解概形与函子的关系, 这方面的一些预备知识可以参看 [11]. 在念第二篇后三章之前, 最好能先能学习一点椭圆曲线和 Abel 簇. 椭圆曲线的标准教科书是 [347]; Abel 簇的名家的作品是 [264]. 要了解第三篇, 读者需具备用上同调方法处理类域论的知识.

我们谈谈参考文献. 书末所列的参考文献当然并不完全, 读者在 MathSciNet 上可以查看到全面的文献. 像 [259] 的几何不变量论在 1965 年第一版的参考文献只有 41 篇, 到了 1994 年第 3 版就增加到了 926 篇!

1. 本书第一篇所讨论的线性代数群是指一个带有群结构的定义在域 k 上的仿射簇. 当 k 是代数封闭域时, 经典的资料是 20 世纪 50 年代在巴黎的 Chevalley Seminar[82] (这便是 [147] 中所引的 BIBLE) 和 Rosenlicht 及 Borel 的两篇文章 [313][46]. 接着是 Borel 与 Harish-Chandra 关于算术子群的文章 [52], Borel-Tits 关于抛物子群结构的文章 [54] 以及 Steinberg 关于 Chevalley 群的在 Yale 的讲

义 [358] 和 Steinberg 关于正则半单元的结构 [359]. 当基域是非阿域 (non-archimidian field) 时, 一方面有 Kneser[200], Harder[155][156] 及 Chernousov[79] 的工作, 另一方面有 Bruhat-Tits 非常有创见的工作 [67], 他们引入了 Affine Building 这个新概念, 并用此概念考察非阿域上的线性代数群的结构, 这是研究这些群的无限维表示和局部 Langlands 对应的重要工具.

近些年来人们考虑一些有特定性质的域上的线性代数群的结构, 例如研究所谓 R-Equivalence (Colliot-Thélène, Sansuc, Borovoi, Merkelev) 以及研究高维局部域上 Building 的结构 ([300]).

关于线性代数群的参考书有 [46], [169], [172], [354], [301], [70], [71], [387], [398] 和 [196]. 关于线性代数群的表示可看 [182], [1]. 比较近期的结果可看 Habush-Parshall[154] 编辑的会议记录.

2. 对于有限群概形最早的系统的研究当属 Grothendieck 的 [147] 以及 Dieudonné, Manin, Honda 三人的工作. 与志村簇有关的这方面的工作见 [207], [213].

3. 在第二篇第三、四、五章我们只是介绍了 Abel 概形的一些初浅的性质.

传统的 Abel 簇参考书是: [394], [225], [331]. 这几本书互不包含对方, 又不包括 [273]. 在 Weil 与 Néron 的基础上, 还有 [339]. 以上的工作都是用 [393] 的语言. 现行的 Abel 簇的教科书是 [264], 但这本书并不包含以上几本书的内容.

关于 Abel 概形可以看 [116], [371], [307], [120], [121], [63], [256], [94], [87], [288], [289], [275], [72], [407], [408], [189], [310], [93], 还有 D. Mumford 得 Fields 奖的工作 [259], G. Faltings 得 Fields 奖的文章 [111], 和 20 世纪末最著名的文章 [403].

可惜我们没有介绍形式群. 为此我们建议参看 [411], [412], [237], [241] 和 Manin 的博士论文 [245]. 关于 p-divisible 群可参看 [367], [119], [64], [306], [100], [250], [42].

4. 关于 Langlands 纲领最好是看他自己的说法: [229], [230]. 近人编了一本会议记录: [38], 可以看看. 近日著名的工作有 [162] 和 [104], 以及 Lafforgue 得 Fields 奖的工作 [217]. 至于几何 Langlands 理论可以看 Laumon, Gaitsgory, Kapranov 的文章.

代数群论是有很丰富的内容和广阔的发展空间的. 本书所介绍的只是一个起步点.

本书的第一篇是根据黎景辉在华东师范大学的讲义由陈志杰增写而成. 如果没有曹锡华教授的大力支持和有效的组织工作, 就不会有那场讲演. 在当时艰难的环境下, 邱森、刘昌堃、王建磐、时俭益、叶家琛、陈承东、费青云、潘介正、肖麟等共同整理并印刷了那本讲义, 也是一次难得的协作. 借此机会我们向

他们表示衷心的感谢. 本书的第二篇是黎景辉在北京大学的讲稿, 由赵春来编辑. 至于第三篇则是黎景辉在香港中文大学的讲义. 陈志杰承担了全书的整体编辑工作. 作者之一的黎景辉特向另两位合作者表示感谢, 没有他们的合作, 这本书是不可能完成的.

丁石孙教授、冯克勤教授对本书给予了热忱的支持. 中国科学院科学出版基金的支持对本书得以出版起着关键性的作用. 这也和科学出版社吕虹编审的支持密切相关. 此外, 北京大学数学学院、华东师范大学数学系都在本书的撰写过程中给予很大的支持和帮助, 我们在此一起深表谢意.

目　　录

第一篇　线性代数群

第二篇　群概形

第三篇　环面的算术

第一篇　线性代数群

本篇的目的是介绍线性代数群. 线性代数群是矩阵群的推广. 我们主要是讲线性代数群的根系结构和线性代数群的主要例子：典型群.

在大自然中各种周期现象, 如潮水涨退、心脉跳动, 我们是用单周期函数如 $\sin 2\pi x$ 来建造模型进行研究、理解以至制造机器. 函数 $\sin 2\pi x$ 的周期是整数群 $\mathbb{Z}$, 这是个交换群. 只要我们所考虑的现象的周期群是非交换的, 矩阵群便立刻出现了! 在化学的晶体结构研究中, 出现了正交群, 在量子力学中有酉群, 在广义相对论中有对称空间. 本篇所讲的线性代数群是我们把所有这些典型的矩阵群直接推广, 以求找得一种代数结构, 同时包括所有的典型群. 这样, 一方面可以加深了解其共通性, 另一方面可以同时研究所有的典型群以求简化研究和应用的过程. 我们所得的代数结构便是线性代数群. 线性代数群和李代数有非常密切的关系. 正如李代数一样, 我们可以用根系来对线性代数群作分类. 这就是本篇的主要内容.

本篇还介绍了一个新的结构：概齐次向量空间, 又讲了 Galois 上同调与典型群. 在本篇最后一节, 我们讨论了几个与算术子群有关的课题：玉河数 (Tamagawa number), 志村簇 (Shimura variety), Hilbert 第 12 个问题和 Langlands 纲领, 希望对读者阅读文献有些帮助.

第一章　基本概念

1.1　代数群与李代数

1.1.1　线性代数群

这里总是设 k 是特征数为零的代数闭域, 而且考虑到线性代数群的特点. 为叙述方便, 我们不要求代数簇是不可约的. 除特别指出外, 假设所有的代数簇 X 都是定义在 k 上的.

定义 1.1.1　*若*

(1) G *是抽象群*,

(2) G *是仿射代数簇*,

(3) G *的乘法运算*:

$$\begin{aligned} \mu : G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto xy \end{aligned}$$

以及求逆运算:

$$\begin{aligned} \iota : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto x^{-1} \end{aligned}$$

*都是代数簇的态射, 则称 G 是***仿射代数群** *(affine algebraic group) 或***线性代数群** *(linear algebraic group).*

例 1.1.1　最简单的例子是域 k 的加法群, 这时的乘法运算与求逆运算分别是

$$\mu(x, y) = x + y, \qquad \iota(x) = -x.$$

这个代数群通常记为 $\mathbb{G}_\mathrm{a}$.

例 1.1.2　另一个简单的例子是域 k 的乘法群 $k^* = k \setminus \{0\}$, 这时的乘法运算与求逆运算分别是

$$\mu(x, y) = xy, \qquad \iota(x) = x^{-1}.$$

这个代数群通常记为 $\mathbb{G}_\mathrm{m}$.

比较复杂的例子是:

例 1.1.3 一般线性群

$$G = \mathrm{GL}(n,k) = \{(x_{ij}) \mid \det(x_{ij}) \neq 0, x_{ij} \in k\}$$

是代数群. G 满足定义的 (1) 和 (3) 是显然的. 而根据代数几何, G 是 n^2 维仿射空间 $\mathbf{A}_k^{n^2}$ 里使多项式 $\det(x_{ij})$ 不等于零的点构成的主开集, 因此是一个不可约仿射代数簇, 它的仿射坐标环同构于局部环 $k[T_{11}, T_{12}, \cdots, T_{nn}]_{\det(T_{ij})}$.

定义 1.1.2 设 G 与 G' 是代数群, 若映射 $\varphi : G \to G'$ 满足

(1) φ 是抽象群同态,

(2) φ 是簇的态射,

则称 φ 是**代数群同态**. 若 φ 又是抽象群同构, 则称 φ 为**代数群同构**.

定义 1.1.3 设 H 是代数群 G 的子群, 若 H 又是代数簇 G 的闭子簇, 则 H 也是一个代数群, 称 H 是 G 的**闭子群**.

以下的定理说明例 1.1.3 是有代表性的.

定理 1.1.1 任意代数群必同构于某一个 $\mathrm{GL}(n,k)$ 的闭子群.

证明参见 [169] p.63, 定理 8.6.

如果 G 是一个代数群, 可以证明 G 只有一个极大不可约子集包含单位元, 把这个不可约子集记为 G^0, 并称之为 G 的**单位元分支** (identity component). 易证 G^0 是 G 的一个正规子群, 而且

$$[G : G^0] < \infty$$

(参见 [169] p.53, 命题 7.3). 若 $G = G^0$, 则称 G 为**连通的** (connected). 进一步, 若 H 为 G 的闭子群及 $[G : H] < \infty$, 则 $H \supset G^0$. 事实上, 若设 $G = \bigcup_{i=1}^m g_i H$ (其中 $g_1 = e$), 则 $g_i H$ 为闭集 (因为 $\lambda_{g_i} : G \to G : x \mapsto g_i x$ 为自同构), 故 $\bigcup_{i=2}^m g_i H$ 为闭集, 即 $H = G \setminus \bigcup_{i=2}^m g_i H$ 为开集, 所以 $g_i H$ 也是开集. 于是有

$$G^0 = \bigcup_{i=1}^m (G^0 \cap g_i H),$$

$$(G^0 \cap g_i H) \cap (G^0 \cap g_j H) = \emptyset, \qquad 对 i \neq j.$$

由 G^0 的连通性以及 $e \in G^0 \cap g_1 H \neq \emptyset$, 可以得到 $G^0 \subset H$.

单看代数群的定义实在很难想象它们究竟是什么东西, 所以就有分类的必要. 第一个分类的定理就是以下的定理 (参见 [169] p.131, 定理 20.5).

定理 1.1.2 任何一个一维连通代数群必与 $\mathbb{G}_a$ 或 $\mathbb{G}_m$ 同构.

从定义出发易证:

命题 1.1.3 (1) $\mathrm{Aut}(\mathbb{G}_\mathrm{a}) \cong \mathbb{G}_\mathrm{m}$,
(2) $\mathrm{Aut}(\mathbb{G}_\mathrm{m}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

证明 只证 (2). 首先,

$$k[\mathbb{G}_\mathrm{m}] = k[T_1, T_2]/(T_1T_2 - 1).$$

设 $\varphi : \mathbb{G}_\mathrm{m} \to \mathbb{G}_\mathrm{m} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G}_\mathrm{m})$, 则 $\varphi^* : k[\mathbb{G}_\mathrm{m}] \to k[\mathbb{G}_\mathrm{m}]$. 于是

$$\varphi^*(T) = f(T, T^{-1}) = a_kT^k + \cdots + a_0 + a_{-1}T^{-1} + \cdots + a_{-l}T^{-l},$$

其中 $T = T_1$, $T^{-1} = T_2$. 由于 φ 为同态, 对于 $t \in \mathbb{G}_\mathrm{m}$, 有 $\varphi(t^{-1}) = \varphi(t)^{-1}$. 设求逆运算为 $\iota : \mathbb{G}_\mathrm{m} \to \mathbb{G}_\mathrm{m} : t \mapsto t^{-1}$, 则 $\varphi^*\iota^* = \iota^*\varphi^*$. 于是

$$f(T, T^{-1})^{-1} = \varphi^*(T^{-1}) = \varphi^*\iota^*(T) = \iota^*\varphi^*(T) = \iota^*(f(T, T^{-1})) = f(T^{-1}, T).$$

比较 $f(T, T^{-1})^{-1}$ 及 $f(T^{-1}, T)$ 的系数, 可知存在整数 m 使得 $f(T, T^{-1}) = T^m$, 从而对于 $t \in \mathbb{G}_\mathrm{m}$, 有 $\varphi(t) = t^m$. 而要使 $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G}_\mathrm{m})$, 必须 $\varphi^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G}_\mathrm{m})$. 令 $\varphi^{-1}(t) = t^n$, 由 $\varphi\varphi^{-1} = 1$ 得 $\forall t \in k^*$, $t^{mn} = t$, 于是 $mn = 1$, $m = \pm 1$, 即

$$\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G}_\mathrm{m}) \iff \varphi(t) = t^{\pm 1}.$$

所以 $\mathrm{Aut}(\mathbb{G}_\mathrm{m}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. □

1.1.2 仿射代数簇的切向量空间

这里要复习仿射代数簇的切向量空间的定义. 设仿射代数簇 $X \subseteq \mathbf{A}^n$ 包含仿射空间的零点 0, 并设 X 的定义理想是

$$I(X) = \langle f_1, f_2, \cdots, f_m \rangle,$$

即是由 $f_1, f_2, \cdots, f_m \in k[T_1, T_2, \cdots, T_n]$ 生成的理想. 那么仿射代数簇 $X \subseteq \mathbf{A}^n$ 在 0 点处的切向量空间定义为

$$\mathscr{T}(X)_0 = \left\{ a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in k^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial T_i}(0)a_i = 0, 1 \leqslant j \leqslant m \right\}.$$

这样定义的切向量空间在具体计算时还有不便之处, 为此我们下面给出一个等价定义:

定义 1.1.4 称映射 $\delta : k[X] \to k$ 为 $k[X]$ 在点 $x \in X$ 处的 k **导子** (derivation), 若它满足以下条件:

(1) δ 是 k 线性的,

(2) $\delta(fg) = (\delta f)g(x) + f(x)(\delta g)$,

(3) 对所有的 $\alpha \in k$, $\delta(\alpha) = 0$,

并记 $\mathscr{D}(X)_x$ 为 $k[X]$ 的在 x 处所有 k 导子的集合.

根据导子的性质, 对于在点 $x \in X$ 处的 k 导子 δ, 很容易计算

$$\delta(f) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial T_i}(x)\delta(T_i).$$

命题 1.1.4 存在线性空间的同构:

$$\Phi : \mathscr{T}(X)_0 \longrightarrow \mathscr{D}(X)_0.$$

证明 对于 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathscr{T}(X)_0$, 令 $\delta_a(T_i) = a_i$, 这里 T_i 为坐标函数. 对任意的 $g \in k[T_1, T_2, \cdots, T_n]$, 可定义

$$\delta_a(g) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial T_i}(0)a_i \in k.$$

于是 $\delta_a : k[T_1, T_2, \cdots, T_n] \to k$ 是在 0 点的 k 导子. 由于 a 满足方程组

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial T_i}(0)a_i = 0, \qquad 1 \leqslant j \leqslant m,$$

易见对于任意的 $f \in I(X)$ 都有 $\delta_a f = 0$. 这样, δ_a 可诱导得映射 $\overline{\delta_a} : k[X] = k[T_1, T_2, \cdots, T_n]/I(X) \to k$, 不难验证, $\overline{\delta_a} \in \mathscr{D}(X)_0$. 从而可定义线性映射:

$$\begin{aligned}\Phi : \mathscr{T}(X)_0 &\longrightarrow \mathscr{D}(X)_0\\ a &\longmapsto \overline{\delta_a}.\end{aligned}$$

反之, 对 $\delta \in \mathscr{D}(X)_0$, 令 $a = (\delta(T_1), \cdots, \delta(T_n)) \in k^n$. 由于 δ 是 $k[X] = k[T_1, T_2, \cdots, T_n]/I(X) \to k$ 的映射, 因此对任意的 $f \in I(X)$, 有 $\delta f = 0$. 特别, 对定义 X 的 $f_1, f_2, \cdots, f_m$ 有

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial T_i}(0)\delta(T_i) = 0, \qquad 1 \leqslant j \leqslant m,$$

从而

$$a = (\delta(T_1), \cdots, \delta(T_n)) \in \mathscr{T}(X)_0.$$

显然线性映射

$$\Psi : \mathscr{D}(X)_0 \longrightarrow \mathscr{T}(X)_0$$
$$\delta \longmapsto a = (\delta(T_1), \cdots, \delta(T_n))$$

是 Φ 的逆映射, 命题得证. □

1.1.3 代数群的李代数

先复习一下李代数的定义:

定义 1.1.5 若 $\mathfrak{L}$ 是 k 线性空间, $\mathfrak{L}$ 有一个双线性映射 $[\ ,\ ] : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ 满足下列条件:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0,$$

$$[X, Y] + [Y, X] = 0,$$

其中 $X, Y, Z \in \mathfrak{L}$, 则称 $\mathfrak{L}$ 是一个 k **李代数**. 运算 $[\ ,\ ]$ 称为李乘积.

关于李代数可以参看 [18], [22], [29] 及 [28]. 如果我们对其他域 k 上的李代数有兴趣, 比如 k 的特征是 $p > 0$ 时, 可参看 [322]. 如果假设李代数 $\mathfrak{L}$ 是无限维时, 我们便要研究 Kac-Moody 代数, 可参看 [184] 及 [390]. 量子群是另外一个从无限维李代数演变出来的理论, 可以看 [299], [243], [183], [199] 及 [77]. 此外量子群在量子计算机的应用可见 [198] 及 [110]. 关于例外李代数的结构可以参看 [180], [181] 及 [61].

例 1.1.4 设 $\mathfrak{L} = \mathfrak{gl}(n, k) = M_n(k)$ 是所有系数在 k 里的 $n \times n$ 方阵全体. 对于 $X, Y \in M_n(k)$, 定义

$$[X, Y] = XY - YX.$$

正如熟知的, 关于该李乘积, $\mathfrak{L}$ 构成 k 李代数.

定义 1.1.6 设映射 $\delta : k[G] \to k[G]$ 具有以下性质:

(1) δ 是 k 线性的,

(2) $\delta(fg) = (\delta f)g + f(\delta g)$,

(3) $\delta(a) = 0$ 对所有的 $a \in k$,

则称 δ 是 $k[G]$ 的 k **导子**.

请注意这里定义的 k 导子与一点 $x \in G$ 处的 k 导子 (定义 1.1.4) 的区别.

定义 1.1.7 对于 $g \in G$ 以及 $f \in k[G]$, 定义 $\lambda_g f \in k[G]$ 为: $\lambda_g f(x) = f(g^{-1}x)$, 对任意的 $x \in G$. 则称映射

$$\begin{aligned} \lambda_g : k[G] &\longrightarrow k[G] \\ f &\longmapsto \lambda_g f \end{aligned}$$

为**左平移**.

类似地, 对于 $g \in G$ 以及 $f \in k[G]$, 可以定义**右平移** $\rho_g : k[G] \to k[G]$ 为 $\rho_g f(y) = f(yg)$, 对任意的 $x \in G$.

定义 1.1.8 设 δ 是一个 k 导子, 如果对于任意的 $g \in G$ 有

$$\lambda_g \delta = \delta \lambda_g,$$

则称 δ 是**左不变** k **导子**. 把所有左不变 k 导子的集合记为 $\mathfrak{L}(G)$, 易见 $\mathfrak{L}(G)$ 是一个 k 线性空间, 而且可以用下述方式定义一个方括号 $[\ ,\ ]$ 运算:

$$[\delta_1, \delta_2] = \delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1, \qquad \text{对所有的 } \delta_1, \delta_2 \in \mathfrak{L}(G).$$

易证 $[\delta_1, \delta_2]$ 仍是左不变 k 导子, 即 $[\delta_1, \delta_2] \in \mathfrak{L}(G)$. 可以验证 $\mathfrak{L}(G)$ 关于上面定义的方括号运算构成一个 k 李代数, 称为**群** G **的** k **李代数**.

G 的李代数 $\mathfrak{L}(G)$ 与单位元 e 处的切空间 $\mathscr{T}(G)_e \cong \mathscr{D}(G)_e$ 有着极密切的关系.

命题 1.1.5 若记 $\mathfrak{g} = \mathscr{D}(G)_e$, 则存在线性空间的同构:

$$\mathfrak{L}(G) \cong \mathfrak{g}.$$

证明 定义映射

$$\begin{aligned} \theta : \mathfrak{L}(G) &\longrightarrow \mathfrak{g} = \mathscr{D}(G)_e \\ \delta &\longmapsto \theta\delta, \end{aligned}$$

这里对任意的 $f \in k[G]$, 定义 $\theta\delta(f) = \delta f(e)$. 这样定义的 $\theta\delta$ 显然是 e 点的导子, 属于 $\mathscr{D}(G)_e$.

反之, 定义

$$\begin{aligned} \eta : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{L}(G) \\ X &\longmapsto \eta(X) \overset{\text{记为}}{=\!=} *X, \end{aligned}$$

其含义是: 对任意的 $f \in k[G]$,

$$*X(f)(g) = X(\lambda_{g^{-1}} f), \qquad \forall g \in G.$$

下面验证 $*X \in \mathfrak{L}(G)$.

(i) 验证 $*X$ 是 k 导子：对任意的 $x\in G$ 以及 $f,g\in k[G]$, 有

$$\begin{aligned} *X(fg)(x) &= X(\lambda_{x^{-1}}(fg)) \\ &= X((\lambda_{x^{-1}}f)(\lambda_{x^{-1}}g)) \\ &= X(\lambda_{x^{-1}}f)\lambda_{x^{-1}}g(e)+\lambda_{x^{-1}}f(e)X(\lambda_{x^{-1}}g) \\ &= *X(f)(x)g(xe)+f(xe)*X(g)(x) \\ &= (*X(f)g+f*X(g))(x). \end{aligned}$$

因此

$$*X(fg) = *X(f)g+f*X(g).$$

(ii) 验证 $*X$ 是左不变的：对任意的 $x,y\in G$ 以及 $f\in k[G]$, 有

$$\begin{aligned} \lambda_y(*X(f))(x) &= (*X(f))(y^{-1}x) = X(\lambda_{x^{-1}y}f) \\ &= X(\lambda_{x^{-1}}(\lambda_y f)) = *X(\lambda_y f)(x), \end{aligned}$$

即

$$\lambda_y(*X) = (*X)\lambda_y.$$

最后是验证 $\theta\eta=\eta\theta$, 这是很容易计算的. □

利用 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{L}(G)$ 的同构, 可将 $\mathfrak{L}(G)$ 里的李乘法 [,] 转移到 $\mathfrak{g}$ 里去, 即定义

$$[X,Y] = \theta([*X,*Y]),$$

这样 $\mathfrak{g}$ 也成了 k 上李代数.

设 $\varphi: G\to G'$ 是代数群的同态, 那么 φ 作为代数簇的态射会诱导单位元切空间的微分 $\mathrm{d}\varphi:\mathfrak{g}=\mathscr{D}(G)_e\to\mathfrak{g}'=\mathscr{D}(G')_{e'}$. (注意 $\varphi(e)=e'$.) 如图：

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & G' \\ & {\scriptstyle f\circ\varphi}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle f} & \\ & k & \end{array}$$

这个线性映射可如下定义：对 $\delta\in\mathfrak{g}$, $f\in k[G']$, 令

$$\mathrm{d}\varphi(\delta)(f) = \delta(f\circ\varphi),$$

则 $\mathrm{d}\varphi(\delta)\in\mathfrak{g}'$.

我们有以下交换图:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\mathrm{d}\varphi} & \mathfrak{g}' \\ \theta\uparrow & & \downarrow\eta' \\ \mathfrak{L}(G) & \xrightarrow{\overline{\mathrm{d}\varphi}} & \mathfrak{L}(G') \end{array}$$

其中 $\overline{\mathrm{d}\varphi} = \eta' \circ \mathrm{d}\varphi \circ \theta$ 是由 $\mathrm{d}\varphi$ 诱导的线性映射.

命题 1.1.6 $\mathrm{d}\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ 是李代数同态.

命题的结论相当于 (1.1) 图可交换:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} & \xrightarrow{[\,,\,]} & \mathfrak{g} \\ \mathrm{d}\varphi\times\mathrm{d}\varphi\downarrow & & \downarrow\mathrm{d}\varphi \\ \mathfrak{g}'\times\mathfrak{g}' & \xrightarrow{[\,,\,]} & \mathfrak{g}' \end{array} \tag{1.1}$$

我们将证明 (1.2) 图可交换:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{L}(G)\times\mathfrak{L}(G) & \xrightarrow{[\,,\,]} & \mathfrak{L}(G) \\ \overline{\mathrm{d}\varphi}\times\overline{\mathrm{d}\varphi}\downarrow & & \downarrow\overline{\mathrm{d}\varphi} \\ \mathfrak{L}(G')\times\mathfrak{L}(G') & \xrightarrow{[\,,\,]} & \mathfrak{L}(G') \end{array} \tag{1.2}$$

从而通过 θ 映射即可得到关于 $\mathfrak{g}$ 的相应结果. 为此, 我们先证明如下引理.

引理 1.1.7 对 $h' \in k[G']$, $X \in \mathfrak{g}$, 设 $X' = \mathrm{d}\varphi(X)$, 则

$$*X(h' \circ \varphi) = *X'(h') \circ \varphi.$$

证明 先看右边, 对于任意的 $g \in G$, 有

$$\begin{aligned} (*X'(h') \circ \varphi)(g) &= *X'(h')(\varphi(g)) = X'(\lambda_{\varphi(g)^{-1}} h') \\ &= X((\lambda_{\varphi(g)^{-1}} h') \circ \varphi). \end{aligned} \tag{1.3}$$

最后一步是因为对于 $\delta \in \mathfrak{L}(G)$, 有

$$\mathrm{d}\varphi\delta(f) = \delta(f \circ \varphi), \qquad \forall f \in k[G],$$

而对任意的 $x \in G$,

$$(\lambda_{\varphi(g)^{-1}}h') \circ \varphi(x) = h'(\varphi(g)\varphi(x)) = h'(\varphi(gx))$$
$$= \lambda_{g^{-1}}(h' \circ \varphi)(x).$$

所以

$$(\lambda_{\varphi(g)^{-1}}h') \circ \varphi = \lambda_{g^{-1}}(h' \circ \varphi). \tag{1.4}$$

利用此结果,

$$(1.3)\text{ 式} = X(\lambda_{g^{-1}}(h' \circ \varphi)) = *X(h' \circ \varphi)(g), \qquad \forall g \in G.$$

这就证明了

$$*X'(h') \circ \varphi = *X(h' \circ \varphi).$$ □

现在我们着手证明命题 1.1.6.

证明 首先证明

$$*X'(*Y'(f')) = *X(*Y(f' \circ \varphi)),$$

其中 $X, Y \in \mathfrak{g}$, $X' = \mathrm{d}\varphi(X)$, $Y' = \mathrm{d}\varphi(Y)$, $f' \in k[G']$, $f = \varphi^* f' = f' \circ \varphi \in k[G]$.

事实上只要对 Y', f' 应用引理 1.1.7, 即可算得

$$*X'(*Y'(f')) = *X(*Y'(f') \circ \varphi) = *X(*Y(f' \circ \varphi)).$$

现在证明 (1.2) 图是交换图. 由于

$$\mathfrak{L}(G') = \{\delta : k[G'] \longrightarrow k[G']\},$$

我们需证

$$[*X', *Y']f' = \overline{\mathrm{d}\varphi}[*X, *Y]f', \qquad \forall f' \in k[G'],$$

而

$$\text{左边} = (*X'*Y' - *Y'*X')f' = *X*Y(f' \circ \varphi) - *Y*X(f' \circ \varphi)$$
$$= (*X*Y - *Y*X)(f' \circ \varphi),$$
$$\text{右边} = \overline{\mathrm{d}\varphi}(*X*Y - *Y*X)f' = (*X*Y - *Y*X)(f' \circ \varphi),$$

所以, 左边 = 右边, 命题得证. □

以后我们不再区分 $\mathrm{d}\varphi$ 与 $\overline{\mathrm{d}\varphi}$, 一概记为 $\mathrm{d}\varphi$.

$\mathrm{d}\varphi$ 的一个重要例子是：对 $g \in G$,

$$\begin{aligned} \operatorname{Int} g : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto gxg^{-1}, \end{aligned}$$

这是群 G 的自同构. 把 $\mathrm{d}(\operatorname{Int})g$ 记为 $\operatorname{Ad} g$, 不难证明

$$\begin{aligned} \operatorname{Ad} : G &\longrightarrow \operatorname{Aut}(\mathfrak{L}(G)) \\ g &\longmapsto \operatorname{Ad} g \end{aligned}$$

是群同态, 也是群 G 在线性空间 $\mathfrak{L}(G)$ 上的表示. 称 Ad 为 G 的**伴随表示** (adjoint representation). 下面我们计算 $\operatorname{Ad} x$ 在李代数 $\mathfrak{g}$ 上的作用.

定理 1.1.8 对任意的 $\delta \in \mathfrak{L}(G)$, 有

$$\operatorname{Ad} x(\delta) = \rho_x \delta \rho_x^{-1}.$$

证明 如图:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\operatorname{Ad} x} & \mathfrak{g} \\ \theta \uparrow \downarrow \eta & & \theta \uparrow \downarrow \eta \\ \mathfrak{L}(G) & \xrightarrow{\operatorname{Ad} x} & \mathfrak{L}(G) \\ \delta & \longmapsto & \operatorname{Ad} x(\delta) = \delta'. \end{array}$$

对于右平移 $\rho_x : k[G] \to k[G]$, 我们计算 $\theta(\delta' \rho_x)$.

对任何 $f \in k[G]$,

$$\theta(\delta' \rho_x) f = (\delta' \rho_x f)(e), \tag{1.5}$$

由定义,

$$\delta'(\rho_x f) = (\operatorname{Ad} x(\delta))(\rho_x f) = \delta(\rho_x f \circ \operatorname{Int} x), \tag{1.6}$$

而对任意的 $y \in G$,

$$\begin{aligned} \rho_x f \circ \operatorname{Int} x(y) &= \rho_x f(xyx^{-1}) = f(xyx^{-1}x) \\ &= f(xy) = \lambda_{x^{-1}} f(y), \end{aligned}$$

所以

$$\rho_x f \circ \operatorname{Int} x = \lambda_{x^{-1}} f. \tag{1.7}$$

这样将 (1.7) 式代入 (1.6) 式有 (注意到 δ 左不变)

$$\delta'(\rho_x f) = \delta(\lambda_{x^{-1}} f) = \lambda_{x^{-1}}\delta(f).$$

对任意的 $f \in k[G]$, (1.5) 式就成为

$$\begin{aligned}\theta(\delta'\rho_x)f &= \lambda_{x^{-1}}\delta f(e) = \delta f(x)\\ &= \rho_x(\delta f)(e) = (\rho_x\delta)f(e) = \theta(\rho_x\delta)f,\end{aligned}$$

即得

$$\theta(\delta'\rho_x) = \theta(\rho_x\delta).$$

由于 θ 是同构, 故 $\delta'\rho_x = \rho_x\delta$, 得到

$$\delta' = \rho_x\delta\rho_x^{-1}, \qquad \forall\delta \in \mathfrak{L}(G).$$ □

例 1.1.5　$\mathrm{GL}(n,k)$ 的李代数是 $\mathfrak{gl}(n,k)$.

设 $G = \mathrm{GL}(n,k)$, G 的李代数可以从 3 种不同角度认识:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathfrak{L}(G) & \leftrightarrow & \mathscr{D}(G)_e & \leftrightarrow & \mathscr{T}(G)_e = \mathfrak{gl}(n,k)\\
*X & \leftrightarrow & X & \leftrightarrow & (X(T_{ij})) = \text{矩阵}(x_{ij})\\
*Xf(g) = X(\lambda_{g^{-1}}f) & & X = \sum \frac{\partial}{\partial T_{ij}}(e)x_{ij} & & x_{ij} = X(T_{ij})\\
\forall f \in k[G], g \in G & & \text{即 } X(f) = \sum_{i,j}\frac{\partial f}{\partial T_{ij}}(e)x_{ij} & & \\
 & & \forall f \in k[G] & &
\end{array}$$

设

$$\mu : \mathrm{GL}(n,k) \times \mathrm{GL}(n,k) \longrightarrow \mathrm{GL}(n,k)$$

是群的乘法, 记 $G = \mathrm{GL}(n,k)$, 则可得到环同态:

$$\begin{aligned}\mu^* : k[G] &\longrightarrow k[G \times G] = k[G] \otimes_k k[G]\\ f &\longmapsto \mu^* f = \textstyle\sum_i f_i \otimes g_i,\ \ f_i, g_i \in k[G],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\mu : \mathscr{T}(G \times G)_{(e,e)} = \mathscr{T}(G)_e \otimes \mathscr{T}(G)_e &\longrightarrow \mathscr{T}(G)_e = \mathfrak{gl}(n,k)\\ X \otimes Y &\longmapsto \mathrm{d}\mu(X \otimes Y) = X \cdot Y,\end{aligned}$$

这里

$$X \otimes Y(f \otimes g) = (Xf)(Xg), \qquad \forall f, g \in k[G]$$

及由定义

$$X \cdot Y = \mathrm{d}\mu(X \otimes Y) = (X \otimes Y) \circ \mu^*.$$

下面我们来证明 $X \cdot Y$ 就是 $\mathfrak{gl}(n,k)$ 中的矩阵乘法.

命题 1.1.9 对 $G=\mathrm{GL}(n,k)$, 我们有以下的双射:

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{L}(G) & \overset{\theta}{\longleftrightarrow} & \mathscr{D}(G)_e & \longleftrightarrow & \mathscr{T}(G)_e = \mathfrak{gl}(n,k) \\ *X*Y & \longleftrightarrow & X\cdot Y & \longleftrightarrow & XY\ (\text{矩阵相乘}). \end{array}$$

在 $\mathfrak{gl}(n,k)$ 中的李乘法就是

$$[X,Y]=XY-YX,$$

其中 X,Y 是矩阵相乘.

证明 先证左边的一一对应关系, 这相当于证明如下 3 点:

(i) $*Xf=\sum_i f_iX(g_i)$, 其中 $\mu^*f=\sum_i f_i\otimes g_i$,

(ii) $(*X)(*Y(f))(e)=\sum_i X(f_i)Y(g_i)$,

(iii) $\theta(*X*Y)(f)=X\cdot Y(f),\quad \forall f\in k[G]$.

事实上,

(i) 对任意的 $y\in G$, $*Xf(y)=X(\lambda_{y^{-1}}f)$, 而对任意的 $x\in G$,

$$\begin{aligned}\lambda_{y^{-1}}f(x)&=f(yx)=f(\mu(y,x))\\&=\mu^*f(y,x)=\sum_i f_i(y)g_i(x),\end{aligned}$$

所以

$$\lambda_{y^{-1}}f=\sum_i f_i(y)g_i,\qquad \text{其中 } f_i(y)\in k.$$

对所有的 $y\in G$ 有

$$*Xf(y)=X\left(\sum_i f_i(y)g_i\right)=\sum_i f_i(y)X(g_i),$$

故

$$*Xf=\sum_i f_iX(g_i).$$

(ii) 由 (i),

$$\begin{aligned}*X(*Y(f))(e)&=X(\lambda_{e^{-1}}(*Y(f))=X\left(\sum_i f_iY(g_i)\right)\\&=\sum_i X(f_i)Y(g_i).\end{aligned}$$

(iii) $X \cdot Y(f) = \mathrm{d}\mu(X \otimes Y)(f)$

$$= (X \otimes Y) \circ \mu^*(f) = (X \otimes Y)\left(\sum_i f_i \otimes g_i\right)$$
$$= *X(*Y(f))(e) = \theta(*X*Y)(f).$$

特别, 对 $X, Y \in \mathscr{T}(G)_e = \mathscr{D}(G)_e$, 有

$$X \cdot Y(T_{ij}) = (X \otimes Y) \circ \mu^*(T_{ij}) = (X \otimes Y)\left(\sum_h T_{ih} \otimes T_{hj}\right)$$
$$= \sum_h X(T_{ih})Y(T_{hj}) = \sum_h x_{ih}y_{hj},$$

即矩阵 $(X \cdot Y(T_{ij}))$ 就是矩阵 $(X(T_{ij})) = (x_{ij})$ 与矩阵 $(Y(T_{ij})) = (y_{ij})$ 相乘而得.

左边的一一对应证明后, 右边的一一对应也不难证明. 这是因为 $\mathfrak{gl}(n, k)$ 中的李乘法 $[X, Y] = XY - YX$ 与 $\mathfrak{L}(G)$ 中的李乘法 $[*X, *Y] = *X*Y - *Y*X$ 相对应, 利用已证明的对应即能推出 $X \cdot Y$ 及 $Y \cdot X$ 就是通常的矩阵相乘. □

命题 1.1.10　当 $G = \mathrm{GL}(n, k)$ 时,

$$\mathrm{Ad}\, x(X) = xXx^{-1} \qquad (\text{矩阵乘法}),$$

其中 $X = (X_{ab}) \in \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, k)$, $x \in G$.

证明　根据双射对应关系:

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n,k) & \longleftrightarrow & \mathscr{D}(G)_e & \longleftrightarrow & \mathfrak{L}(G) \\ X = (X_{ab}) & \longleftrightarrow & X = \sum X_{ab} \frac{\partial}{\partial T_{ab}}(e) & \longleftrightarrow & *X, \end{array}$$

我们知道 $X_{ab} = X(T_{ab})$, 其中 T_{ab} 是坐标函数:

$$T_{ab} : M_n(k) \longrightarrow k$$
$$A = (a_{st}) \longmapsto T_{ab}(A) = a_{ab}.$$

要算 $\mathrm{Ad}\, x(X) \in \mathfrak{g}$, 只要算出 $\mathrm{Ad}\, x(X)(T_{ij})$. 由下图:

$$\begin{array}{ccc} X \in \mathfrak{g} & \xrightarrow{\mathrm{Ad}\, x} & \mathfrak{g} \ni \mathrm{Ad}\, x(X) \\ \downarrow\uparrow & & \downarrow\uparrow \theta \\ *X \in \mathfrak{L}(G) & \xrightarrow{\mathrm{Ad}\, x} & \mathfrak{L}(G) \ni \mathrm{Ad}\, x(*X) \end{array}$$

先对 $*X \in \mathfrak{L}(G)$ 计算 $\mathrm{Ad}\,x(*X)(T_{ij})$, 因为上图是交换图, 所以 $\mathrm{Ad}\,x(X) = \theta(\mathrm{Ad}\,x(*X))$. 由定理 1.1.8,

$$\mathrm{Ad}\,x(*X) = \rho_x(*X)\rho_x^{-1},$$

现在对任意的 $y \in \mathrm{GL}(n,k)$,

$$(*X)\rho_x^{-1}(T_{ij})(y) = X(\lambda_{y^{-1}}\rho_x^{-1}T_{ij}), \tag{1.8}$$

而对任意的 $z \in \mathrm{GL}(n,k)$,

$$\lambda_{y^{-1}}\rho_x^{-1}T_{ij}(z) = T_{ij}(yzx^{-1}).$$

设 $f(z) = T_{ij}(yzx^{-1})$, $\forall z \in G$, 则

$$\begin{aligned}(1.8) = X(f) &= \sum_{a,b} X_{a,b}\frac{\partial f}{\partial Z_{a,b}}(e) = \sum_{a,b,l,h} X_{a,b}\frac{\partial}{\partial Z_{a,b}}(y_{il}Z_{lh}(x^{-1})_{hj})(e)\\ &= \sum_{a,b} X_{a,b}y_{i,a}(x^{-1})_{b,j} = (yXx^{-1})_{ij}.\end{aligned}$$

这样, 对任意的 $y \in \mathrm{GL}(n,k)$, 计算

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}\,x(*X)(T_{ij})(y) &= \rho_x(*X)\rho_x^{-1}(T_{ij})(y) = \rho_x((*X)\rho_x^{-1}(T_{ij})(y))\\ &= (*X)\rho_x^{-1}(T_{ij})(yx) = (yxXx^{-1})_{ij}\\ &= T_{ij}(yxXx^{-1}).\end{aligned} \tag{1.9}$$

于是由 (1.9) 式, 可得

$$\begin{aligned}\theta(\mathrm{Ad}\,x(*X))(T_{ij}) &= \mathrm{Ad}\,x(*X)T_{ij}(e) = T_{ij}(exXx^{-1})\\ &= T_{ij}(xXx^{-1}).\end{aligned}$$

所以

$$\mathrm{Ad}\,x(X)(T_{ij}) = \theta(\mathrm{Ad}\,x(*X))(T_{ij}) = T_{ij}(xXx^{-1}),$$

也就是说,

$$\mathrm{Ad}\,x(X) = xXx^{-1}.$$

□

1.2　代数群的基本性质

1.2.1　Jordan 分解

设 G 是代数群, $k[G]$ 是它的多项式环, 对 $g \in G$,

$$\rho_g : k[G] \longrightarrow k[G]$$
$$f \longmapsto \rho_g f,$$

即

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(k[G]) \subseteq \mathrm{GL}(k[G])$$
$$g \longmapsto \rho_g,$$

也就是说, ρ_g 是代数 $k[G]$ 的自同构, 也是向量空间 $k[G]$ 上的线性变换, 而 ρ 是 G (在空间 $k[G]$ 上的) 的表示.

定理 1.2.1　对任意的 $g \in G$, 存在唯一的 $s, u \in G$, 使得

(1) $g = su = us$,

(2) ρ_s 是半单变换, ρ_u 是幂幺变换.

证明参见 [51], §4, 定理 4.4, [169] p.99, 定理 15.3.

若 ρ_s 是半单变换, 则称 s 是代数群 G 的**半单元**, 若 ρ_u 是幂幺变换, 称 u 是代数群 G 的**幂幺元**.

例 1.2.1　$T(n,k) = \left\{ \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & * \end{pmatrix} \right\}$: n 阶上三角阵全体,

$D(n,k) = \left\{ \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \right\}$: n 阶对角阵全体,

$U(n,k) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \right\}$: n 阶幂幺上三角矩阵全体,

它们都是代数群 (参见 [169] p.52, 7.1).

对任何 $t \in T(n,k)$, 存在 $s \in D(n,k)$, $u, u' \in U(n,k)$, 使

$$t = su = u's.$$

如果一个代数群 G 的任意元 g 是幂幺的, 则称群 G 是**幂幺群**.

1.2.2 可对角化群及环面

矩阵群最简单的子群应是 $D(n,k)$. 在一般的代数群要模仿同样的情形便是定义与 $D(n,k)$ 相对应的群.

定义 1.2.1 如果代数群 G 与 $D(n,k)$ 的一个子群同构 (代数群同构), 则称 G 是**可对角化的** (diagonalizable).

因为 $D(n,k)$ 是可换群且每个元素都是半单的, 所以可对角化群也必有这两个特性. 可是, 可对角化群不一定是连通的.

定义 1.2.2 如果 G 是连通的可对角化代数群, 则称 G 是一个**环面** (torus).

例 1.2.2 $D(n,k)$ 就是一个环面.

定理 1.2.2(刚性定理) 设 $\varphi: V\times D\to D'$ 是簇的态射, 其中 D,D' 是可对角化代数群, V 是不可约簇.

若对任意的 $x\in V$,

$$\begin{aligned}\varphi_x: D &\longrightarrow D'\\ d &\longmapsto \varphi_x(d)=\varphi(x,d)\end{aligned}$$

是代数群同态, 则 $x\mapsto\varphi_x$ 是恒等映射, 即对不同的 $x,y\in V$, 均有 $\varphi_x=\varphi_y$.

证明参见 [169] p.106, 命题 16.3, [51] §8, Cor. 8.9, Prop. 8.10.

1.2.3 可解群

设 G 为抽象群, A,B 为 G 的子群, 用 (A,B) 表示由交换子的集合所生成的 G 的子群

$$(A,B)=\langle aba^{-1}b^{-1}\mid a\in A, b\in B\rangle.$$

定义 1.2.3 令 $D^0G=G$, $D^nG=(D^{n-1}G,D^{n-1}G)$, 得到一个序列:

$$D^0G>D^1G>\cdots>D^nG>\cdots$$

称为 G 的**导列**.

定义 1.2.4 令 $\mathscr{C}^0G=G$, $\mathscr{C}^nG=(\mathscr{C}^{n-1}G,G)$, 得到一个序列:

$$\mathscr{C}^0G>\mathscr{C}^1G>\cdots>\mathscr{C}^nG>\cdots$$

称为 G 的**下中心列**.

定义 1.2.5 若存在 n, 使得 $D^nG=D^{n+1}G=\cdots=\{e\}$, 则称 G 是**可解群**. 若存在 n, 使得 $\mathscr{C}^nG=\mathscr{C}^{n+1}G=\cdots=\{e\}$, 则称 G 是**幂零群**.

若 G 是代数群, 上面定义的抽象群 D^nG, $\mathscr{C}^nG$ 都是 G 的闭代数子群 (参见 [169] p.110, 命题 17.2), 因而定义 1.2.5 对代数群也适用.

定义 1.2.6　设 G 是代数群, S 是一个集合, 如果映射

$$\begin{aligned}\varphi: G\times S &\longrightarrow S\\ (g,s) &\longmapsto \varphi(g,s)=g\cdot s(\text{记为})\end{aligned}$$

满足以下条件:

(1) G 的单位元 e 对于任意的 $s\in S$ 有 $e\cdot s=s$,

(2) 对 $a,b\in G$, $s\in S$, 有 $(ab)\cdot s=a\cdot(b\cdot s)$,

则称群 G 作用在集合 S 上. 对固定的 $s\in S$, $G\cdot s=\{g\cdot s\mid g\in G\}$ 称为点 s 的**轨道**. $G_s=\{g\in G\mid g\cdot s=s\}$ 称为点 s 的**稳定子群**.

显然,

$$G\cdot s\longleftrightarrow G/G_s\ (\text{陪集空间}).$$

定理 1.2.3　设 G 为代数群, X 是一个簇, $\varphi: G\times X\to X$ 为簇的态射, φ 定义一个 G 在 X 上的作用, $Q=\{\varphi(G,x)\mid x\in X\}$ 为轨道集合. 设 $m=\min\{\dim Y\mid Y\in Q\}$. 对 $Y\in Q$, 若 $\dim Y=m$, 则 Y 为闭集.

这个定理说明：维数最低的轨道一定是闭的.

例 1.2.3　这里给出代数群作用在簇上的一个最简单的例子. 设 $\mathrm{PGL}(2,k)=\mathrm{GL}(2,k)/k^*$, 以 $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ 记 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 在 $\mathrm{PGL}(2,k)$ 里的像, 以 $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ 记 $\mathbb{P}^1$ 的元, 则 $\mathrm{PGL}(2,k)$ 作用在 $\mathbb{P}^1$ 上：

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ax+by\\ cx+dy\end{bmatrix}.$$

可以证明：$\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)=\mathrm{PGL}(2,k)$, 而且对 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in\mathbb{P}^1$, 若 $\boldsymbol{x}_1\neq\boldsymbol{x}_2$, 则

$$\{g\in\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)\mid g\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_1, g\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{x}_2\}\cong\mathrm{GL}(1,k).$$

(参见 [169] p.48).

以下定理在以后的讨论有重要地位.

定理 1.2.4(固定点定理)　任一连通可解群 G 作用在一个完备簇上必有固定点. 即当 G 是连通可解群, V 是完备簇, 簇的态射 $\varphi: G\times V\to V$ 定义了 G 在 V 上的一个作用, 则必存在 $x\in V$, 对任意的 $g\in G$ 有 $g\cdot x=x$.

证明 见 [51] 定理 10.4, [169] p.134, 定理 21.2. □

设 G_1, G_2 为代数群, $\varphi : G_2 \to \mathrm{Aut}(G_1)$ 为代数群同态. 若 $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$, 以 $g_2 \cdot g_1$ 记 $\varphi(g_2)(g_1)$, 这时 G_2 作用在 G_1 上:

$$\begin{aligned} G_2 \times G_1 &\longrightarrow \quad G_1 \\ (g_2, g_1) &\longmapsto g_2 \cdot g_1. \end{aligned}$$

在积 $G_1 \times G_2$ 上定义一个群运算

$$(g_1, g_2)(g_1', g_2') = (g_1(g_2 \cdot g_1'), g_2 g_2').$$

这样 $G_1 \times G_2$ 便是一个新的代数群, 我们记这个代数群为 $G_1 \rtimes G_2$, 称它为 G_1, G_2 的**半直积** (semidirect product).

定理 1.2.5(可解群结构定理) 设 G 是连通可解群, 则

(1) **(Lie-Kolchin 定理)** 设 $\pi : G \to \mathrm{GL}(V)$ 为代数群同态, 则 V 有 1 维子空间 L 使 $\pi(G)L \subseteq L$.

(2) $G_u = \{g \in G \mid g \text{ 幂幺}\}$ 是 G 的连通正规闭子群.

(3) 若 T, T' 为 G 的极大环面, 则存在 $g \in G_u$ 使得 $gT'g^{-1} = T$.

(4) 设 T 为 G 的任一极大环面, 则 $G = G_u \rtimes T$.

证明 见 [169] p.123, 定理 19.3 及 p.124, 推论. □

推论 1.2.6 设 G 是连通可解代数群, 则 G 的每个半单元 (或幂幺元) 必含于某个极大环面 (或极大连通幂幺子群) 中.

证明 见 [51] §10. □

例 1.2.4 $T(n, k)$ 是可解群, 且有正合列

$$1 \to U(n, k) \xrightarrow{i} T(n, k) \xrightarrow{\pi} D(n, k) \to 1,$$

其中 i 是包含同态, π 是投影. 易证:

$$T(n, k) \cong U(n, k) \rtimes D(n, k).$$

作为定理 1.1.2 的第一个推广, 便是以下的定理.

定理 1.2.7 若连通代数群 G 的维数 $\leqslant 2$, 则 G 必为可解群.

先证一个引理.

命题 1.2.8 设 G 是连通代数群, B 是 G 的极大连通可解子群, T 是 B 的极大环面, 这样若 $B = T$ 或 $B = B_u = \{b \in B \mid b \text{ 幂幺}\}$, 则 $G = B$.

证明 对 $\dim G$ 进行归纳. $\dim G = 0$ 是显然的.

若 $B = T$ 或 B_u, 则 G 幂零. 于是存在 $n \in \mathbb{Z}^+$ 使得 $\mathscr{C}^n(B) \neq \{e\}$, 但 $\mathscr{C}^{n+1}(B) = \{e\}$, 故 $\mathscr{C}^n(B) \subseteq Z(B)$, 从而 $\dim Z(B)^0 > 0$.

我们知 $B/Z(B)^0$ 是 $G/Z(B)^0$ 的极大可解子群, 且 $B/Z(B)^0$ 或者等于 $G/Z(B)^0$ 的极大环面, 或者幂幺. 由 $\dim G/Z(B)^0 < \dim G$ 可用归纳法导出 $G/Z(B)^0 = B/Z(B)^0$, 从而 $G = B$. □

现在可以证明定理 1.2.7.

证明 若 $\dim G \leqslant 2$ 且 G 不可解, 则存在 G 的极大连通可解子群 B 及 $B \neq G$, 因而 $B = T \cdot B_u$. 若 $\dim B = \dim T \cdot B_u = 1$, 则 $B = T$ 或 $B = B_u$. 由命题 1.2.8, $G = B$, 矛盾. □

显然并不是所有的代数群都是可解群, 如 $\mathrm{SL}(2,k)$ 不是可解群. 它的李代数是

$$\mathfrak{L}(\mathrm{SL}(2,k)) = kH + kX + kY,$$

其中

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\dim \mathrm{SL}(2,k) = 3$.

1.2.4 半单群与简约群

由上一小节的结构定理 1.2.5, 可解群的结构已经十分清楚了. 面对一般的 G 与可解群 S 还相差多少呢? 我们总希望找到的可解群 S 还是正规的, 因为这样我们可以得到商群 G/S, 而通过 $(G/S, S)$ 来研究 G.

定义 1.2.7 *称 G 的最大连通正规可解子群 $R(G)$ 为 G 的***根基** (radical).

定义 1.2.8 *称 G 的最大连通正规幂幺子群 $R_u(G)$ 为 G 的***幺根** (unipotent radical). 显然 $R_u(G) \lhd R(G)$.

定义 1.2.9 *若 $R(G) = e$, 则称 G 为***半单代数群** (semisimple group). *若 $R_u(G) = e$, 则称 G 为***简约代数群** (reductive group).

如果对任意有理表示 $G \to \mathrm{GL}(v)$ 及任一 $0 \neq v \in V^G$ (= G 不变向量子空间), 必存在正整数 r 使得有 $F \in (\mathrm{Sym}^r V^*)^G$ 满足条件 $F(v) \neq 0$, 我们称 G 是**几何简约代数群** (geometrically reductive group). Mumford 猜想一个代数群是简约的当且仅当它是几何简约的, 这个猜想被 Haboush 证明 (参见 [259] 第三版 Appendix to Chap I：A). 如果 G 的任意有理表示是**完全可约的** (completely reducible), 则称 G 是**线性简约代数群** (linearly reductive group). 只有在特征 0 的域上, 简约与线性简约是等价的 ([117] p.178; [271]).

对任意代数群的研究, 一般总是通过如下的手续来进行的 (这是属于 Chevalley 的一个定理, 参见 [313]):

任意代数群:	G	
含 e 连通分支:	G^0	G/G^0 是有限群
仿射群	G_1	G^0/G_1 是可换簇
可解群 (根基)	$R(G_1)$	$G_1/R(G_1)$ 是半单代数群
幂幺群 (幺根)	$R_u(G_1)$	$R(G_1)/R_u(G_1)$ 是环面 (由可解群结构)
	(e)	$G_1/R_u(G_1)$ 是简约代数群

从而对一般代数群的研究差不多就归结为半单群的情况了. 在上图中我们用了商群的概念, 在下一小节 (1.2.5 节) 我们澄清一下这个概念.

命题 1.2.9 设 G 是简约代数群, $Z(G)$ 为 G 的中心, 则

(1) $R(G) = Z(G)^0$,

(2) $(G,G) \cap Z(G)^0$ 有限.

证明 (1) 由于 $R(G)$ 是连通可解群, 故 $R(G) = S \cdot R(G)_u$, 其中 S 是环面. 由 G 简约, 知 $R(G)_u = 1$, $R(G)$ 是环面. 对 $R(G)$ 用刚性定理, 可得 $N_G(R(G))^0 = C_G(R(G))^0$. 但由定义 $R(G) \lhd G$, 即 $G \subseteq N_G(R(G))$. 而 G 连通, 故 $G = N_G(R(G))^0 = C_G(R(G))^0$, 得 $R(G) \subseteq Z(G)^0$. 又 $Z(G)^0$ 连通可解正规, 有 $Z(G)^0 \subseteq R(G)$, 所以 $R(G) = Z(G)^0$.

(2) 因 G 仿射, 故 $G \subseteq \mathrm{GL}(V)$, 于是 $Z(G)^0 \subseteq G$ 作用在 V 上. 使得

$$V = \bigoplus_{\alpha \in X(Z(G)^0)} V_\alpha, \qquad V_\alpha = \{v \in V \mid z \cdot v = \alpha(z)v \ \forall z \in Z(G)^0\},$$

其中 $X(Z(G)^0) = \{\alpha : Z(G)^0 \to \mathrm{GL}(1,k)$ 是代数群同态$\}$. 所以

$$C_{\mathrm{GL}(V)}(Z(G)^0) = \bigoplus_\alpha \mathrm{GL}(V_\alpha).$$

设 $g \in (G,G)$, 则因 $g \in G \subseteq \mathrm{GL}(V)$, 可知 $g \in C_{\mathrm{GL}(V)}(Z(G)^0)$, 于是

$$(G,G) \subseteq C_{\mathrm{GL}(V)}(Z(G)^0) \cap (\mathrm{GL}(V), \mathrm{GL}(V)),$$

$$(G,G) \subseteq \bigoplus_\alpha \mathrm{SL}(V_\alpha).$$

所以

$$Z(G)^0 \cap (G,G) \subseteq \bigoplus_\alpha Z(\mathrm{GL}(V_\alpha)) \cap \mathrm{SL}(V_\alpha),$$

而等式右边是有限集. □

1.2.5 商

关于代数群的商群, 有以下的定理.

定理 1.2.10 设 H 是代数群 G 的闭子群.

(1) 存在有理表示 $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V)$ 及 V 的一维子空间:

$$L = \{av_0 \mid a \in k\} \qquad (v_0 \in V),$$

使得

$$H = \{g \in G \mid \varphi(g)L = L\}.$$

(2) 以上的表示定义一个 G 在 $\mathbb{P}(V)$ 上的作用:

$$\begin{aligned} G \times \mathbb{P}(V) &\longrightarrow \mathbb{P}(V) \\ (g, [v]) &\longmapsto g \cdot [v] \xlongequal{\text{def}} [\varphi(g)v] \end{aligned}$$

(其中 $[v]$ 表示 $v \in V$ 所确定的 $\mathbb{P}(V)$ 的点), 对这个作用, $[v_0]$ 的稳定群是 H. 把轨道 $G \cdot [v_0]$ 记为 Y, 又设

$$\begin{aligned} \pi : G &\longrightarrow Y \\ g &\longmapsto g \cdot [v_0], \end{aligned}$$

则

(i) Y 是拟射影簇.

(ii) π 是簇的开态射, $\pi(G) = Y$, 且对任意的 $g, g' \in G$, 有 $g \cdot \pi(g') = \pi(gg')$.

(iii) 对任意的非空子集 $S \subseteq Y$, $\pi^{-1}(S)$ 为 H 的陪集的并集.

(iv) 设有簇的态射 $\psi : G \to X$ 满足下述条件:

对任意的子集 $S \subseteq X$, 若 $\pi^{-1}(S) \neq \emptyset$, 则 $\psi^{-1}(S)$ 为 H 的陪集的并集.

则存在簇的态射 $\rho : Y \to X$ 使得 $\rho\pi = \psi$.

(3) 若 H 为 G 的正规闭子群, 则 Y 是仿射代数群.

证明 见 [51] Th. 5.1, 6.8; [169] 第IV章. □

我们常以 G/H 记上述定理中的 Y.

1.2.6 中心化子

设 G 为代数群, 对于子集 $S \subseteq G$, 设

$$C_G(S) = \{g \in G \mid gsg^{-1} = s \quad \forall s \in S\},$$

$$N_G(S) = \{g \in G \mid gSg^{-1} = S\},$$

分别称 $C_G(S)$ 和 $N_G(S)$ 为 S 在 G 里的**中心化子**及**正规化子**.

命题 1.2.11 设 H 为 G 的闭子群, 则

(1) $C_G(H)$ 及 $N_G(H)$ 均为 G 的闭子群 (见 [169] p.59, 推论 8.2).

(2) $\mathfrak{L}(C_G(H)) \subseteq C_{\mathfrak{L}(G)}(\mathfrak{L}(H)) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{X \in \mathfrak{L}(G) \mid [X, \mathfrak{L}(H)] = 0\}$ (见 [169] p.78, 练习 5).

$\mathfrak{L}(N_G(H)) \subseteq N_{\mathfrak{L}(G)}(\mathfrak{L}(H)) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{X \in \mathfrak{L}(G) \mid [X, \mathfrak{L}(H)] \subseteq \mathfrak{L}(H)\}$ (见 [169] p.75, 推论 10.4B).

小心计算李代数的维数便可得以下定理 (参见 [169] p.116, 命题 18.1).

定理 1.2.12 若 H 为 G 的闭子群, 半单元 $s \in N_G(H)$, 则

$$\mathfrak{L}(C_H(s)) = C_{\mathfrak{L}(H)}(s),$$

其中

$$C_{\mathfrak{L}(H)}(s) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{X \in \mathfrak{L}(H) \mid (\operatorname{Ad} s)(X) = X\}.$$

从这定理便可得到一个有用的命题:

命题 1.2.13 若 H 为 G 的闭子群, 可对角化子群 $D \subseteq N_G(H)$. 设

$$C_{\mathfrak{L}(H)}(D) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{X \in \mathfrak{L}(H) \mid (\operatorname{Ad} x)(X) = X \quad \forall x \in D\},$$

则

$$\mathfrak{L}(C_H(D)) = C_{\mathfrak{L}(H)}(D).$$

证明 由于命题 1.2.11 (2), 只需证 $\mathfrak{L}(C_H(D)) \supseteq C_{\mathfrak{L}(H)}(D)$.

若 $H^0 \subseteq C_H(D)$, 则 $\mathfrak{L}(H) \subseteq \mathfrak{L}(C_H(D))$, 命题便得证. 若这条件不成立, 我们便对 $\dim H$ 作归纳证法. $\dim H = 0$ 不用证. 取 $s \in D$ 使 $\dim C_H(s) < \dim H$. 显然 $C_H(D) \subseteq C_H(s)$. 由定理 1.2.12, $C_{\mathfrak{L}(H)}(s) = \mathfrak{L}(C_H(s))$, 所以 $C_{\mathfrak{L}(H)}(D) \subseteq \mathfrak{L}(C_H(s))$. 用归纳假设便得 $\mathfrak{L}(C_H(D)) \supseteq \mathfrak{L}(C_{C_H(s)}(D)) = C_{\mathfrak{L}(C_H(s))}(D) = C_{\mathfrak{L}(H)}(D) \cap \mathfrak{L}(C_H(s)) = C_{\mathfrak{L}(H)}(D)$. □

还要补充两个命题.

命题 1.2.14 设 G 为连通代数群, $S \subseteq G$ 是环面, 则 $C_G(S)$ 是连通群.

参看 [169] p.140, 定理 22.3.

命题 1.2.15 设 G 为连通可解代数群, H 为 G 的子群, H 的元为半单元, 则

$$N_G(H) = C_G(H).$$

参看 [169] p.124, 命题 19.4.

以上关于中心化子的结果可以推广到群 T 作用在群 G 上的情形. 设 $\varphi: T \to \mathrm{Aut}(G)$ 为代数群同态, 则 φ 定义一个 T 在 G 上的作用: 对 $t \in T$ $g \in G$, $t \cdot g = \varphi(t)(g)$. 对 $X \in \mathfrak{L}(G)$, 以 $t \cdot X$ 记 $\mathrm{d}\varphi(t)(X)$. 设

$$C_G(T) = \{g \in G \mid t \cdot g = g \quad \forall t \in T\},$$

$$C_{\mathfrak{L}(G)}(T) = \{X \in \mathfrak{L}(G) \mid t \cdot X = X \quad \forall t \in T\}.$$

命题 1.2.16 设 $\varphi: T \to \mathrm{Aut}(G)$ 为代数群同态, T 为可对角化群, 则

$$\mathfrak{L}(C_G(T)) = C_{\mathfrak{L}(G)}(T).$$

证明 把命题 1.2.13 中的 G, H, D 分别设为 $G \rtimes T, G, T$, 并注意到 $(1, t)(g, 1)(1, t^{-1}) = (t \cdot g, 1)$, 便立即得到本命题. □

若我们进一步设 T 是环面, 则 $\mathrm{d}\varphi(T)$ 是向量空间 $\mathfrak{g} = \mathfrak{L}(G)$ 上的一组交换半单变换, 故 $\mathfrak{L}(G)$ 内存在基底使 $\mathrm{d}\varphi(T)$ 同时对角化, 也就是说存在一组同态 $\Phi_\varphi(G, T) = \{\alpha : T \to \mathrm{GL}(1, k) \mid \alpha$ 不是映到单位元的常映射$\}$ 使

$$\mathfrak{g} = C_{\mathfrak{g}}(T) \bigoplus_{\alpha \in \Phi_\varphi(G,T)} \mathfrak{g}_\alpha,$$

其中

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid t \cdot X = \alpha(t) X\}.$$

1.2.7　生成元

要研究一个群的结构可从生成元的性质开始, 以下命题提出一个生成元集合.

命题 1.2.17 设 G 为连通群, T 为环面, $\varphi : T \to \mathrm{Aut}(G)$ 为同态, 对 $\alpha \in \Phi_\varphi(G, T)$, 设 $T_\alpha = (\mathrm{Ker}\,\alpha)^0$, 设 G' 为由

$$\{C_G(T_\alpha) \mid \alpha \in \Phi_\varphi(G, T)\}$$

所生成的 G 的子群. 若 $G \neq C_G(T)$, 则 $G = G'$.

证明 设

$$\mathfrak{g}_0 = C_{\mathfrak{g}}(T) = \mathfrak{L}(C_G(T)),$$

则

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \bigoplus_{\alpha \in \Phi_\varphi(G,T)} \mathfrak{g}_\alpha.$$

这样由 $G \neq C_G(T)$ 可知 $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{g}_0$ 从而 $\Phi_\varphi(G, T) \neq \emptyset$.

对于 $\alpha \in \Phi_\varphi(G, T)$, 有 $\mathfrak{L}(C_G(T_\alpha)) = C_{\mathfrak{g}}(T_\alpha) \supseteq \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_\alpha$, 因而

$$\mathfrak{L}(G') \supseteq \mathfrak{g}_0 \bigoplus_{\alpha \in \Phi_\varphi(G,T)} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g} = \mathfrak{L}(G).$$

由 $G' \subseteq G = G^0$ 可得 $G = G'$. □

第二章　代数群的根系

2.1　代数群的根

2.1.1　Borel 子群

定义 2.1.1　称 G 的极大连通可解子群为 G 的 Borel **子群**. 由 G 的 Borel 子群所组成的集合记为 $\mathfrak{B}_G$. 对 G 的任一子群 H, 设 $\mathfrak{B}_G^H = \{B \in \mathfrak{B}_G \mid B \supset H\}$.

例 2.1.1　$T(n,k) \in \mathfrak{B}_{\mathrm{GL}(n,k)}$.

定理 2.1.1　设 B 是 G 的 Borel 子群.

(1) (完备性定理) G/B 是射影簇 (见 [51] 定理 11.1; [169] p.134, 定理 21.3).

(2) (共轭性定理) G 的所有 Borel 子群均与 B 共轭 (见 [169] p.134, 定理 21.3).

(3) (稠密性定理) $G = \bigcup_{g\in G} gBg^{-1}$ (见 [51] 11.9; [169] p.139, 定理 22.2).

(4) (生成元定理) 取 G 任一极大环面 T, 则 G 可由 $\mathfrak{B}_G^T$ 生成 (见 [169] p.154, 推论 25.2C).

(5) (正规化子定理) $B = N_G(B)$ (见 [51] 11.16; [169] p.143, 定理 23.1).

定义 2.1.2　设 G 是连通简约代数群, P 是 G 的子群, 如果 P 包含 G 的一个 Borel 子群, 就称 P 是**抛物子群** (parabolic subgroup) (见 [51] §11.2).

我们只证明以上的 (1) 与 (2). 为此, 我们复习一下 Grassmann 簇与旗簇的概念. k 上 n 维向量空间 V 的 d 维子空间的集合记为 $G(d,n)$. 用 $\langle v_1, v_2, \cdots, v_d\rangle$ 记以 $\{v_1, v_2, \cdots, v_d\}$ 为基的子空间, 定义 Plücker 映射

$$
\begin{aligned}
p: G(d,n) &\longrightarrow \mathbb{P}(\wedge^d V) \\
\langle v_1, v_2, \cdots, v_d\rangle &\longmapsto [v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_d].
\end{aligned}
$$

则 p 是一一映射, p 的像集是射影空间 $\mathbb{P}(\wedge^d V)$ 中 C_n^{d+1} 个二次超曲面的交集, 因此 $G(d,n)$ 是一个射影簇 (参见 [135], 第一章 §5; [51] §10.3).

V 的**旗簇** (flag variety) 是

$$
\mathfrak{F}(V) = \{(V_1, \cdots, V_n) \in G(1,n) \times \cdots \times G(n,n) \mid V_i \subsetneqq V_{i+1},\ 1 \leqslant i < n\}.
$$

不难验证 $\mathfrak{F}(V)$ 是 $G(1,n) \times \cdots \times G(n,n)$ 的闭子集, 故也是射影簇 (见 [169] p.15).

证明　设 S 为 $\mathfrak{B}_G$ 中维数最大的元, 根据定理 1.2.10, 存在表示 $G \to \mathrm{GL}(V)$ 及 1 维空间 $V_1 \subseteq V$ 使 $S = \{g \in G \mid g \cdot V_1 = V_1\}$, 故 S 作用在 V/V_1 上. 由定理 1.2.5(1), 可得 V 的 2 维子空间 $V_2 \supset V_1$, 使得 $S \cdot (V_2/V_1) = V_2/V_1$. 如此继续下去便可得一个旗 (假设 $\dim V = n$)

$$f = (V_1 \subsetneqq V_2 \subsetneqq \cdots \subsetneqq V_n = V) \in \mathfrak{F}(V),$$

使得 $S \cdot V_i \subseteq V_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, 透过表示 $G \to \mathrm{GL}(V)$, G 作用在 $\mathfrak{F}(V)$ 上: 对于 $g \in G$,

$$g \cdot (V_1 \subsetneqq V_2 \subsetneqq \cdots \subsetneqq V_n) = (g \cdot V_1 \subsetneqq g \cdot V_2 \subsetneqq \cdots \subsetneqq g \cdot V_n).$$

这样, 以上的 f 的稳定子群显然是 S, 于是有双射 $G/S \longleftrightarrow G \cdot f$. 另一方面, 对任一旗 $\tilde{f} = (\widetilde{V_1} \subsetneqq \widetilde{V_2} \subsetneqq \cdots \subsetneqq \widetilde{V_n})$, 存在 V 的基 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ 使 $\widetilde{V_1} = kv_1$, $\widetilde{V_2} = kv_1 + kv_2, \ldots$, 对应这个基, $\tilde{f}$ 的稳定子群 $\widetilde{S}$ 必与 $T(n,k)$ 的一个子群同构, 故 $\widetilde{S}$ 亦为可解群, 于是 $\dim \widetilde{S} \leqslant \dim S$. 这就告诉我们 $G \cdot f$ 是维数最小的轨道, 所以根据定理 1.2.3, $G \cdot f$ 是闭集. 由于旗簇 $\mathfrak{F}(V)$ 是射影簇, 因此 $G \cdot f$ 是射影簇. 由定理 1.2.10(2)(i), G/S 是拟射影簇, 因此也是射影簇.

现在让 B 作用在 G/S 上: 对于 $b \in B$, $g \in G$, $b \cdot (gS) = bgS$. 由固定点定理 1.2.4, 知有 $gS \in G/S$ 使 $BgS = gS$, 所以 $g^{-1}Bg \subseteq S$. 但 $g^{-1}Bg$ 与 S 均为 Borel 子群, 由 Borel 子群的极大性得 $g^{-1}Bg = S$. 现在定理是显然了. □

推论 2.1.2　*若 H 为 G 的连通子群, 则 H 是 G 的 Borel 子群当且仅当 H 可解及 G/H 完备.*

证明　充分性: 根据固定点定理 1.2.4, 知 B 在 G/H 上的作用有固定点, 即存在 $g \in G$, 使 $g^{-1}Bg \subseteq H$. 但 $g^{-1}Bg \in \mathfrak{B}_G$ 是 Borel 子群, 由 Borel 子群的极大性得 $g^{-1}Bg = H$, 即 $H \in \mathfrak{B}_G$. □

命题 2.1.3　*映射*

$$\begin{aligned} \varphi: G/B &\longrightarrow \mathfrak{B}_G \\ gB &\longmapsto gBg^{-1} \end{aligned}$$

是双射.

证明　由 Borel 子群的共轭性定理可知 φ 是满映射. 另一方面, 若 $\varphi(gB) = \varphi(g_1B)$, 则 $gBg^{-1} = g_1Bg_1^{-1}$. 于是 $g_1^{-1}g \in N_G(B) = B$ (正规化子定理), 即 $gB = g_1B$ 说明 φ 又是一一映射. □

G 可以通过左平移作用在 G/B 上：对 $x \in G$, 令 $\lambda_x(gB) = xgB$. 另一方面, G 亦通过共轭作用在 $\mathfrak{B}_G$ 上：对于 $x \in G$, $S \in \mathfrak{B}_G$, 令 $\gamma_x(S) = xSx^{-1}$. 显然对于 $x \in G$ 下图可交换：

$$\begin{array}{ccc} G/B & \xrightarrow{\varphi} & \mathfrak{B}_G \\ \big\downarrow{\scriptstyle \lambda_x} & & \big\downarrow{\scriptstyle \gamma_x} \\ G/B & \xrightarrow{\varphi} & \mathfrak{B}_G \end{array}$$

事实上我们有

$$\begin{array}{ccc} gB & \overset{\varphi}{\longmapsto} & gBg^{-1} \\ \big\downarrow{\scriptstyle \lambda_x} & & \big\downarrow{\scriptstyle \gamma_x} \\ xgB & \overset{\varphi}{\longmapsto} & xgBg^{-1}x^{-1} \end{array}$$

为了方便, 我们常称 $\mathfrak{B}_G$ 为 G 的 Borel 簇, 并简记 $\mathfrak{B}_G$ 为 $\mathfrak{B}$.

命题 2.1.4　设 G 是连通代数群, $B \in \mathfrak{B}_G$, $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$. 若对任意的 $b \in B$ 都有 $\sigma(b) = b$, 则 $\sigma = \mathrm{id}$.

证明　定义一个映射

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto \sigma(g)g^{-1}. \end{aligned}$$

根据命题假设, σ 在 B 上是恒等映射, 故 φ 可以诱导映射 $\overline{\varphi} : G/B \to G$ 使下图可交换：

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi} & G/B \\ & \searrow^{\varphi} & \big\downarrow{\scriptstyle \overline{\varphi}} \\ & & G \end{array}$$

由于 G/B 是射影簇, $\overline{\varphi}(G/B)$ 完备且是 G 的闭子集. 而 G 是仿射簇, 所以 $\overline{\varphi}(G/B)$ 必须是一个点 $e \in G$. 也就是说 $\varphi(G) = e$. 由 $\varphi(g) = \sigma(g)g^{-1} = e$ 得 $\sigma(g) = g$, 即 $\sigma = \mathrm{id}$. □

命题 2.1.5　设 G 是连通代数群, $B \in \mathfrak{B}_G$, 则

$$Z(G)^0 \subseteq Z(B) \subseteq Z(G).$$

证明　(1) $Z(G)^0$ 连通交换正规, 因而连通可解, 存在 $B' \in \mathfrak{B}_G$ 使 $Z(G)^0 \subseteq B'$. 而有 $g \in G$ 使 $gB'g^{-1} = B$, 于是 $Z(G)^0 = gZ(G)^0g^{-1} \subseteq gB'g^{-1} = B$, 可得 $Z(G)^0 \subseteq Z(B)$.

(2) 对任意的 $b \in Z(B)$ 定义 G 的内自同构:

$$\begin{aligned} \varphi_b : G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto bgb^{-1}. \end{aligned}$$

显然有 $\varphi_b|_B = \mathrm{id}$, 根据命题 2.1.4, $\varphi_b|_G = \mathrm{id}$. 也就是说对任意的 $g \in G$, $bgb^{-1} = g$, 即 $b \in Z(G)$. 所以 $Z(B) \subseteq Z(G)$. □

2.1.2 环面的共轭定理

定理 2.1.6 设 G 是连通代数群, 则 G 的所有极大环面均是共轭的.

证明 对 G 的极大环面 T, T'.

(1) 因为 T 是可换群, 所以 $\mathscr{D}(T) = (T, T) = e$, 即 T 是可解群. 这样必存在一个 Borel 子群 B 使 $T \subseteq B$.

同样, 对 T', 存在 Borel 子群 B' 使 $T' \subseteq B'$.

(2) 我们知道 G 的所有 Borel 子群是共轭的, 因此有 $g \in G$, 使 $B = gB'g^{-1}$.

(3) 由 $B = gB'g^{-1}$ 可得 $gT'g^{-1} \subseteq B$. 由于映射 $x \mapsto gxg^{-1}$ 是由 g 确定的内自同构 $\mathrm{Int}\, g$, 因此 $gT'g^{-1}$ 仍是 G 的一个极大环面. 所以 T 与 $gT'g^{-1}$ 都是 B 的极大环面.

(4) B 是可解群, 它的所有极大环面均共轭, 即存在 $b \in B$, 使 $T = bgT'g^{-1}b^{-1} = (bg)T'(bg)^{-1}$, 于是 T 与 T' 在 G 内共轭. □

此定理说明: 在 G 的内自同构下, G 的极大环面 “基本上” 只有一个.

2.1.3 Weyl 群

定理 2.1.7 设 G 是连通代数群, T 是 G 的任一极大环面,

$$W = W(G, T) = N_G(T)/C_G(T),$$

则 W 是有限群.

证明 (1) 因为 $C_G(T) \lhd N_G(T)$, 所以 $W = N_G(T)/C_G(T)$ 是群.

(2) 对 $N_G(T)^0$, 定义

$$\begin{aligned} \varphi : N_G(T)^0 \times T &\longrightarrow T \\ (n, t) &\longmapsto ntn^{-1}. \end{aligned}$$

显然 φ 是代数簇的态射.

因为 T 是环面, 即可对角化, 这样可用刚性定理, 得 $n \mapsto \varphi_n$ 是恒等映射, 其中 $\varphi_n(t) = \varphi(n, t) = ntn^{-1}$. 特别对单位元 $e \in N_G(T)^0$ 有

$$\varphi_n = \varphi_e,$$

即

$$ntn^{-1} = ete^{-1} = t, \quad \forall t \in T, n \in N_G(T)^0.$$

所以 $n \in C_G(T)$, 得

$$N_G(T)^0 \subseteq C_G(T)^0 = C_G(T).$$

反之, 显然有 $C_G(T)^0 \subseteq N_G(T)^0$, 所以 $C_G(T)^0 = N_G(T)^0$.

(3) 因为

$$N_G(T) \supseteq C_G(T) = C_G(T)^0 = N_G(T)^0,$$

而指数

$$[N_G(T) : N_G(T)^0] < \infty,$$

即有 $[N_G(T) : C_G(T)] < \infty$. 所以 $W = N_G(T)/C_G(T)$ 是有限群. □

定理 2.1.6 指出 G 的任意两个极大环面 T, T' 必共轭, 即存在 $g \in G$ 使 $T = gT'g^{-1}$. 这样得

$$N_G(T) \cong N_G(T'), \qquad C_G(T) \cong C_G(T'),$$

所以

$$W(G,T) \cong W(G,T').$$

这就是说, 在同构的意义下, 群 $W(G,T)$ 与极大环面 T 的选择无关, 它是由 G 与极大环面唯一确定的. 我们称 $W = W(G,T)$ 为群 G 的 Weyl 群.

补充　定理 2.1.7 对 G 的任何环面 S 都成立，这是因为证明中实际上只用了刚性定理, 而刚性定理仅要求群是可对角化的就行了. 这就是说, $W(G,S) = N_G(S)/C_G(S)$ 也是有限群.

命题 2.1.8　设 $\varphi : G \to G'$ 为连通代数群的满同态.

(1) $\mathfrak{B}_G \to \mathfrak{B}_{G'}$: $B \mapsto \varphi(B)$ 为满映射.

(2) 分别以 $\mathfrak{T}_G, \mathfrak{T}_{G'}$ 记 G, G' 的极大环面集合, 则 $\mathfrak{T}_G \to \mathfrak{T}_{G'}$: $T \mapsto \varphi(T)$ 为满映射.

(3) 对 $T \in \mathfrak{T}_G$, 设 $T' = \varphi(T)$, 则 $\mathfrak{B}_G^T \to \mathfrak{B}_{G'}^{T'}$ 为满映射.

(4) φ 诱导满映射 $W(G,T) \to W(G',T')$.

证明　参见 [169] p.196, p.148, 命题 24.1B. □

2.1.4 根

定义 2.1.3 若 S 为代数群, 则称代数群同态 $\chi: S \to \mathrm{GL}(1,k)$ 为 S 的特征标 (character).

记 $X(S)$ 为由 S 的所有特征标组成的集合.

同时, 对 $\chi_1, \chi_2 \in X(S)$ 以及任意的 $s \in S$, 定义 $\chi_1\chi_2(s) = \chi_1(s)\chi_2(s)$, 则得 $X(S)$ 是交换群. 通常我们把该群的运算记为加法 (它是交换群), 即

$$(\chi_1 + \chi_2)(s) = \chi_1(s)\chi_2(s).$$

于是 $X(S)$ 就是一个 $\mathbb{Z}$ 模, 进而对任何域 $k \supset \mathbb{Z}$, 还可以考虑张量积 $X(S) \otimes_{\mathbb{Z}} k$.

定理 2.1.9 设 T 是任一环面, V 是有限维向量空间.

$$\pi : T \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$$

是代数群同态. 则必存在 $\chi_1, \chi_2 \cdots, \chi_n \in X(T)$ 使

$$V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_{\chi_i},$$

其中

$$V_{\chi_i} = \{v \in V \mid \pi(t) \cdot v = \chi_i(t)v \ \forall t \in T\}.$$

证明 (1) T 是环面, 所以它是可换群, 任一 $t \in T$ 都是半单元. 而同态像 $\pi(T) \subseteq \mathrm{GL}(V)$ 也是可换的, 且任一 $\pi(t)$ 是半单线性变换. 因此可设 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 是 $\pi(t)$ 的特征根,

$$W_i = \mathrm{Ker}(\pi(t) - a_i I).$$

由于 $\pi(t)$ 是半单线性变换, 所以

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_r.$$

(2) 下面我们对维数 $\dim V$ 用归纳法来证该定理.

当 $\dim V = 1$, 则定理显然成立.

假设定理对任何维数 $< \dim V$ 的空间 W 成立. 这时

i) 若 $r = 1$, $W_1 = V$, 即对任意的 $t \in T$,

$$\pi(t) = \begin{pmatrix} a & & & 0 \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a \end{pmatrix} = aI$$

是纯量阵. 因此我们可以定义

$$\chi_i(t) = a, \qquad \forall t \in T, 1 \leqslant i \leqslant n.$$

于是

$$V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_{\chi_i}.$$

定理成立.

ii) 否则, $r > 1$, 由 (1), $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$, 且 $\dim W_j < \dim V$, $1 \leqslant j \leqslant r$.

因为 $\pi(T)$ 是 V 上可换线性变换集合, 所以对任一 $t' \in T$, $\pi(t')$ 必稳定每一子空间 W_j, 即 $\pi(T)|_{W_j} \subseteq \mathrm{GL}(W_j)$. 现在 $\dim W_j < \dim V$, 可用归纳法假设, 存在 $\chi_{js} \in X(T)$ $(s = 1, 2, \cdots, r_j)$, 使

$$W_j = W_{\chi_{j1}} \oplus \cdots \oplus W_{\chi_{jr_j}}.$$

所以

$$V = \bigoplus_{j=1}^{r} W_j = \bigoplus_{j=1}^{r} \bigoplus_{s=1}^{r_j} W_{\chi_{js}}. \qquad \square$$

现在, 对连通代数群 G, 若 $\mathfrak{g}$ 是 G 的李代数, 取极大环面 $T \subseteq G$, 则 $\mathrm{Ad}: T \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 是 T 在 $\mathfrak{g}$ 上的一个表示, 于是由定理 2.1.9, 得 $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in X(T)$. 其中

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{Ad}\, t \cdot X = \alpha(t)X, \quad \forall t \in T\}.$$

特别是 $0 \in X(T)$ 是指对任意的 $t \in T$, $0(t) = 1$. 所以

$$\mathfrak{g}_0 = \{X \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{Ad}\, t \cdot X = X, \quad \forall t \in T\} = C_{\mathfrak{g}}(T).$$

定义 2.1.4　以 $\Phi(G,T)$ 表示所有使 $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ 的 $\alpha \neq 0$ 之集合, 并称这样的特征标 α 为 (G,T) 的**根** (root). 于是

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \bigoplus_{\alpha \in \Phi(G,T)} \mathfrak{g}_\alpha.$$

补充　设 H 是 G 的闭子群, 极大环面 $T \subseteq N_G(H)$, 即对任何 $t \in T$, $tHt^{-1} \subseteq H$. 设 $\mathfrak{h}$ 是 H 的李代数. 这样, T 在 $\mathfrak{h}$ 上有伴随表示:

$$\mathrm{Ad}: T \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{h}),$$

且

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \bigoplus_{\alpha} \mathfrak{h}_\alpha, \qquad \mathfrak{h}_\alpha = \{X \in \mathfrak{h} \mid \mathrm{Ad}\, t \cdot X = \alpha(t)X\ \forall t \in T\} \subseteq \mathfrak{g}_\alpha.$$

显然这里的 $\alpha \in \Phi(G,T)$.

对 α, 我们定义 $\mathfrak{g}'_\alpha$, 它满足 $\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{h}_\alpha \oplus \mathfrak{g}'_\alpha$. 记

$$\Phi(G/H,T) = \{\alpha \in \Phi(G,T) \mid \mathfrak{g}'_\alpha \neq 0\},$$

这样,

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{h} + \mathfrak{g}_0) \bigoplus_{\alpha \in \Phi(G/H,T)} \mathfrak{g}'_\alpha.$$

下面我们来定义 $W = W(G,T) = N_G(T)/C_G(T)$ 在 $X(T)$ 上的作用, 设 $w = nC_G(T)$, $n \in N_G(T)$, 对任意的 $\chi \in X(T)$,

$$(w \cdot \chi)(t) = \chi(w^{-1} \cdot t) = \chi(n^{-1}tn).$$

容易看出, 这样定义 w 在 $X(T)$ 上的作用与 $w = nC_G(T)$ 中代表元 n 的选法无关. 事实上, 若还有 $w = n'C_G(T) = nC_G(T)$, 则 $n' = nc$, 其中 $c \in C_G(T)$. 这时, $n'^{-1}tn' = (nc)^{-1}t(nc) = c^{-1}n^{-1}tnc$. 因 $n \in N_G(T)$, 故 $n^{-1}tn \in T$, 又 $c \in C_G(T)$, 所以 $c^{-1}(n^{-1}tn)c = n^{-1}tn$.

我们既然定义了 W 在 $X(T)$ 上的作用, 就可以进一步得到:

命题 2.1.10 *W 可以作用在 $\Phi(G,T)$ 上, 即对根 $\alpha \in \Phi(G,T)$, 任何 $w \in W$ 都使 $w \cdot \alpha \in \Phi(G,T)$.*

证明 由上面的说明, $w \cdot \alpha \in X(T)$ 是显然的. 现在我们进一步可证: 若令 $w = nC_G(T)$, 则 $\mathrm{Ad}(n) \cdot \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_{w \cdot \alpha}$.

事实上, 对 $v \in \mathfrak{g}_\alpha$, 欲证 $\mathrm{Ad}(n) \cdot v \in \mathfrak{g}_{w \cdot \alpha}$, 即欲证对任意的 $t \in T$, $\mathrm{Ad}(t) \cdot (\mathrm{Ad}(n) \cdot v) = (w \cdot \alpha)(t)(\mathrm{Ad}(n) \cdot v)$.

我们来计算:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}(t) \cdot (\mathrm{Ad}(n) \cdot v) &= \mathrm{Ad}(n) \cdot \mathrm{Ad}(n^{-1}) \cdot \mathrm{Ad}(t) \cdot (\mathrm{Ad}(n) \cdot v) \\ &= \mathrm{Ad}(n) \cdot (\mathrm{Ad}(n^{-1}tn) \cdot v) = \alpha(n^{-1}tn)\,\mathrm{Ad}(n) \cdot v \\ &= (w \cdot \alpha)(t)(\mathrm{Ad}(n) \cdot v). \end{aligned}$$

□

我们的目的是证明集合 $\Phi(G,T)$ 是根系及这个根系的 Weyl 群就是 $W(G,T)$, 以后的几节就是为这个结果的证明作准备.

现在让我们复习一下根系的定义. 设 E 为向量空间, $\alpha \in E$, $w: E \to E$ 为 E 的线性变换. 设

$$H_w = \{\lambda \in E \mid w(\lambda) = \lambda\}.$$

若 $w(\alpha) = -\alpha$ 及 $\dim H_w = \dim E - 1$, 则我们说 w 是一个关于 α 的**反射** (reflection).

定义 2.1.5 设 E 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的有限维向量空间, Ψ 是 E 中向量的集合, 如果

(R1) Ψ 是有限集, 且 Ψ 生成 E 及 $0 \notin \Psi$;

(R2) 若 $\alpha \in \Psi$ 及 $n\alpha \in \Psi$ $(n \in \mathbb{R})$, 则 $n = \pm 1$;

(R3) 对任意的 $\alpha \in \Psi$, 存在关于 α 的反射 w_α 使 $w_\alpha(\Psi) \subseteq \Psi$;

(R4) 若 $\alpha, \beta \in \Psi$, 则 $w_\alpha(\beta) - \beta = n_\alpha \alpha$, 其中 $n_\alpha \in \mathbb{Z}$,

则称 Ψ 是一个根系 ([51] §14.7).

在 $\mathrm{GL}(E)$ 中, $\{w_\alpha \mid \alpha \in \Psi\}$ 生成一个子群 $W(\Psi)$, 称它为根系 Ψ 的 Weyl 群.

定义 2.1.6 若根系 Ψ 的子集 $\Delta = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ 满足下列条件:

(1) $E = \mathbb{R}\alpha_1 \oplus \mathbb{R}\alpha_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}\alpha_l$,

(2) 对 $\alpha \in \Psi$, 必存在 $c_1, c_2, \cdots, c_l \in \mathbb{Z}^+$, 使

$$\alpha = \sum_{i=1}^{l} c_i \alpha_i \quad 或 \quad \alpha = -\sum_{i=1}^{l} c_i \alpha_i.$$

则称 Δ 为 Ψ 的**基**. 称 Δ 中的根 α_i $(i = 1, 2, \cdots, l)$ 为 Ψ 的**单根** (simple root). 若根的分解式 $\alpha = \sum_{i=1}^{l} c_i \alpha_i$ 中的系数 $c_i \geqslant 0$, 称 α 是**正根**, 否则, 称为**负根**.

显然, 一个根是正根还是负根与基 Δ 的选取有关.

定义 2.1.7 记

$$H_\alpha = \{\beta \in E \mid \beta \text{ 垂直于 } \alpha\},$$

称 $E - \bigcup_{\alpha \in \Psi} H_\alpha$ 的每个连通分支为 Ψ 的 Weyl 房. 记 $\mathfrak{C} = \{\Psi \text{ 的 Weyl 房}\}$.

定理 2.1.11 (1) W 单可迁地作用在 $\mathfrak{C}$ 上.

(2) $\mathfrak{C} \longleftrightarrow \{根系\ \Psi\ 的基\}$.

证明 参见 [169] p.229. □

2.1.5　例

例 2.1.2　$G = \mathrm{SL}(2,k) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \middle| \ \det = 1 \right\}$,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,k) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \ a + d = 0 \right\},$$

$$T = \left\{ t = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \middle| \ a \in k^* \right\}$$

是代数群 G 的一个极大环面, 则

$$\mathfrak{g} = kH + kX + kY = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha},$$

其中

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

由于

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(t)X &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & a^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a^2 X, \end{aligned}$$

所以根 $\alpha \in \Psi(G,T)$: $\alpha : \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mapsto a^2$. 易见

$$\mathfrak{g}_0 = kH, \quad \mathfrak{g}_\alpha = kX, \quad \mathfrak{g}_{-\alpha} = kY.$$

例 2.1.3　同样, 对

$$G = \mathrm{SL}(3,\mathbb{C}), \qquad \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}),$$

$$T = D(3,\mathbb{C}) \cap \mathrm{SL}(3,\mathbb{C}),$$

$$\Psi(G,T) = \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm(\alpha_1 + \alpha_2)\},$$

其中

$$\alpha_1 : \begin{pmatrix} t_1 & & 0 \\ & t_2 & \\ 0 & & t_3 \end{pmatrix} \mapsto t_1 t_2^{-1}, \qquad X_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g},$$

$$\alpha_2 : \begin{pmatrix} t_1 & & 0 \\ & t_2 & \\ 0 & & t_3 \end{pmatrix} \mapsto t_2 t_3^{-1}, \qquad X_{\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g},$$

$$\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2 : \begin{pmatrix} t_1 & & 0 \\ & t_2 & \\ 0 & & t_3 \end{pmatrix} \mapsto t_1 t_3^{-1}, \quad X_{\alpha_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g},$$

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h} = \left\{ t = \begin{pmatrix} t_1 & & 0 \\ & t_2 & \\ 0 & & t_3 \end{pmatrix} \middle| \, t_i \in \mathbb{C}, \sum t_i = 0 \right\},$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathbb{C}X_{\alpha_1} \oplus \mathbb{C}X_{\alpha_2} \oplus \mathbb{C}X_{\alpha_3} \oplus \mathbb{C}X_{-\alpha_1} \oplus \mathbb{C}X_{-\alpha_2} \oplus \mathbb{C}X_{-\alpha_3},$$

$$\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2\} \subseteq \Psi(G, T)$$

就是 Ψ 的一个基.

2.2　环面在 Borel 簇上的作用

2.2.1　固定点

设 G 为简约连通代数群, $\mathfrak{B} = \{B \mid B \text{ 为 } G \text{ 的 Borel 子群}\}$, $S \subset B \subset G$, 其中 S, B 分别为 G 的环面子群及 Borel 子群, G/B 为商簇, 则存在 G/B 与 $\mathfrak{B}$ 之间的双射对应:

$$\varphi : gB \mapsto gBg^{-1}, \qquad \forall g \in G.$$

今分别定义 S 在 G/B、$\mathfrak{B}$ 上的态射作用为

$$\begin{array}{ccc} S \times G/B & \longrightarrow & G/B \\ (x, gB) & \longmapsto & (xg)B, \\ S \times \mathfrak{B} & \longrightarrow & \mathfrak{B} \\ (x, gBg^{-1}) & \longmapsto & (xg)B(xg)^{-1}. \end{array}$$

显见 φ 关于 S 的这两种作用是等变的.

记

$$X = \{x \in G/B \mid s \cdot x = x, \ \forall s \in S\},$$

$$\mathfrak{B}^S = \{B' \in \mathfrak{B} \mid B' \supseteq S\} = \{y \in \mathfrak{B} \mid s \cdot y = y, \ \forall s \in S\}.$$

命题 2.2.1　*X 为 G/B 的闭子集.*

证明　对任意取定的 $s \in S$, 定义映射

$$\begin{aligned} \varphi_s : G/B &\longrightarrow G/B \times G/B \\ x &\longmapsto (s \cdot x, x). \end{aligned}$$

显然 $\varphi_s = \tau_s \times 1$ 作为射影簇 G/B 到自身的态射之积, 也是一个态射, 这里 $\tau_s : x \mapsto s \cdot x$, 1 为恒等态射. 且由簇的性质, 对角元集 $D = \{(x, x) \mid x \in G/B\}$ 为 $G/B \times G/B$ 的闭子集. 所以

$$\varphi_s^{-1}(D) = \{x \in G/B \mid s \cdot x = x\}$$

是 G/B 中闭子集.

$$X = \bigcap_{s \in S} \varphi_s^{-1}(D)$$

也是 G/B 的闭子集. □

设 $X = \bigcup_{i=1}^r Y_i$, Y_i 是 X 的不可约分支, $Y = Y_1$ 为含 $y_0 = \overline{B}$ 的分支, $\mathfrak{Y} = \{Y_i\}_{1 \leqslant i \leqslant r}$. 记 $C = C_G(S)$ 为 S 在 G 的中心化子. 因为对任意的 $c \in C$, $s \in S$, $x \in X$, 有

$$s \cdot (c \cdot x) = (sc) \cdot x = (cs) \cdot x = c \cdot (s \cdot x) = c \cdot x \in X,$$

所以 C 对 G/B 的自然作用保持 X 稳定, 故诱导出 C 在 X 上的自然作用.

命题 2.2.2　*C 对 X 的自然作用保持 Y 稳定, 且在 Y 上可迁.*

证明　(1) C 置换 $\mathfrak{Y}$.

对任意的 $c \in C$,

$$\begin{aligned} \varphi_c : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto c \cdot x \end{aligned}$$

为态射. 若 $Y_i \in \mathfrak{Y}$, 则 Y_i 不可约, $\varphi_c(Y_i)$ 也不可约. 可断定 $\varphi_c(Y_i)$ 必为 X 的不可约分支. 否则, 存在 $Y_j \supsetneqq \varphi_c(Y_i)$, 这等价于 $\varphi_{c^{-1}}(Y_j) \supsetneqq Y_i$, 且因 $\varphi_{c^{-1}}$ 也为态射, $\varphi_{c^{-1}}(Y_j)$ 不可约, 这与 Y_i 的极大性矛盾. 所以 $\varphi_c(Y_i) \in \mathfrak{Y}$.

另外, 如果 $\varphi_c(Y_i) = \varphi_c(Y_j)$, 则 $\varphi_{c^{-1}}(\varphi_c(Y_i)) = \varphi_{c^{-1}}(\varphi_c(Y_j))$, 因此 $Y_i = Y_j$. 可见 φ_c 置换 $\mathfrak{Y}$. 所以 C 也置换 $\mathfrak{Y}$. 令

$$C_Y = \{c \in C \mid c \cdot Y = Y\},$$

显然它是 C 的一个子群.

(2) C_Y 是 C 的闭子群且 $[C:C_Y]<\infty$.

对 $y\in Y$, 定义态射

$$\begin{aligned}\varphi_y: C &\longrightarrow X\\ c&\longmapsto c\cdot y.\end{aligned}$$

则 $C_Y=\bigcap_{y\in Y}\varphi_y^{-1}(Y)$. 由于 Y 为 X 的闭子集, $\varphi_y^{-1}(Y)$ 是 C 的闭子集, C_Y 也是 C 的闭子集. 若 $c_1,c_2\in C$ 使 $c_1Y=c_2Y$, 则 $c_2^{-1}c_1Y=Y$, $c_2^{-1}c_1\in C_Y$, $c_1\in c_2C_Y$, 得 $c_1C_Y=c_2C_Y$. 这样就得到了 C/C_Y 到 $\mathfrak{Y}$ 里的一一对应, 因而 $|C/C_Y|\leqslant|\mathfrak{Y}|<\infty$, 即 $[C:C_Y]<\infty$.

(3) $C=C_Y$, 因而 C 保持 Y 稳定.

C_Y 是 C 的具有限指数的闭子群, 由 1.1.1 节知 $C_Y\supseteq C^0$, 但由命题 1.2.14, $C=C^0$, 因此 $C=C_Y$, C 保持 Y 稳定.

(4) 考虑自然映射 $\pi: G\to G/B$, 记 $Z=\pi^{-1}(Y)$.

(i) $CB\subseteq Z$. 事实上, 对任意的 $c\in C$, $b\in B$, $\pi(cb)=cb\overline{B}=c\overline{B}\in cY$.

(ii) Z 为 G 的不可约闭子集.

Z 为闭子集是显然的.

如果 Z 为可约的, 则必存在两个非空开集 Z_1,Z_2, 使 $Z_1\cap Z_2=\emptyset$. 因 π 为开映射, 故 $\pi(Z_1)$, $\pi(Z_2)$ 为 G/B 的非空开集, 当然也是 Y 的非空开集. 由 Y 的不可约性知 $\pi(Z_1)\cap\pi(Z_2)\neq\emptyset$. 设 $y\in\pi(Z_1)\cap\pi(Z_2)$, 则 $\pi^{-1}(y)$ 作为与 B 同构的簇也不可约. 显然 $Z_1\cap\pi^{-1}(y)$、$Z_2\cap\pi^{-1}(y)$ 皆为 $\pi^{-1}(y)$ 的非空开集, 故有非空交. 于是 $Z_1\cap Z_2\neq\emptyset$, 矛盾. 所以 Z 不可约.

(iii) $z\in Z \implies B\supseteq z^{-1}Sz$.

这是因为此时 $\pi(z)=z\overline{B}\in Y$, $zBz^{-1}\in\mathfrak{B}^S$, 得 $zBz^{-1}\supseteq S$, $B\supseteq z^{-1}Sz$.

(iv) $Z\subseteq N_G(S)B$.

记 $B_u=\{b\in B\mid b\text{ 为幂幺元}\}$, 它是 B 的正规连通闭子群. 对 $z\in Z$,

$$\begin{aligned}\varphi_z: S\longrightarrow\quad B\quad &\longrightarrow B/B_u\cong T\\ s\longmapsto z^{-1}sz&\longmapsto \overline{z}^{-1}\overline{sz}\end{aligned}$$

是态射. 因为 Z 连通, 由刚性定理 (定理 1.2.2), 对任意的 $z_1,z_2\in Z$, $\varphi_{z_1}=\varphi_{z_2}$. 特别, 因为 $\pi(e)=\overline{B}\in Y$, 可知 $e\in Z$. 所以对任意的 $z\in Z$ 有 $\varphi_e=\varphi_z$. 这样对 $s\in S$ 有 $\overline{s}=\varphi_e(s)=\varphi_z(s)=\overline{z}^{-1}\overline{sz}$, 即 $s\equiv z^{-1}sz\pmod{B_u}$. 因此对任意的 $z\in Z$ 有 $z^{-1}Sz\subseteq SB_u$.

又因 SB_u 可分解为 S 与 B_u 的半直积, 可解, 且 S 为 SB_u 的极大环面. 所以 S、$z^{-1}Sz$ 均为 SB_u 的极大环面. 因而存在 $v\in B_u$ 使 $v^{-1}z^{-1}Szv=S$, $zv\in N_G(S)$, $z\in N_G(S)B_u$, 证得 $Z\subseteq N_G(S)B_u\subseteq N_G(S)B$.

(5) G 可迁地作用在 Y 上, 即 $C \cdot B = Y$.

$CB \subseteq Z \subseteq N_G(S)B$, 但 $W(G,S)=N_G(S)/C$ 有限, 因此 $[N_G(S)B : CB] < \infty$. 由于 Z 连通, $Z \subseteq (N_G(S)B)^0 = N_G(S)^0B = C^0B = CB \subseteq Z$, 故 $Z = CB$, $Y = Z \cdot B = CB \cdot B = C \cdot B$. □

推论 2.2.3 设 $B \in \mathfrak{B}^S$,

$$C_B(S) = \{b \in B \mid bsb^{-1} = s\ \forall s \in S\} = C_G(S) \cap B,$$

则 $C_B(S)$ 为 $C = C_G(S)$ 的 Borel 子群.

证明 由于 $\overline{B} \in Y$, 且

$$C_B(S) = B \cap C = \{g \in G \mid g\overline{B} = \overline{B}\} \cap C = \{c \in C \mid c \cdot \overline{B} = \overline{B}\}.$$

所以 C 在 Y 上的自然作用诱导出 $C/C \cap B$ 在 Y 上的作用, 且由前者的可迁性推出后者的单可迁性. 所以 $C/C \cap B$ 与 Y 在态射 $\varphi : c(C \cap B) \mapsto c \cdot \overline{B}$ 下成双射对应. 且易证 φ 关于 C 的作用是等变的, 同时 $C/C \cap B$ 与 Y 皆不可约, 另外, $Y \subseteq X \subseteq G/B$, Y 作为射影簇 G/B 的闭子集也完备, 所以 $C/C \cap B$ 也完备. 又因 $C \cap B$ 可解, 由推论 2.1.2, $C \cap B$ 为 C 的 Borel 子群. □

推论 2.2.4 若 B' 为 C 的 Borel 子群, 则存在 $B \in \mathfrak{B}$ 使 $C \cap B = B'$.

证明 因为 B' 连通可解且 $B' \subseteq C \subseteq G$, 故存在 $B \in \mathfrak{B}$ 使 $B \supseteq B'$, 所以 $B' \subseteq B \cap C$. 另一方面, $B \cap C$ 连通可解, B' 是 C 的 Borel 子群, 因此 $B' \supseteq B \cap C$, 即 $B' = B \cap C$. □

2.2.2 正则环面

定义 2.2.1 设 S 为 G 的环面子群, 若 $\mathfrak{B}^S$ 有限, 则称 S 是**正则环面**, 否则, 称 S 为**奇异环面**.

命题 2.2.5 设 T 为 G 的极大环面, 则 T 正则.

证明 (1) 记 $C = C_G(T)$, 则 C 为连通幂零子群 (见 [169] p.137, 推论 21.4), 故存在 $B \in \mathfrak{B}$, 使 $B \supseteq C$. 现设 $B_1 \in \mathfrak{B}^T$, 则存在 $g \in G$, 使 $B_1 = gBg^{-1} \supseteq T$. 显然 T、gTg^{-1} 皆为 B_1 的极大环面, 所以存在 $b \in B_1$ 使 $T = (bg)T(bg)^{-1}$. 但 $C = C_G(T)$, 对任意的 $g \in G$ 有 $gCg^{-1} = C_G(gTg^{-1})$. 于是

$$(bg)C(bg)^{-1} = C_G(bgT(bg)^{-1}) = C_G(T) = C.$$

由 $B \supseteq C$ 知 $B_1 = gBg^{-1} \supseteq gCg^{-1}$. 因此 $B_1 \supseteq (bg)C(bg)^{-1} = C$, $B_1 \in \mathfrak{B}^C$, 可得 $\mathfrak{B}^T \subseteq \mathfrak{B}^C$. 但一般地, 由 $T \subseteq C$ 可得 $\mathfrak{B}^T \supseteq \mathfrak{B}^C$. 因此 $\mathfrak{B}^T = \mathfrak{B}^C$.

设 $W = W(G,T) = N_G(T)/C$, 其中 $N_G(T) = \{g \in G \mid gTg^{-1} \subseteq T\}$. $N_G(T)$ 以通常的方式作用在 $\mathfrak{B}$ 上, 且保持 $\mathfrak{B}^T$ 稳定. 因 $\mathfrak{B}^T = \mathfrak{B}^C$, C 在 $\mathfrak{B}^T$ 上的作用是平凡的. 故可定义 W 在 $\mathfrak{B}^T$ 上的作用: 对任意的 $w = nC \in W$, $B \in \mathfrak{B}^T$, 令

$$w \cdot B = nBn^{-1}.$$

因 $C \lhd N_G(T)$, 这样的定义是适当的.

(2) *W 在 $\mathfrak{B}^T$ 上的作用是单可迁的.*

i) 可迁性.

只要证: 对任意的 $B, B_1 \in \mathfrak{B}^T$, 总存在 $w \in W$, 使 $w \cdot B_1 = B$.

由 $B, B_1 \in \mathfrak{B}^T$ 可知存在 $g \in G$ 使 $B = gB_1g^{-1}$ 及 $T \subseteq B$, $T \subseteq B_1$. 因而 $gTg^{-1} \subseteq gB_1g^{-1} = B$, 故存在 $b \in B$, 使 $T = bgT(bg)^{-1}$, 于是 $bg \in N_G(T)$. 但 $bgB_1(bg)^{-1} = b(gB_1g^{-1})b^{-1} = bBb^{-1} = B$. 如取 $w = (bg)C \in W(G,T)$, 就有 $w \cdot B_1 = B$.

ii) 单性.

对任意的 $B \in \mathfrak{B}^T$, 设 $W_B = \{w \in W \mid w \cdot B = B\}$. 现只要证 $W_B = \{\bar{1}\}$ 即可.

若 $w = nC \in W_B$, 则 $nBn^{-1} = B$, $n \in N_G(B) = B$. 记 $N_B(T) = \{b \in B \mid bTb^{-1} \subseteq T\}$, $C_B(T) = \{b \in B \mid bt = tb \ \forall t \in T\}$, 则由命题 1.2.15 得 $N_G(T) = C_G(T)$.

显然由 $n \in N_B(T) = C_B(T) \subseteq C_G(T)$ 可以推出 $n \cdot C = 1 \cdot C$, 所以 $w = \bar{1}$, 即 $W_B = \{\bar{1}\}$.

(3) *T 正则.*

由 (2), $W = W(G,T)$ 在 $\mathfrak{B}^T$ 上的作用为单可迁的. 这说明 $|W| = |\mathfrak{B}^T|$. 但根据刚性定理, W 是有限集, 故 $\mathfrak{B}^T$ 也为有限集. 所以 T 正则. □

命题 2.2.6 *设 S 是 G 的环面子群, 则 S 正则当且仅当 $C_G(S)$ 可解.*

证明 沿用上面的符号, X 与 $\mathfrak{B}^S$ 在 G/B 与 $\mathfrak{B}$ 之间的映射 φ 下成双射对应. X 为射影簇 G/B 的闭子集. Y 为 X 的含 $\overline{B}$ 的不可约分支. 由推论 2.2.4, $C = C_G(S)$ 以 $C \cap B$ 为其 Borel 子群. 由命题 1.2.14 知 C 是连通的. 所以 S 正则当且仅当 $\mathfrak{B}^S$ 有限, 这等价于 $\dim X = 0$, 也等价于 $\dim Y = 0$. 但由命题 2.2.2, C 可迁地作用在 Y 上, 记 $y_0 = \overline{B} \in Y$, 则映射

$$\varphi_{y_0}: C \longrightarrow Y$$
$$c \longmapsto c \cdot y_0$$

为 C 到 Y 上的满态射, 且因如 $c\cdot y_0=y_0$, 则 $cBc^{-1}=B$, $c\in N_G(B)=B$, 于是 $C\cap B\supseteq\{c\in C\mid c\cdot y_0=y_0\}$. 而一般地, $C\cap B\subseteq\{c\in C\mid c\cdot y_0=y_0\}$ 成立, 因此

$$C\cap B=\{c\in C\mid c\cdot y_0=y_0\}=\varphi_{y_0}^{-1}(y_0).$$

由 Y 作为 C 轨道的光滑性知:

$$\dim Y=\dim C-\dim C\cap B.$$

所以

$$S\text{ 正则}\iff\dim C-\dim C\cap B=0\iff C=C\cap B\iff C\text{ 可解}.\quad\square$$

推论 2.2.7　设 S 为 G 的正则环面, 则 $\bigcap_{B\in\mathfrak{B}^S}B\supseteq C_G(S)$.

证明　记 $C=C_G(S)$. 现只要证: 若 $B\in\mathfrak{B}^S$ 必有 $B\supseteq C$.

因 S 正则, 故 C 可解. 由推论 2.2.3, 对任意的 $B\in\mathfrak{B}^S$, $C\cap B$ 是 C 的 Borel 子群. 由 $C=C\cap B$ 即可得到 $B\supseteq C$. □

推论 2.2.8　设 T 为 G 的极大环面, S 为 G 的正则环面, $S\subseteq T$, 则 $\mathfrak{B}^T=\mathfrak{B}^S$.

证明　记 $C=C_G(S)$, 由推论 2.2.7 知: $\mathfrak{B}^S=\mathfrak{B}^C$. 由 $S\subseteq T\subseteq C$ 可知 $\mathfrak{B}^S\supseteq\mathfrak{B}^T\supseteq\mathfrak{B}^C=\mathfrak{B}^S$, 因此 $\mathfrak{B}^T=\mathfrak{B}^S$. □

2.2.3　奇异环面

令 T 为 G 的极大环面, 设 $I(T)=\left(\bigcap_{B\in\mathfrak{B}^T}B\right)^0$, $\Psi=\Phi(G/I(T),T)$, 即

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{L}(I(T))\bigoplus_{\alpha\in\Psi}\mathfrak{g}'_\alpha,$$

其中 $\mathfrak{g}_\alpha=\mathfrak{g}'_\alpha\oplus\mathfrak{h}_\alpha$, $\mathfrak{L}(I(T))=\mathfrak{L}(I(T))_0\bigoplus\mathfrak{h}_\alpha$.

命题 2.2.9　设 S 为 G 的环面子群, T 是包含 S 的极大环面. 则 S 奇异当且仅当存在 $\alpha\in\Psi$, 使 $S\subseteq T_\alpha$, 其中 $T_\alpha=(\operatorname{Ker}\alpha)^0$, $\dim T_\alpha=\dim T-1$.

证明　必要性. S 奇异, 故 $C_G(S)$ 不可解. 所以存在极大环面 $T\supseteq S$. 显然, $I(T)$ 可解. 因 C 连通, $\dim C\gneqq\dim(C\cap I(T))$. 据命题 1.2.16,

$$\mathfrak{L}(C\cap I(T))=\mathfrak{L}(C_{I(T)}(S))=C_{\mathfrak{L}(I(T))}(S)=C_{\mathfrak{g}}(S)\cap\mathfrak{L}(I(T)),$$

但

$$\dim C_{\mathfrak{g}}(S)=\dim C\gneqq\dim(C\cap I(T))=\dim(C_{\mathfrak{g}}(S)\cap\mathfrak{L}(I(T))),$$

所以

$$C_{\mathfrak{g}}(S)=\{X\in\mathfrak{g}\mid \mathrm{Ad}(s)X=X,\ \forall s\in S\}\not\subseteq\mathfrak{L}(I(T)),$$

即存在 $X\in C_{\mathfrak{g}}(S)\setminus\mathfrak{L}(I(T))$. 因为

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{L}(I(T))\bigoplus_{\alpha\in\Psi}\mathfrak{g}'_\alpha,$$

所以可写 $X=y+\sum_{\alpha\in\Psi}X_\alpha$, 其中 $y\in\mathfrak{L}(I(T))$, $X_\alpha\in\mathfrak{g}'_\alpha$, 且必存在一个 $\alpha_0\in\Psi$ 使 $X_{\alpha_0}\neq 0$. 对任意的 $s\in S$, 有

$$X=\mathrm{Ad}(s)X=\mathrm{Ad}(s)\left(y+\sum_{\alpha\in\Psi}X_\alpha\right)=\mathrm{Ad}(s)y+\sum_{\alpha\in\Psi}\mathrm{Ad}(s)X_\alpha.$$

因此

$$\sum_{\alpha\in\Psi}X_\alpha=\sum_{\alpha\in\Psi}\mathrm{Ad}(s)X_\alpha=\sum_{\alpha\in\Psi}\alpha(s)X_\alpha.$$

于是对任意的 $s\in S$ 有 $\alpha_0(s)X_{\alpha_0}=X_{\alpha_0}$, 即 $\alpha_0(s)=1\ \forall s\in S$, $S\subseteq\mathrm{Ker}\,\alpha_0$. 特别因为 S 是连通子群, $S\subseteq(\mathrm{Ker}\,\alpha_0)^0=T_{\alpha_0}$.

充分性. 只要证 $S\subseteq T_\alpha$ 及 S 正则不能同时成立.

由 $S\subseteq T_\alpha$ 可得 $C_G(S)\supseteq C_G(T_\alpha)$, $C_{\mathfrak{g}}(S)\supseteq\mathfrak{g}'_\alpha$. 设 T 为 G 的含 S 的极大环面, 因 S 正则, 由推论 2.2.8,

$$\mathfrak{B}^{C_G(S)}=\mathfrak{B}^S=\mathfrak{B}^T.$$

所以

$$C_G(S)\subseteq\left(\bigcap_{B\in\mathfrak{B}^{C_G(S)}}B\right)^0=\left(\bigcap_{B\in\mathfrak{B}^T}B\right)^0=I(T),$$

从而

$$C_{\mathfrak{g}}(S)=\mathfrak{L}(C_G(S))\subseteq\mathfrak{L}(I(T)).$$

但 $\mathfrak{g}'_\alpha\subseteq C_{\mathfrak{g}}(S)$, 导致 $\left(\sum_{\alpha\in\Psi}\mathfrak{g}'_\alpha\right)\cap\mathfrak{L}(I(T))\supsetneqq\{0\}$, 这与直和分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{L}(I(T))\bigoplus_{\alpha\in\Psi}\mathfrak{g}'_\alpha$ 矛盾. □

2.2.4 秩

定义 2.2.2 设 T 为代数群 G 的极大环面, 称 $\dim T$ 为 G 的**秩**, 记为 $\operatorname{rank} G$.

因 G 的所有极大环面在 G 中共轭, 故具有相同的维数, 所以这样定义的 G 的秩是有意义的.

命题 2.2.10 设 T 为 G 的极大环面, $\alpha \in \Psi$, $T_\alpha = (\operatorname{Ker}\alpha)^0 \subseteq T$, $Z_\alpha = C_G(T_\alpha)$, $G_\alpha = Z_\alpha/R(Z_\alpha)$, 则 $\operatorname{rank}(G_\alpha) = 1$.

证明 因为

$$T_\alpha \subseteq C_{Z_\alpha}(Z_\alpha)^0 \subseteq R(Z_\alpha),$$

所以对自然态射 $\pi : Z_\alpha \to G_\alpha = Z_\alpha/R(Z_\alpha)$, $\pi(T_\alpha) = \bar{0}$, 又因 $\dim T_\alpha + 1 = \dim T$, $\pi(T)$ 是 G_α 的极大环面 (命题 2.1.8), 所以 $\dim \pi(T) \leqslant 1$.

又因 T_α 奇异, $Z_\alpha = C_G(T_\alpha)$ 不可解, 故 $G_\alpha = Z_\alpha/R(Z_\alpha)$ 为连通不可解代数群. 因此 G_α 有非平凡半单元, 由推论 1.2.6, 它被包含在 G_α 的某个极大环面 $\overline{T'}$ 中, 显然 $\dim \pi(T) = \dim \overline{T'} \geqslant 1$. 所以 $\dim \pi(T) = 1$, 即 $\operatorname{rank} G_\alpha = 1$. □

2.3 单参数群的作用

2.3.1 单参数子群

定义 2.3.1 设 T 是一个环面, 同态 $\lambda : \mathrm{GL}(1) \to T$ 称为 T 的**单参数子群**, 记 $Y(T) = \{\lambda : \mathrm{GL}(1) \to T \text{ 是同态}\}$.

对 $\mu, \lambda \in Y(T)$, 定义 $(\mu + \lambda)(t) = \mu(t)\lambda(t)$ 对 $t \in \mathrm{GL}(1)$. 这样 $Y(T)$ 成为一个 $\mathbb{Z}$ 模.

命题 2.3.1 $X(T)$ 和 $Y(T)$ 互相对偶, 亦即存在非退化双 $\mathbb{Z}$ 线性映射 $\langle\cdot,\cdot\rangle : X(T) \times Y(T) \to \mathbb{Z}$.

证明 (1) 对 $\chi \in X(T)$, $\lambda \in Y(T)$, 显然 $\chi \circ \lambda \in X(\mathrm{GL}(1))$, 这里 $\chi \circ \lambda : \mathrm{GL}(1) \xrightarrow{\lambda} T \xrightarrow{\chi} \mathrm{GL}(1)$.

(2) 对 $\varphi \in X(\mathrm{GL}(1))$, 设 $k[\mathrm{GL}(1)] = k[T_1, T_2]/(T_1T_2 - 1) = k[T, T^{-1}]$, 其中 $T_1 = T$, $T_2 = T^{-1}$. 则像命题 1.1.3(2) 一样, 可以证明存在 $m \in \mathbb{Z}$, 使 $\varphi^*(T) = T^m$, 即对 $a \in \mathrm{GL}(1)$, $\varphi(a) = a^m$, 这时便设 $\mathrm{d}(\varphi) = m$. 显然

$$\begin{aligned} \mathrm{d} : X(\mathrm{GL}(1)) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \varphi &\longmapsto m \end{aligned}$$

是一个双射.

(3) 由 (2) 得

$$\begin{aligned} X(T) \times Y(T) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (\chi, \lambda) &\longmapsto \langle \chi, \lambda \rangle = m, \end{aligned}$$

这里 $\chi\lambda(t) = t^m \ \forall t \in \mathrm{GL}(1)$. 显然, 如此定义的 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是双 $\mathbb{Z}$ 线性映射.

(4) 由 $X(T)$ 是无挠模, 可设 $\chi_1, \cdots, \chi_r$ 是 $X(T)$ 的基. 令 $\lambda_j \in Y(T)$ 使 $\langle \chi_i, \lambda_j \rangle = \delta_{ij}$, $1 \leqslant i, j \leqslant r$. 若 $\chi = \sum_{i=1}^r a_i \chi_i \in X(T)$ 对任意的 $\lambda \in Y(T)$ 满足 $\langle \chi, \lambda \rangle = 0$, 则对 $1 \leqslant j \leqslant r$ 有 $\langle \chi, \lambda_j \rangle = a_j = 0$. 因此 (3) 中定义的双 $\mathbb{Z}$ 线性映射 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是非退化的. □

2.3.2　单参数群在 $\mathbb{P}(V)$ 上的作用

考虑关于 GL(1) 作用在 $\mathbb{P}(V)$ 上的问题.

对环面 $T \subseteq \mathrm{GL}(V)$, 存在 $v_1, \cdots, v_n$, 它们是 V 的基, 也是 T 的特征向量. 于是, 存在 $\gamma_1, \cdots, \gamma_n \in X(T)$, 使得任意的 $t \in T$ 可以写成

$$t = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) & & & \\ & \gamma_2(t) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \gamma_n(t) \end{pmatrix}.$$

这样, 对 $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i \in V$, 即有 $t \cdot v = \sum_{i=1}^n a_i \gamma_i(t) v_i$.

由 2.3.1 节, 我们可得

$$\begin{aligned} Y(T) &\longrightarrow \mathbb{Z}^n \\ \lambda &\longmapsto (m_1, m_2, \cdots, m_n), \end{aligned}$$

其中 $m_i = \langle \gamma_i, \lambda \rangle$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

GL(1) 透过 λ 作用在 V 上.

对 $t \in \mathrm{GL}(1)$, $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i \in V$. 定义

$$\begin{aligned} t \cdot v = \lambda(t) v &= \sum_{i=1}^n a_i \gamma_i(\lambda(t)) v_i \\ &= \sum_{i=1}^n a_i t^{\langle \gamma_i, \lambda \rangle} v_i = \sum_{i=1}^n a_i t^{m_i} v_i. \end{aligned}$$

把 $\mathbb{P}^1$ 作用在 $\mathbb{P}(V)$ 上.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^1 &= \{(a_0,a_1) \mid (a_0,a_1) \neq (0,0)\} \\ &= \{(a_0,a_1) \mid a_1 \neq 0\} \cup \{(a_0,a_1) \mid a_0 \neq 0\} \\ &= U_0 \cup U^0,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}U_0 &= \{(a_0,a_1) \mid a_0a_1 \neq 0\} \cup \{(0,a_1) \mid a_1 \neq 0\} \\ &= k^* \cup \{0\}, \\ U^0 &= \{(a_0,a_1) \mid a_0a_1 \neq 0\} \cup \{(a_0,0) \mid a_0 \neq 0\} \\ &= k^* \cup \{\infty\}.\end{aligned}$$

显然, $U_0 \cap U^0 = k^*$.

对任意取定的 $v = \sum_{i=1}^n a_iv_i \in V$, $v \neq 0$, 记 $I = \{i \mid a_i \neq 0\}$, $m^0 = \max_{i\in I}(m_i)$, $m_0 = \min_{i\in I}(m_i)$, $I_0 = \{i \mid m_i = m_0\}$, $I^0 = \{i \mid m_i = m^0\}$, 显然, $[v] = [t^{-m_0}v] = [t^{-m^0}v]$. 我们定义

$$\begin{aligned}\lambda_0 : U_0 &\longrightarrow \mathbb{P}(V) \\ 0 \neq t &\longmapsto \left[\textstyle\sum_{i=1}^n a_it^{m_i-m_0}v_i\right], \\ 0 &\longmapsto \left[\textstyle\sum_{i\in I_0} a_iv_i\right], \\ \lambda^0 : U^0 &\longrightarrow \mathbb{P}(V) \\ \infty \neq t &\longmapsto \left[\textstyle\sum_{i=1}^n a_it^{m_i-m^0}v_i\right], \\ \infty &\longmapsto \left[\textstyle\sum_{i\in I^0} a_iv_i\right].\end{aligned}$$

对 $t \in \mathrm{GL}(1) = k^* = U_0 \cap U^0$, 有

$$\begin{aligned}\lambda_0(t)[v] &= \left[\sum_{i=1}^n a_it^{m_i-m_0}v_i\right] = \left[t^{-m_0}\left(\sum_{i=1}^n a_it^{m_i}v_i\right)\right] \\ &= [t^{-m_0}\lambda(t)v] = [\lambda(t)v], \\ \lambda^0(t)[v] &= \left[\sum_{i=1}^n a_it^{m_i-m^0}v_i\right] = \left[t^{-m^0}\left(\sum_{i=1}^n a_it^{m_i}v_i\right)\right] \\ &= [t^{-m^0}\lambda(t)v] = [\lambda(t)v].\end{aligned}$$

所以 $\lambda_0(t) = \lambda^0(t)$.

把 λ_0, λ^0 合起来记作 $\lambda_v : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}(V)$.

命题 2.3.2 设 $T\subseteq \mathrm{GL}(V)$ 为环面, $\lambda\in Y(T)$, 则

(1) $\mathrm{GL}(1)$ 透过 λ 作用在 $\mathbb{P}(V)$ 上.

(2) 对任意的 $[v]\in\mathbb{P}(V)$, $\lambda(0)[v],\lambda(\infty)[v]\in {}^{\lambda}\mathbb{P}(V)=\{[v]\in\mathbb{P}(V)\mid \lambda(t)\cdot[v]=[v],\ \forall t\in\mathrm{GL}(1)\}$, 其中 $\lambda(0)[v]=\lambda_v(0)$, $\lambda(\infty)[v]=\lambda_v(\infty)$.

(3) $[v]\in{}^{\lambda}\mathbb{P}(V)$ 当且仅当 $\lambda(0)[v]=\lambda(\infty)[v]$.

(4) 若 $[v]\notin{}^{\lambda}\mathbb{P}(V)$, 则对任意的 $t\neq 0,\infty$ 有 $\lambda(t)[v]\notin{}^{\lambda}\mathbb{P}(V)$.

(5) 若从 $\gamma_i\neq\gamma_j$ 可得 $m_i\neq m_j$, 则 ${}^{T}\mathbb{P}(V)={}^{\lambda}\mathbb{P}(V)$.

证明 (1) 显然可定义:

$$\begin{aligned}\mathrm{GL}(1)\times\mathbb{P}(V)&\longrightarrow\mathbb{P}(V)\\(t,[v])&\longmapsto\lambda(t)\cdot[v]=[\lambda(t)\cdot v].\end{aligned}$$

(2) 对任意的 $t\in\mathrm{GL}(1)$ 及 $[v]\in\mathbb{P}(V)$,

$$\begin{aligned}\lambda(t)\cdot\lambda(0)[v]&=\lambda(t)\cdot\left[\sum_{i\in I_0}a_iv_i\right]=\left[\sum_{i\in I_0}a_it^{m_i}v_i\right]\\&=\left[t^{m_0}\sum_{i\in I_0}a_iv_i\right]=\left[\sum_{i\in I_0}a_iv_i\right]=\lambda(0)[v],\\\lambda(t)\cdot\lambda(\infty)[v]&=\lambda(t)\cdot\left[\sum_{i\in I^0}a_iv_i\right]=\left[\sum_{i\in I^0}a_it^{m_i}v_i\right]\\&=\left[t^{m^0}\sum_{i\in I^0}a_iv_i\right]=\left[\sum_{i\in I^0}a_iv_i\right]=\lambda(\infty)[v].\end{aligned}$$

所以 $\lambda(0)[v],\lambda(\infty)[v]\in{}^{\lambda}\mathbb{P}(V)$.

(3) $[v]\in{}^{\lambda}\mathbb{P}(V)$ 等价于对任意的 $t\in\mathrm{GL}(1)$ 有 $\lambda(t)[v]=[v]$, 即 $[\sum_{i=1}^n a_it^{m_i}v_i]=[\sum_{i=1}^n a_iv_i]$. 这等价于 $m^0=m_0$, 即 $I_0=I^0=I$, 这又等价于 $[\sum_{i\in I_0}a_iv_i]=[\sum_{i\in I^0}a_iv_i]$, 即 $\lambda(0)[v]=\lambda(\infty)[v]$.

(4) 用反证法. 若 $[v]\notin{}^{\lambda}\mathbb{P}(V)$, 且存在 $t\neq 0,\infty$ 使 $\lambda(t)[v]\in{}^{\lambda}\mathbb{P}(V)$, 则对任意的 $t'\in\mathrm{GL}(1)$,

$$\begin{aligned}\lambda(t')[v]&=[\lambda(t')v]=[\lambda(t')\lambda(t)^{-1}\lambda(t)v]\\&=[\lambda(t)^{-1}\lambda(t')\lambda(t)v]=\lambda(t)^{-1}(t'\cdot[\lambda(t)v])\\&=\lambda(t)^{-1}\cdot[\lambda(t)v]=[\lambda(t)^{-1}\lambda(t)v]=[v].\end{aligned}$$

于是 $[v]\in{}^{\lambda}\mathbb{P}(V)$, 与 $[v]\notin{}^{\lambda}\mathbb{P}(V)$ 矛盾.

(5) 不失一般性, 可把 $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_n\}$ 排成:

$$\gamma_{11} = \gamma_{12} = \cdots = \gamma_{1l_1},$$
$$\gamma_{21} = \gamma_{22} = \cdots = \gamma_{2l_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\gamma_{k1} = \gamma_{k2} = \cdots = \gamma_{kl_k}.$$

把 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ 也作相应排列, 于是 $[v] \in {}^T\mathbb{P}(V)$ 等价于对任意的 $t \in T$ 有 $t \cdot [v] = [v]$, 即 $\left[\sum_{i,j} a_{ij}\gamma_{ij}(t)v_{ij}\right] = \left[\sum_{i,j} a_{ij}v_{ij}\right]$. 后者等价于存在 i, $1 \leqslant i \leqslant k$, 使 $[v] = \left[\sum_{j=1}^{l_i} a_{ij}v_{ij}\right]$. 这又等价于对任意的 $s \in \mathrm{GL}(1)$, $\left[\sum_{i,j} a_{ij}s^{m_{ij}}v_{ij}\right] = \left[\sum_{i,j} a_{ij}v_{ij}\right]$, 即 $s \cdot [v] = [v]$, 也就是说 $[v] \in {}^\lambda\mathbb{P}(V)$. □

2.3.3 环面在射影簇上的固定点

定理 2.3.3 若环面 $T \subseteq \mathrm{GL}(V)$ 作用在 $X \subseteq \mathbb{P}(V)$ 上, 其中 X 为不可约闭子集, X 不是 $\mathbb{P}(V)$ 的任何超平面的子集, 则

(1) 若 $\dim X \geqslant 1$, 则 $|{}^TX| \geqslant 2$.

(2) 若 $\dim X \geqslant 2$, 则 $|{}^TX| \geqslant 3$.

证明 取 V 的基 $v_1, \cdots, v_n$, 使得对任意的 $t \in T$,

$$t = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) & & & \\ & \gamma_2(t) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \gamma_n(t) \end{pmatrix},$$

其中 $\gamma_1, \cdots, \gamma_n \in X(T)$.

由于 $\langle \cdot, \cdot \rangle : X(T) \times Y(T) \to \mathbb{Z}$ 是非退化的, 存在 $\lambda \in Y(T)$, 使 $\gamma_i \neq \gamma_j$ 可以导出 $m_i \neq m_j$.

(1) 因为 $\dim X \geqslant 1$, 所以 X 是无限的.

(i) 若 ${}^TX = \{x \in X \mid t \cdot x = x, \forall t \in T\} = X$, 则 $|{}^TX| \geqslant 2$.

(ii) 若 ${}^TX \neq X$, 则存在 $[v_1] \in X \setminus {}^TX \subseteq \mathbb{P}(V)$. 不妨设 $m_1 = m^0 \geqslant m_2 \geqslant \cdots \geqslant m_n$. 因 ${}^T\mathbb{P}(V) = {}^\lambda\mathbb{P}(V)$, 还可设 $T = \lambda(\mathrm{GL}(1))$.

由 $[v_1] \notin {}^\lambda X$, 故 $\lambda(0)[v_1] \neq \lambda(\infty)[v_1]$. 又因 $[v_1] \in \mathbb{P}(V)$, $\lambda(0)[v_1]$, $\lambda(\infty)[v_1] \in {}^\lambda\mathbb{P}(V)$.

考虑 $k^* = \mathrm{GL}(1)$ 作用在 X 上, 对 $t \in \mathrm{GL}(1)$, $[v] \in X$, 即有 $\lambda(t)[v] \in X$. 于是对任意的 $t \in U_0 \setminus \{0\}$, 有 $\lambda(t)[v] \in X$, 即 $\{\lambda(t)[v] \mid t \in U_0 \setminus \{0\}\} \subseteq X$. 又因 X 是闭集, 所以 $\lambda(0)[v] \in X$. 同理, $\lambda(\infty)[v] \in X$. 故 $|^T X| \geqslant 2$.

(2) 因为 $\dim X \geqslant 2$, 所以 X 是无限的.

(i) 若 $^T X = X$, 则显然 $|^T X| \geqslant 3$.

(ii) 若 $^T X \neq X$, 则不妨设 $T = \lambda(\mathrm{GL}(1))$, $m_1 = m^0 \geqslant m_2 \geqslant \cdots \geqslant m_n$, $W = \langle v_2, \cdots, v_n \rangle$. $X \cap \mathbb{P}(W) = Y_1 \cup \cdots \cup Y_r$, 其中 Y_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, 为连通分支. $\dim Y_i = \dim X - 1$, T 作用在 Y_i 上, 记 $Y = Y_1$. 因 $X \not\subseteq \mathbb{P}(W)$, $X \cap \mathbb{P}(W) \neq X$. 存在 $[v] \in X$, $[v] \notin \mathbb{P}(W)$, 即 $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$, $a_1 \neq 0$. 因为 $\lambda(\infty)[v] = \left[\sum_{i \in I^0} a_i v_i\right]$, $1 \in I^0$, 所以 $\lambda(\infty)[v] \in {}^T X \setminus \mathbb{P}(W)$, $\lambda(\infty)[v] \notin {}^T Y$, 故 $|^T X| \geqslant |^T Y| + 1 \geqslant 2 + 1 = 3$. □

2.3.4 正则单参数子群

设 T 是 G 的一个极大环面, T 作用在 $X = G/B$ 上.

定义 2.3.2 设 $\lambda \in Y(T)$, $^\lambda X = \{x \in X \mid \lambda(t) \cdot x = x\}$, 如果 $|^\lambda X| < \infty$, 则称 λ 是正则的.

命题 2.3.4 若 $\lambda \in Y(T)$ 是正则的, 则

(1) V 有基 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ 使 T 对角化, 即对 $t \in T$,

$$t = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) & & & \\ & \gamma_2(t) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \gamma_n(t) \end{pmatrix},$$

其中 $\gamma_1, \cdots, \gamma_n \in X(T)$.

(2) $m_1 > m_2 \geqslant \cdots \geqslant m_n$, 即 $I^0 = \{1\}$.

证明 (1) 显然.

(2) 设 $m^0 = m_1 = \cdots = m_r > m_{r+1} \geqslant \cdots \geqslant m_n = m_0$, $W = \langle v_2, \cdots, v_n \rangle$. 则由 $X \not\subseteq \mathbb{P}(W)$ 可得存在 $[v] = [\sum_{i=1}^n a_i v_i] \in X$, $a_1 \neq 0$, 于是 $\lambda(\infty)[v] = [\sum_{i=1}^r a_i v_i] \in {}^\lambda X$.

我们断言 $r = 1$, 即 $I^0 = \{1\}$. 否则, 若 $r > 1$, 则因

$$X \notin \mathbb{P}(W) \bigcup_{\text{有限个 } b_j} \left\{ [v] \in \mathbb{P}(V) \middle| v = \sum a_i v_i, \frac{a_2}{a_1} = b_j \right\},$$

X 含无限个 $[v'] = [v_1 + b v_2 + \cdots]$ 使 b 互异. 因此 $^\lambda X$ 有无限个 $\lambda(\infty)[v']$, 与 λ 正则的假设矛盾. □

命题 2.3.5 若 λ 正则, 则存在唯一的 $x_\lambda \in {}^\lambda X$ 及 x_λ 的邻域 U, 使得

(1) 对任意的 $x \in U$, $\lambda(\infty)x = x_\lambda$,

(2) $\dim(X - U) = \dim X - 1$,

(3) 存在超平面 $H \subseteq \mathbb{P}(V)$, 使 $U = X - (X \cap H)$.

证明 利用命题 2.3.4 的证明, 取 $x_\lambda = [v_1]$, $U = X - (X \cap \mathbb{P}(W))$, 有关条件显然满足. □

2.3.5 Weyl 房

记 $Y(T)_{\text{reg}} = \{\lambda \in Y(T) \mid \lambda \text{ 正则}\}$. 这样

$$\begin{array}{ccccc} Y(T)_{\text{reg}} & \longrightarrow & {}^T(G/B) & \longleftrightarrow & \mathfrak{B}^T \\ \lambda & \longmapsto & x_\lambda & \longleftrightarrow & x_\lambda B x_\lambda^{-1}, \end{array}$$

其中 x_λ 由命题 2.3.5 确定. 所以有映射

$$\begin{aligned} \mathscr{B} : Y(T)_{\text{reg}} &\longrightarrow \mathfrak{B}^T \\ \lambda &\longmapsto \mathscr{B}(\lambda) = x_\lambda B x_\lambda^{-1}. \end{aligned}$$

对于 $B' \in \mathfrak{B}^T$, 记

$$\mathfrak{C}(B') = \mathscr{B}^{-1}(B') = \{\lambda \in Y(T)_{\text{reg}} \mid \mathscr{B}(\lambda) = B'\},$$

称为 Weyl 房 (Weyl chamber). 记 $\mathfrak{C}_G = \{\mathfrak{C}(B') \mid B' \in \mathfrak{B}^T\}$. 我们知道, $|\mathfrak{C}_G| < \infty$.

$W = W(G,T) = N_G(T)/C_G(T)$ 在 $\mathfrak{B}^T$ 和 $Y(T)$ 上的作用为

$$\begin{aligned} &w \cdot B' = nB'n^{-1}, \\ &w \cdot \lambda = \operatorname{Int}(n)\lambda, \text{ 即 } (w \cdot \lambda)(t) = n\lambda(t)n^{-1}, \end{aligned}$$

其中 $w = nC_G(T) \in W$, $B' \in \mathfrak{B}^T$, $\lambda \in Y(T)$, $t \in \mathrm{GL}(1)$.

命题 2.3.6 (1) 下图交换:

$$\begin{array}{ccc} Y(T)_{\text{reg}} & \xrightarrow{\mathscr{B}} & \mathfrak{B}^T \\ {\scriptstyle w}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle w} \\ Y(T)_{\text{reg}} & \xrightarrow{\mathscr{B}} & \mathfrak{B}^T \end{array}$$

即 $w \cdot \mathscr{B}(\lambda) = \mathscr{B}(w \cdot \lambda)$.

(2) $\mathscr{B}$ 为满映射.

(3) W 在 $\mathfrak{C}$ 上是单可迁作用的.

证明 (1) 根据下图

$$\begin{array}{ccccc} Y(T)_{\text{reg}} & \longrightarrow & {}^{T}(G/B) & \longleftrightarrow & \mathfrak{B}^T \\ \lambda & \longmapsto & x_\lambda & \longleftrightarrow & \mathscr{B}(\lambda) = x_\lambda B x_\lambda^{-1}, \end{array}$$

对于 $\lambda \in Y(T)_{\text{reg}}$,

$$\begin{aligned} \lambda_v : \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \quad \mathbb{P}(V) \\ t &\longmapsto \quad \lambda(t)[v], \\ w \cdot \lambda_v : \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \quad \mathbb{P}(V) \\ t &\longmapsto n\lambda(t)n^{-1}[v]. \end{aligned}$$

我们知道, 对任意的 $y \in U$, $\lambda(\infty)y = x_\lambda$, 则对任意的 $x \in nU$, 有 $y \in U$, 使 $x = ny$,

$$(w \cdot \lambda)(\infty)x = n\lambda(\infty)n^{-1}ny = n\lambda(\infty)y = nx_\lambda,$$

也就是说

$$\mathscr{B}(w \cdot \lambda) = (nx_\lambda)B(nx_\lambda)^{-1} = n(x_\lambda B x_\lambda^{-1})n^{-1}.$$

根据 ${}^{T}(G/B)$ 与 $\mathfrak{B}^T$ 之间的双射对应关系:

$$\begin{array}{ccc} {}^{T}(G/B) & \longleftrightarrow & \mathfrak{B}^T \\ x_\lambda & \longleftrightarrow & \mathscr{B}(\lambda) = x_\lambda B x_\lambda^{-1}, \\ nx_\lambda & \longleftrightarrow & n\mathscr{B}(\lambda)n^{-1} = w \cdot \mathscr{B}(\lambda), \end{array}$$

可得

$$\mathscr{B}(w \cdot \lambda) = n\mathscr{B}(\lambda)n^{-1} = w \cdot \mathscr{B}(\lambda),$$

即所给的图交换.

(2) 对 $\lambda \in Y(T)_{\text{reg}}$, 由于 W 在 $\mathfrak{B}^T$ 上的作用是单可迁的,

$$\mathscr{B}(Y(T)_{\text{reg}}) \supseteq \mathscr{B}(W \cdot \lambda) = W \cdot \mathscr{B}(\lambda) = \mathfrak{B}^T,$$

所以 $\mathscr{B}$ 是满映射.

(3) 因为 $\lambda, \lambda' \in \mathfrak{C}(B') \in \mathfrak{C}$, 故 $w \cdot \lambda, w \cdot \lambda' \in \mathfrak{C}(w \cdot B')$. 由 $\mathscr{B}(\lambda) = \mathscr{B}(\lambda') = B'$, $w \in W$, 得 $\mathscr{B}(w \cdot \lambda) = w \cdot \mathscr{B}(\lambda) = w \cdot B' = w \cdot \mathscr{B}(\lambda') = \mathscr{B}(w \cdot \lambda')$, 所以 $w \cdot \mathfrak{C}(B') = \mathfrak{C}(w \cdot B')$. 即下图交换.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{C} & \longleftrightarrow & \mathfrak{B}^T \\ W \updownarrow & & \updownarrow W \\ \mathfrak{C} & \longleftrightarrow & \mathfrak{B}^T \end{array}$$

□

命题 2.3.7　对任意一个 $\lambda_0 \in Y(T)_{\text{reg}}$ 可以找到一组 $\{\beta_i\} \subseteq X(T/T \cap R(G))\backslash\{0\}$ 使得: $\mathscr{B}(\lambda_0) = \mathscr{B}(\lambda')$ $(\lambda' \in Y(T)_{\text{reg}})$ 当且仅当对所有的 i, $\langle\beta_i, \lambda'\rangle > 0$.

证明　由命题 2.3.4, 对 λ_0 可以找到 $\gamma_1, \cdots, \gamma_n \in X(T)$, 使

$$m_1 = \langle\gamma_1, \lambda_0\rangle > m_2 = \langle\gamma_2, \lambda_0\rangle \geqslant \cdots \geqslant m_n = \langle\gamma_n, \lambda_0\rangle$$

及

$$\mathbb{P}(V) \supseteq X \longleftrightarrow \quad \mathfrak{B}$$
$$[v_1] = x_\lambda \longleftrightarrow \mathfrak{B}(\lambda_0).$$

现对 λ' 作如同命题 2.3.4 中的证明, 即得

存在 i, 使

$$m'_i = \langle\gamma_i, \lambda'\rangle > m'_j = \langle\gamma_j, \lambda'\rangle, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n, j \neq i,$$

及

$$x_{\lambda'} = [v_i] \longleftarrow \mathscr{B}(\lambda').$$

$\mathscr{B}(\lambda_0) = \mathscr{B}(\lambda')$ 等价于 $x_{\lambda_0} = x_{\lambda'}$, 等价于 $[v_1] = [v_i]$, 等价于 $i = 1$, 等价于 $m'_1 > m'_j$, $2 \leqslant j \leqslant m$, 等价于 $\langle\gamma_1, \lambda'\rangle > \langle\gamma_j, \lambda'\rangle$, 等价于 $\langle\gamma_1 - \gamma_j, \lambda'\rangle > 0$.

于是我们取 $\beta_j = \gamma_1 - \gamma_j$, 因 $m'_1 > m'_j$, 所以 $\beta_j \neq 0$. 令 $\beta_j \in X(T)$. 再证 $\beta_j|_{T\cap R(G)} = 0$, $2 \leqslant j \leqslant n$.

这是因为对任何 $\lambda \in Y(T\cap R(G))$, 有 $\lambda(\mathrm{GL}(1))\cdot\overline{B} = \overline{B}$ 对任意的 $\overline{B} \in G/B$, 这等价于 $\lambda(0)B = \lambda(\infty)B$, 等价于 $m_0 = m^0$, 等价于 $\langle\gamma_1, \lambda\rangle = \langle\gamma_2, \lambda\rangle = \cdots = \langle\gamma_n, \lambda\rangle$, 等价于 $\langle\beta_j, \lambda\rangle = 0$, $2 \leqslant j \leqslant n$.

由 $\lambda \in Y(T \cap R(G))$ 的任意性及 $X(T \cap R(G))$ 与 $Y(T \cap R(G))$ 的对偶性, 另外, 对偶 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是非退化的, 因此得 $\beta_j|_{T\cap R(G)} = 0$.

于是, $\beta_j \in X(T/T \cap R(G)) \setminus \{0\}$. □

命题 2.3.8　若 $B' \in \mathfrak{B}^T$, 则存在 $\{\beta_i\} \subseteq X(T/T \cap R(G)) \setminus \{0\}$ 使

$$\mathfrak{C}(B') = \{\lambda \in X(T)_{\text{reg}} \mid \langle\beta_i, \lambda\rangle > 0,\ \forall i\}.$$

证明　由于

$$\mathfrak{C}(B') = \{\lambda \in X(T)_{\text{reg}} \mid \mathscr{B}(\lambda) = B'\},$$

及存在 $\lambda_0 \in X(T)_{\text{reg}}$ 使 $B' = \mathscr{B}(\lambda_0)$. 直接用上面的命题 2.3.7 即得结论. □

2.4 半单秩为 1 的群

定义 2.4.1 G 为连通代数群, 若 $\mathrm{rank}(G/R(G))=1$, 则说 G 的半单秩是 1.

据命题 2.2.10, Z_α 的半单秩是 1. 我们将会看到 G 是由这些 Z_α "造" 出来的. 所以我们便需要先解决半单秩为 1 的群的结构.

最简单的半单秩为 1 的群就是 $\mathrm{PGL}(2,k)$, 直接用矩阵计算便可得这个群的结构:

设 $G=\mathrm{PGL}(2,k)$, 则

(1) $1\to\{\pm 1\}\to \mathrm{SL}(2,k)\to G\to 1$ 是正合列,

(2) G 半单,

(3) $(G,G)=G$,

(4) 若 T 为 G 的一个极大环面, 则 $T=C_G(T)$.

定理 2.4.1 设 G 是连通代数群, T 是 G 的极大环面, 则以下条件等价:

(1) G 的半单秩是 1,

(2) $|W(G,T)|=2$,

(3) $|\mathfrak{B}^T|=2$,

(4) $\dim G/B=1$,

(5) $G/B\cong\mathbb{P}^1$,

(6) 存在满态射 $\varphi: G\to \mathrm{PGL}(2,k)$ 使 $(\mathrm{Ker}\,\varphi)^0=R(G)$.

证明 (1)⇒(2). 由 G,T 可得到 $G'=G/R(G)$, $T'=T/T\cap R(G)$, T' 是 G' 的极大环面.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{B}_G^T & \longleftrightarrow & \mathfrak{B}_{G'}^{T'} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ W=W(G,T) & & W(G',T')=W' \end{array} \tag{2.1}$$

从 (1) 得 $\dim T'=1$, $T'\cong \mathrm{GL}(1)$. 因 $W'\subseteq \mathrm{Aut}(T')\cong \mathrm{Aut}\,\mathrm{GL}(1)=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, 故得 $|W'|\leqslant 2$. 另一方面, G' 不可解, 由定理 1.2.7, $\dim G'/B'\geqslant 1$. 因此 $|\mathfrak{B}_{G'}^{T'}|\geqslant 2$, 从而 $|W'|\geqslant 2$, 得到 $|W'|=2$. 从图 (2.1) 知 $|W|=|W'|=2$.

(2)⇔(3). 因为 $\mathfrak{B}_G^T\leftrightarrow W(G,T)$, 等价性是显然的.

(3)⇒(4). 已知 $\dim G/B\geqslant 1$, 若是 $\dim G/B\geqslant 2$, 则由定理 2.3.3, $|\mathfrak{B}_G^T|\geqslant 3$, 但这和 (3) 矛盾, 故必须 $\dim G/B=1$.

(4)⇒(5). 我们知,

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}(1) & \longrightarrow & V-\{0\}\ni v \\ \cap\! | & & \\ \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{\ \lambda_v\ } & X\subseteq \mathbb{P}(V), \end{array}$$

这里 $X = G/B = G\cdot[v]$. 由于 X 不可约, $\mathbb{P}^1$ 完备, $\dim X = 1$, 所以 $\lambda_v(\mathbb{P}^1) = X$, λ_v 定义一个同构: $\mathbb{P}^1 \cong G/B$.

(5)⇒(6). 对 $g \in G$, 可定义

$$\begin{aligned}\Psi_g : G/B &\longrightarrow G/B\\ xB &\longmapsto gxB.\end{aligned}$$

于是有同态

$$\begin{aligned}\Psi : G &\longrightarrow \mathrm{Aut}(G/B)\\ g &\longmapsto \Psi_g.\end{aligned}$$

设 $I = \bigcap_{B'\in\mathfrak{B}} B'$, 我们要证明以下序列正合:

$$1 \to I \to G \xrightarrow{\Psi} \mathrm{Aut}(G/B) \to 1.$$

$\Psi_g = \mathrm{id}$ 等价于对任意的 xB 有 $gxB = xB$, 即对任意的 $B' \in \mathfrak{B}$ 有 $gB'g^{-1} = B'$, 这等价于对任意的 $B' \in \mathfrak{B}$ 有 $g \in N_G(B') = B'$, 即 $g \in \bigcap_{B'\in\mathfrak{B}} B' = I$. 这就证明了序列的左半部分是正合的.

再证 $I^0 = R(G)$. 对任意的 $g \in G$, 有

$$gIg^{-1} = \bigcap_{B'\in\mathfrak{B}} gB'g^{-1} = \bigcap_{B'\in\mathfrak{B}} B' = I,$$

因此 I 正规且可解, 于是 $I^0 \subseteq R(G)$. 另一方面, 存在 $B \in \mathfrak{B}$, $R(G) \subseteq B$. 从而对任意的 $B' \in \mathfrak{B}$ 有 $B' = gBg^{-1} \supseteq gR(G)g^{-1} = R(G)$, 由 $R(G)$ 的连通性可得 $R(G) \subseteq \left(\bigcap_{B'\in\mathfrak{B}} B'\right)^0 = I^0$. 所以 $R(G) = I^0$.

由假设, $\mathrm{Aut}(G/B) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1) \cong \mathrm{PGL}(2)$. 因此剩下只要证右半个正合列:

$$G \xrightarrow{\varphi} \mathrm{PGL}(2) \to 1.$$

由于 $\overline{\varphi} : G/R(G) \to \mathrm{PGL}(2)$ 的核 I/I^0 有限, 记 $G' = G/R(G)$, 则 $\dim\varphi(G) = \dim G'$. 因为最简单的半单群 $\mathrm{PGL}(2)$ 的维数等于 3, 因此 G' 作为半单群, 有

$$3 \leqslant \dim G' = \dim\varphi(G) \leqslant \dim \mathrm{PGL}(2) = 3,$$

从 $\mathrm{PGL}(2)$ 的不可约性就能得到 $\varphi(G) = \mathrm{PGL}(2)$.

(6)⇒(1). 因 $\mathrm{PGL}(2)$ 的秩等于 1, 从正合列可得 $\mathrm{rank}(G/R(G)) = 1$. □

命题 2.4.2 设 T 是连通代数群 G 的一个极大环面, $B \in \mathfrak{B}_G^T$, $S \subseteq T$, $\dim S = \dim T - 1$, S 是奇异环面. 则

(1) $|W(C_G(S), T)| = 2$.

(2) $\{\lambda \text{ 正则} \mid \mathscr{B}_G(\lambda) = B\} = \mathfrak{C}(B) \subseteq \mathfrak{C}(C_B(S)) = \{\lambda \text{ 正则} \mid \mathscr{B}_{C_G(S)}(\lambda) = C_B(S)\}$.

(3) 设 $\mathfrak{B}_{C_G(S)}^T = \{C, C'\}$, 则存在 $0 \neq \alpha \in X(T/S) \subseteq X(T)$ 使对任意的 $B \in \mathfrak{B}^T$ 有

(i) $C_B(S) = C$ 当且仅当对任意的 $\lambda \in \mathfrak{C}(B)$, $\langle \alpha, \lambda \rangle > 0$, 或

(ii) $C_B(S) = C'$ 当且仅当对任意的 $\lambda \in \mathfrak{C}(B)$, $\langle \alpha, \lambda \rangle < 0$.

(4) $\dim(C_B(S)_u / C_B(S)_u \cap I(T)_u) \leqslant 1$, 其中 $I(T) = \bigcap_{B \in \mathfrak{B}_G^T} B$.

(5) 设 $Q \subseteq T$, Q 是奇异环面, $\dim Q = \dim T - 1$, $Q \neq S$, 则

(i) 存在 $B' \in \mathfrak{B}^T$ 使 $C_{B'}(S) = C_B(S)$, $C_{B'}(Q) \neq C_B(Q)$.

(ii) $C_{I(C_B(S))}(Q) \subseteq I(T)$, 其中 $I(C_B(S)) = \bigcap_{B' \in \mathfrak{B}_G^{C_B(S)}} B'$.

证明 (1) 由假设 S 是极大奇异环面, 故存在 $\alpha \in \Phi(G/I(T), T)$ 使 $S = T_\alpha$. 由命题 2.2.10 知 $C_G(S) = Z_\alpha$ 的半单秩是 1, 因此由定理 2.4.1 得 $|W(C_G(S), T)| = 2$.

(2) 见下图:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathfrak{C}(B) & \subseteq & Y(G,T)_{\text{reg}} & \xrightarrow{\mathscr{B}_G} & \mathfrak{B}^T & \ni & B \\
 & & \cap & & & & \downarrow \\
\mathfrak{C}(C_B(S)) & \subseteq & Y(C_G(S),T)_{\text{reg}} & \xrightarrow{\mathscr{B}_{C_G(S)}} & \mathfrak{B}_{C_G(S)}^T & \ni & C_B(S) = B \cap C_G(S)
\end{array}$$

我们欲证 $\mathfrak{C}(B) \subseteq \mathfrak{C}(C_B(S))$.

(i) 看交换图

$$\begin{array}{ccc}
G & \xrightarrow{\pi} & G/B \\
\uparrow i & & \uparrow j \\
C_G(S) & \xrightarrow{\pi^S} & C_G(S)/C_B(S)
\end{array}$$

其中 $j(\pi^S(g)) = g\pi(e)$.

(ii) 现证 j 是单态射: 若 $j(\pi^S(g)) = 1$, 则 $g\pi(e) = \pi(e)$, 即 $g \in B \cap C_G(S) = C_B(S)$, 从而 $\pi^S(g) = 1$, j 确是单的.

(iii) 若 $\lambda \in \mathfrak{C}(B)$, 则 $\mathscr{B}_G(\lambda) = B$, 根据 2.3.5 节的讨论以及命题 2.3.5, $\pi(e) = x_\lambda$, 且存在 x_λ 的开邻域 U 使得对任意的 $x \in U \subseteq G/B$ 有 $\lambda(\infty)x = x_\lambda$.

于是存在 $C_G(S)/C_B(S)$ 里的开集 U^S, 使 $\pi^S(e) \in U^S$, 且 $\lambda(\infty)U^S = \pi^S(e)$.

$$\begin{array}{ccccccc} G & \supseteq & \mathscr{U} & \xrightarrow{\pi} & U & \subseteq & G/B \\ & & \uparrow i & & \uparrow j & & \\ C_G(S) & \supseteq & \mathscr{U} \cap C_G(S) & \xrightarrow{\pi^S} & U^S & \subseteq & C_G(S)/C_B(S) \end{array}$$

所以对群 $C_G(S)$ 来说, $\pi^S(e)$ 就是 $x_\lambda = \mathscr{B}_{C_G(S)}(\lambda)$, 可见

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{B}_G^T & \ni & B & = & \mathscr{B}_G(\lambda) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{B}_{C_G(S)}^T & \ni & C_B(S) & = & \mathscr{B}_{C_G(S)}(\lambda) \end{array}$$

即 $\lambda \in \mathfrak{C}(C_B(S))$.

(3) 由 (1) 知 $|\mathfrak{B}_{C_G(S)}^T| = |W(C_G(S), T)| = 2$, 可设 $\mathfrak{B}_{C_G(S)}^T = \{C, C'\}$. 由命题 2.3.8, 对每一个 $C_G(S)$ 的 Weyl 房, 存在 $\{\beta_i\} \subseteq X(T/T \cap R(C_G(S)) \setminus \{0\}$, 使这个 Weyl 房是 $\{\lambda \in Y(C_G(S), T)_{\text{reg}} \mid \langle \beta_i, \lambda \rangle > 0,\ \forall i\}$. 但 $T \cap R(C_G(S)) = S$, 另外从假设 $\dim T/S = 1$ 可得 $\{\beta_i\} \subseteq X(T/S) \cong \mathbb{Z}$. 因此可取 $\{\beta_i\} = \{\alpha\}$ 或 $\{-\alpha\}$, 其中 α 是 $X(T/S)$ 的生成元, 这就是说 $C_G(S)$ 的任何一个 Weyl 房是

$$\{\lambda \in Y(C_G(S), T)_{\text{reg}} \mid \langle \alpha, \lambda \rangle > 0\}$$

或

$$\{\lambda \in Y(C_G(S), T)_{\text{reg}} \mid \langle \alpha, \lambda \rangle < 0\}.$$

但是

$$\mathfrak{C} \cup \mathfrak{C}' = Y(C_G(S), T)_{\text{reg}} \twoheadrightarrow \mathfrak{B}_{C_G(S)}^T = \{C, C'\},$$

其中

$$\mathfrak{C} = \{\lambda \text{ 正则} \mid \mathscr{B}_{C_G(S)}(\lambda) = C\},$$

$$\mathfrak{C}' = \{\lambda \text{ 正则} \mid \mathscr{B}_{C_G(S)}(\lambda) = C'\}.$$

因 $\mathfrak{B}_G^T \twoheadrightarrow \mathfrak{B}_{C_G(S)}^T$, 故对任意的 $B \in \mathfrak{B}_G^T$, $C_B(S) = C$ 或 C'.

另外, $C_B(S) = C$ 当且仅当 $\mathfrak{C} = \{\lambda \text{ 正则} \mid \langle \alpha, \lambda \rangle > 0\}$, 这就证明了 (3).

(4) (i) 由假设, 存在 $\alpha \in \Phi(G/I(T), T)$ 使 $S = T_\alpha$. 故 $C_G(S)$ 的半单秩是 1, 存在同态 $\varphi: C_G(S) \to \mathrm{PGL}(2)$ 使以下序列正合:

$$1 \to \operatorname{Ker}\varphi \to C_G(S) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{PGL}(2) \to 1,$$

其中 $(\operatorname{Ker}\varphi)^0 = R(C_G(S))$.

(ii) 由于 $C_B(S)$ 是 $C_G(S)$ 的 Borel 子群, $\varphi(C_B(S))$ 是 PGL(2) 的 Borel 子群. 但 PGL(2) 的任一 Borel 子群同构于

$$B_0=\left\{\begin{bmatrix}1 & x\\ 0 & y\end{bmatrix}\middle|\ x\in k, y\in k^*\right\},$$

故

$$(B_0)_u=\left\{\begin{bmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{bmatrix}\middle|\ x\in k\right\}\cong k.$$

于是 $\varphi(C_B(S)_u)=\varphi(C_B(S))_u\cong k$.

(iii) $\varphi(C_B(S)_u)\cong C_B(S)_u/C_B(S)_u\cap R(C_B(S))_u\cong k$.

(iv) 但

$$R(C_G(S))\subseteq\left(\bigcap_{B\in\mathfrak{B}_G^S}B\right)^0\subseteq\left(\bigcap_{B\in\mathfrak{B}_G^T}B\right)^0=I(T)_u,$$

因此 $\dim(C_B(S)_u/C_B(S)_u\cap I(T)_u)\leqslant 1$.

(5) (i) 固定 B 使 $C_B(S)=C$ (C 如 (3) 中所定义). 则 $C_{B'}(S)=C_B(S)=C$ 当且仅当存在 $\beta\in X(T/S)\subseteq X(T)$ 使得对任意的 $\lambda\in\mathfrak{C}(B')$ 有 $\langle\beta,\lambda\rangle>0$. 同样地, $C_{B'}(Q)=C_B(Q)=C$ 当且仅当存在 $\gamma\in X(T/Q)\subseteq X(T)$ 使得对任意的 $\lambda\in\mathfrak{C}(B')$ 有 $\langle\gamma,\lambda\rangle>0$. 而因 $S\neq Q$, 故 $(\operatorname{Ker}\beta)^0\neq(\operatorname{Ker}\gamma)^0$, 即 β 与 γ 在 $X(T)$ 里线性无关, 从而存在 $\lambda'\in Y(G,T)_{\text{reg}}$, 使得 $\langle\beta,\lambda'\rangle>0$ 及 $\langle\gamma,\lambda'\rangle<0$. 取 $B'=\mathscr{B}_G(\lambda')$, 则因对任意的 $\lambda\in\mathfrak{C}(B')$ 有 $\langle\beta,\lambda\rangle>0$, 因此 $C_{B'}(S)=C_B(S)$. 又因 $\langle\gamma,\lambda'\rangle<0$, 因此 $C_{B'}(Q)\neq C_B(Q)$.

(ii) 先用一个引理.

引理 2.4.3 若 G 的半单秩是 1, $B_0\neq B_1\neq B_\infty\in\mathfrak{B}_G$, $I=\bigcap_{B\in\mathfrak{B}_G}B$, 则

(1) $B_0\cap B_1/I\cong \mathrm{GL}(1)$,

(2) $B_0\cap B_1\cap B_\infty=I$.

证明 (1)

$$\begin{array}{ccccccccc}1 & \longrightarrow & \operatorname{Ker}\varphi & \longrightarrow & G & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{PGL}(2) & \longrightarrow & 1\\ & & & & & \searrow & \| & & \\ & & & & & & \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1) & & \\ & & & & & & \| & & \\ & & & & & & \mathrm{Aut}(G/B) & & \end{array}$$

$B_0\neq B_1\neq B_\infty$ 对应于 $\mathbb{P}^1$ 中 3 个不同的点 $x_0\neq x_1\neq x_\infty$.

$g \in \operatorname{Ker}\varphi$ 当且仅当对任意的 $yB \in G/B$ 有 $g \cdot yB = yB$. 这等价于 $g \in \bigcap_{y \in G} yBy^{-1} = \bigcap_{B \in \mathfrak{B}_G} B = I$, 也就是说 $\operatorname{Ker}\varphi = I$.

若把 φ 的像看成 $\operatorname{Aut}(\mathbb{P}^1)$ 的元素, 则

$$B_0 \cap B_1 = \{g \in G \mid \varphi(g) \cdot x_0 = x_0,\ \varphi(g) \cdot x_1 = x_1\},$$

也即

$$\varphi(B_0 \cap B_1) = \{g \in \operatorname{Aut}(\mathbb{P}^1) \mid g \cdot x_0 = x_0,\ g \cdot x_1 = x_1\} \cong \mathrm{GL}(1).$$

因此 $B_0 \cap B_1 / I \cong \mathrm{GL}(1)$.

(2) 类似地,

$$\begin{aligned} B_0 \cap B_1 \cap B_\infty / I &\cong \{g \in \operatorname{Aut}(\mathbb{P}^1) \mid g \cdot x_0 = x_0,\ g \cdot x_1 = x_1,\ g \cdot x_\infty = x_\infty\} \\ &= \{e\}, \end{aligned}$$

所以 $B_0 \cap B_1 \cap B_\infty = I$. □

(iii) 取 B' 使 $C_B(S) = C_{B'}(S)$, $C_B(Q) \neq C_{B'}(Q)$, 由于 $C_G(S)$ 的半单秩是 1, 注意到 $C_B(Q), C_{B'}(Q)$ 都是 $C_G(Q)$ 的 Borel 子群, 从上述引理 2.4.3,

$$C_B(Q) \cap C_{B'}(Q) / \bigcap_{B \in \mathfrak{B}^Q_{C_G(Q)}} B \cong \mathrm{GL}(1),$$

所以

$$C_B(Q) \cap C_{B'}(Q) = T \cdot R(C_G(Q))_u \subseteq I(T).$$

另外, 因 $C_B(S) = C_{B'}(S)$, $I(C_B(S)) = \bigcap_{B'' \in \mathfrak{B}_G^{C_B(S)}} B'' \subseteq B \cap B'$, 可得

$$C_{I(C_B(S))}(Q) \subseteq C_{B \cap B'}(Q) = C_B(Q) \cap C_{B'}(Q) \subseteq I(T).$$ □

2.5　幺　根

本节目的在于证明 $I(T)_u = R_u(G)$.

设 $G = \mathrm{PGL}(2) = \mathrm{GL}(2)/S$,

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| \ a \in k^* \right\},$$

$$\mathrm{GL}(2) \longrightarrow \mathrm{PGL}(2): \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

$T = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| a \in k^* \right\}$ 是 PGL(2) 的一个极大环面.

$\alpha \in X(T)$ 如下定义：对于 $t = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\alpha(t) = a$, 即 $\alpha\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}\right) = ad^{-1}$. 这样, $(-\alpha)\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}\right) = a^{-1}d$.

可定义

$$\begin{aligned} u_\alpha : \mathbb{G}_\mathrm{a} = k &\longrightarrow G \\ b &\longmapsto \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ u_{-\alpha} : \mathbb{G}_\mathrm{a} = k &\longrightarrow G \\ b &\longmapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

设 $U_\alpha = u_\alpha(\mathbb{G}_\mathrm{a})$, $U_{-\alpha} = u_{-\alpha}(\mathbb{G}_\mathrm{a})$,

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| a \in k^*, b \in k \right\},$$

$$B' = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} \middle| a \in k^*, b \in k \right\}.$$

显然 $B = T \cdot U_\alpha$, $B' = T \cdot U_{-\alpha}$. $\mathfrak{B}^T_{\mathrm{PGL}(2)} = \{B, B'\}$.

命题 2.5.1　设 G 是连通简约群, 半单秩等于 1, T 为 G 的一个极大环面. 用 $\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, \mathfrak{b}', \mathfrak{t}$ 分别表示 G, B, B', T 的李代数, 则

(1) $I(T) = \left(\bigcap_{B\in\mathfrak{B}^T_G} B\right)^0 = B \cap B' = T$,

$I^0 = \left(\bigcap_{B\in\mathfrak{B}_G} B\right)^0 = Z(G)^0$, $C_G(T) = T$.

(2) 存在同构 $\theta : k = \mathbb{G}_\mathrm{a} \to B_u$ 及 $\alpha \in X(T/T\cap I)$, 使 $t\theta(b)t^{-1} = \theta(\alpha(t)b)$, 其中 $t \in T$, $b \in \mathbb{G}_\mathrm{a}$. $\Phi(B,T) = \{\alpha\}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}_\alpha$, 其中

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{Ad}(t)X = \alpha(t)X,\ \forall t \in T\}.$$

B_u 是 G 的唯一 T 不变连通子群, 以 $\mathfrak{g}_\alpha$ 为它的李代数. $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$.

(3) 对 $(B', -\alpha)$ 也有如 (2) 相同的结果.

(4) $\mathfrak{b}\cap\mathfrak{b}'=\mathfrak{t}$, $\mathfrak{b}+\mathfrak{b}'=\mathfrak{g}=\mathfrak{t}\oplus\mathfrak{g}_\alpha\oplus\mathfrak{g}_{-\alpha}$, $\Phi(G,T)=\{\alpha,-\alpha\}$.

(5) $\mathfrak{C}(B)=\{\lambda\in Y(T)\mid\langle\alpha,\lambda\rangle>0\}$, $\mathfrak{C}(B')=\{\lambda\in Y(T)\mid\langle\alpha,\lambda\rangle<0\}$.

证明　第一步. 因 G 的半单秩是 1, 故存在 2 维向量空间 V 及正合序列

$$1\to I\to G\xrightarrow{\varphi}\mathrm{PGL}(V)\to 1,$$

其中 $I^0=R(G)$. 通过坐标变换可假设

$$\varphi(T)=\left\{\left.\begin{bmatrix}a&0\\0&1\end{bmatrix}\right|\ a\in k^*\right\}.$$

这样

$$\varphi(\mathfrak{B}_G^T)=\{\varphi(B),\varphi(B')\}=\mathfrak{B}_{\mathrm{PGL}(V)}^{\left\{\begin{bmatrix}a&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}}=\left\{\left\{\begin{bmatrix}a&b\\0&1\end{bmatrix}\right\},\left\{\begin{bmatrix}a&0\\b&1\end{bmatrix}\right\}\right\}.$$

可假设

$$\varphi(B)=\left\{\begin{bmatrix}a&b\\0&1\end{bmatrix}\right\},\qquad \varphi(B')=\left\{\begin{bmatrix}a&0\\b&1\end{bmatrix}\right\}.$$

第二步. 从第一步可知有正合序列

$$1\to I\cap B_u\to B_u\xrightarrow{\varphi}\left\{\begin{bmatrix}1&b\\0&1\end{bmatrix}\right\}\to 1.$$

因 G 简约, $I^0=R(G)$ 是环面, 故 $I^0\cap B_u=\{e\}$, 于是 $I\cap B_u$ 有限, $\dim B_u=\dim\left\{\begin{bmatrix}1&b\\0&1\end{bmatrix}\right\}=1$.

因 B_u 是一维连通幂幺群, 故存在同构 $\varphi:B_u\to\left\{\begin{bmatrix}1&b\\0&1\end{bmatrix}\right\}$. 这样即可定义同构 $\theta=\varphi^{-1}\psi^{-1}:\mathbb{G}_\mathrm{a}\to B_u$:

$$\begin{aligned}B_u\xrightarrow{\varphi}\left\{\begin{bmatrix}1&b\\0&1\end{bmatrix}\right\}&\xrightarrow{\psi}\mathbb{G}_\mathrm{a}\\ \begin{bmatrix}1&b\\0&1\end{bmatrix}&\longmapsto b.\end{aligned}$$

第三步. 对 $t \in T$, $\theta(b) \in B_u$, $b \in \mathbb{G}_a$, 可以定义一个 T 在 $\mathbb{G}_a$ 上的作用:

$$t \cdot b = \theta^{-1}(t\theta(b)t^{-1}) = \psi\varphi\left(t\varphi^{-1}\left(\begin{bmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)t^{-1}\right)$$
$$= \psi\left(\varphi(t)\begin{bmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{bmatrix}\varphi(t)^{-1}\right).$$

若 $\varphi(t) = \begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, 定义 $\alpha(t) = a$, 显然 $\alpha \in X(T)$. 于是

$$t \cdot b = \psi\left(\begin{bmatrix}1 & ab\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right) = ab = \alpha(t)b.$$

这样, $\theta^{-1}(t\theta(b)t^{-1}) = \alpha(t)b$, 可得 $t\theta(b)t^{-1} = \theta(\alpha(t)b)$. 还有, $t \in I \cap T$ 可得 $\varphi(t) = 1$, 从而 $\alpha(t) = 1$. 也就是说 $\alpha \in X(T/T \cap I)$.

第四步. 对 B'_u 也可作同样的运算, 即可定义同构 $\theta' = \varphi'^{-1}\psi'^{-1} : \mathbb{G}_a \to B'_u$:

$$B'_u \xrightarrow{\varphi'} \left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ b & 1\end{bmatrix}\right\} \xrightarrow{\psi'} \mathbb{G}_a.$$

$$\theta'^{-1}(t\theta'(b)t^{-1}) = \psi'\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ a^{-1}b & 1\end{bmatrix}\right) = a^{-1}b = -\alpha(t)b.$$

第五步. 从前面

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{G}_a & \xrightarrow[\approx]{\theta} & B_u & & \mathfrak{L}(\mathbb{G}_a) & \xrightarrow[\approx]{\mathrm{d}\theta} & \mathfrak{L}(B_u)\\
\downarrow{\scriptstyle \alpha(t)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Int}\,(t)} & \Longrightarrow & \downarrow{\scriptstyle \alpha(t)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ad}(t)}\\
\mathbb{G}_a & \xrightarrow[\approx]{\theta} & B_u & & \mathfrak{L}(\mathbb{G}_a) & \xrightarrow[\approx]{\mathrm{d}\theta} & \mathfrak{L}(B_u)
\end{array}$$

可见

$$\mathfrak{L}(B_u) = \{\mathrm{d}\theta(X) \mid X \in \mathfrak{L}(\mathbb{G}_a)\},$$

$$\mathrm{Ad}(t)\mathrm{d}\theta(X) = \mathrm{d}\theta(\alpha(t)X) = \alpha(t)\mathrm{d}\theta(X).$$

因此 $\mathfrak{L}(B_u) \subseteq \mathfrak{g}_\alpha$. 同样, $\mathfrak{L}(B'_u) \subseteq \mathfrak{g}_{-\alpha}$, 但 $B = T \cdot B_u$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{L}(B_u)$. 由于 $B_u \cong \mathbb{G}_a$, $\dim \mathfrak{L}(B_u) = 1$. 同样有 $\mathfrak{b}' = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{L}(B'_u)$. $\dim \mathfrak{L}(B'_u) = 1$. 所以 $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}' \supseteq \mathfrak{t}$.

第六步. $\varphi : B_u \to \left\{\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$, $\varphi' : B'_u \to \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}\right\}$. 由于 $\varphi(B_u \cap B'_u) = \{e\}$ 且 φ 在 B_u 上是同构, 故 $B_u \cap B'_u = \{e\}$, $B \cap B' = T(B_u \cap B'_u) = T$. 另外从定义,

$$T \subseteq I(T) = \left(\bigcap_{B \in \mathfrak{B}_G^T} B\right)^0 = (B \cap B')^0 \subseteq B \cap B' = T.$$

因此 $T = B \cap B' = I(T)$. 再由第五步, $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}' = \mathfrak{t}$.

第七步. 算维数: $\dim(\mathfrak{b} + \mathfrak{b}') = \dim(\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{L}(B_u) \oplus \mathfrak{L}(B'_u)) = \dim(\mathfrak{t}) + 2$. 又因

$$1 \longrightarrow G \xrightarrow{\varphi} \mathrm{PGL}(2) \longrightarrow 1$$

是正合列, 所以

$$\dim \mathfrak{t} = \dim T = \dim I + \dim \varphi(T) = \dim I + 1.$$

于是

$$\dim(\mathfrak{b} + \mathfrak{b}') = \dim I + 3 = \dim I + \dim \mathrm{PGL}(2) = \dim G = \dim \mathfrak{g}.$$

考虑到 $\mathfrak{b} + \mathfrak{b}' \subseteq \mathfrak{g}$, 就有 $\mathfrak{g} = \mathfrak{b} + \mathfrak{b}'$. 这样,

$$\mathfrak{g} = C_{\mathfrak{g}}(T) \bigoplus_{\beta \in \Phi(G,T)} \mathfrak{g}_\beta = \mathfrak{b} + \mathfrak{b}' = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{L}(B_u) \oplus \mathfrak{L}(B'_u).$$

第八步.

$$\begin{array}{ccc} C_G(T) & \xrightarrow{\varphi} & C_{\mathrm{PGL}(2)}\left(\left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}\right) \\ \bigcup & & \| \\ T & \longrightarrow & \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}. \end{array}$$

$T \subseteq C_G(T) \subseteq T \cdot \operatorname{Ker}\varphi$, 已知 $\operatorname{Ker}\varphi = I$, $I^0 = R(G)$ 是环面, 可证 $I^0 = R(G) \subseteq T$ (这是因为存在 T' 使 $R(G) \supseteq T'$, 又知 $R(G) \lhd G$, 故存在 $g \in G$ 使 $T = gT'g^{-1} \subseteq gR(G)g^{-1} = R(G)$). $[T \cdot \operatorname{Ker}\varphi : T] \leqslant [I : I^0] < \infty$. 已知 $C_G(T)$ 连通, 得 $C_G(T) = T$. 于是

$$C_{\mathfrak{g}}(T) = \mathfrak{L}(C_G(T)) = \mathfrak{L}(T) = \mathfrak{t}.$$

第九步. 回头看证明中的第七步, 由

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \bigoplus_{\beta \in \Phi(G,T)} \mathfrak{g}_\beta = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{L}(B_u) \oplus \mathfrak{L}(B'_u)$$

及

$$\mathfrak{L}(B_u) \subseteq \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \mathfrak{L}(B'_u) \subseteq \mathfrak{g}_{-\alpha},$$

可得

$$\Phi(G,T) = \{\alpha, -\alpha\}, \qquad \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{L}(B_u), \qquad \mathfrak{g}_{-\alpha} = \mathfrak{L}(B'_u),$$

且 $\dim \mathfrak{g}_\alpha = \dim \mathfrak{g}_{-\alpha} = 1$. □

命题 2.5.2 设 G 是连通幂零群, $\dim G > 0$, H 是 G 的连通闭子群. 若 $\dim H = \dim G - 1$, 则 $H \lhd G$.

证明 第一步. 若 $\dim H < \dim N_G(H)$, 则 $\dim N_G(H) = \dim G$, $N_G(H) = G$. 显然 $H \lhd G$.

第二步. 对 $\dim G$ 作归纳法. $\dim G = 1$ 当然成立. 若 $\dim G > 0$, 因 G 幂零, 设 $Z(G)^0 = Z$, 则 $\dim Z > 0$, $\dim(G/Z) < \dim G$. 分两种情形: $Z \subseteq H$ 或 $Z \nsubseteq H$. 若 $Z \nsubseteq H$, 则 $H \subsetneqq ZH \subseteq N_G(H)$. 于是 $\dim H < \dim N_G(H)$. 若 $Z \subseteq H$, 则对 G/Z 用归纳法假设, 可得 $\dim N_{G/Z}(H/Z) > \dim H/Z$, 从而 $\dim N_G(H) > \dim H$. □

定理 2.5.3 若 G 是连通群, T 是 G 的极大环面, 则

$$I(T)_u = R_u(G).$$

证明 第一步. 定义

$$I(T) = \left(\bigcap_{B \in \mathfrak{B}_G^T} B \right)^0.$$

由于

$$R_u(G) \subseteq \left(\bigcap_{B \in \mathfrak{B}_G} B_u \right)^0,$$

因此 $R_u(G) \subseteq I(T)_u$.

第二步. 由定义, $R_u(G)$ 是 G 的极大连通正规幂幺子群, 但 $I(T)_u$ 是连通幂幺的, 若可以证明 $I(T)_u \lhd G$, 就能导出 $I(T)_u \subseteq R_u(G)$, 从而证明定理.

第三步. 分别对 G 及 B 应用定理 2.1.1(4), 可得 G 由 $\{B \mid B \in \mathfrak{B}_G^T\}$ 生成. 又可证明 B 是由 $\{C_B(S) \mid S \subseteq T,\ \dim S = \dim T - 1\}$ 生成 (参见 [169]

p.158, 定理 26.1 的证明). 这样要是可以证明 $(C_B(S))_u \subseteq N_G(I(T)_u)$, 由于 $C_B(S) = T \cdot (C_B(S))_u$ 且 $T \subseteq N_G(I(T)_u)$, 就能导出 $C_B(S) \subseteq N_G(I(T)_u)$, 从而得到 $I(T)_u \subseteq G$.

现在把问题分成两个情形：S 正则和 S 奇异.

第四步. 若 S 正则, 根据命题 2.2.6, 推论 2.2.7 与 2.2.8, $C_G(S)$ 可解及对任意的 $B \in \mathfrak{B}^S = \mathfrak{B}^T$ 有 $C_G(S) \subseteq B$, 因此

$$C_B(S) = B \cap C_G(S) \subseteq C_G(S) \subseteq \left(\bigcap_{B\in\mathfrak{B}^T} B\right)^0 = I(T),$$

于是 $(C_B(S))_u \subseteq I(T)_u$, 即得 $(C_B(S))_u \subseteq N_G(I(T)_u)$.

第五步. 若 S 奇异, 显然 $(C_B(S))_u \subseteq B_u$. 若 $B' \in \mathfrak{B}_G^{C_B(S)}$, 即 $B' \supseteq C_B(S)$, 则也有 $(C_B(S))_u \subseteq B'_u$, 从而

$$(C_B(S))_u \subseteq I_B^S = \left(\bigcap_{B'\in\mathfrak{B}_G^{C_B(S)}} B'\right)^0$$

定义 $H = (I_B^S \cap B_u)^0$, 显然 $H \supseteq (C_B(S))_u$. 于是若能证明 $H \subseteq N_G(I(T)_u)$, 就能得到 $(C_B(S))_u \subseteq N_G(I(T)_u)$.

第六步. 若可以证明：$I(T)_u \subseteq H$, H 连通幂零且 $\dim H > 0$, $\dim H \leqslant \dim I(T)_u + 1$, 则根据命题 2.5.2, $I(T)_u \lhd H$, 从而 $H \subseteq N_G(I(T)_u)$.

显然 H 连通, 幂幺 (因 $H \subseteq B_u$), 因此幂零. 此外,

$$I(T) = \left(\bigcap_{B'\in\mathfrak{B}_G^T} B'\right)^0 \subseteq B,$$

可得 $I(T)_u \subseteq B_u$. 又

$$I_B^S = \left(\bigcap_{B'\in\mathfrak{B}_G^{C_B(S)}} B'\right)^0,$$

注意到 $C_B(S) \supseteq T$, 因而 $I(T) \subseteq I_B^S$, 即 $I(T)_u \subseteq H$.

第七步. 我们证 $T \subseteq N_G(H)$.

对 $t \in T$, 知 $tB_ut^{-1} \subseteq B_u$, 及对 $\mathfrak{B}_G \ni B' \supseteq C_B(S) \supseteq T$, 则

$$tB't^{-1} \supseteq t(C_B(S))t^{-1} = C_B(S),$$

因此 $tI_B^S t^{-1} \subseteq I_B^S$. 这样可定义

$$\begin{aligned} T \times H &\longrightarrow H \\ (t,h) &\longmapsto tht^{-1}. \end{aligned}$$

由命题 1.2.17, H 可由

$$\{C_H(Q) \mid T \supseteq Q, Q \text{ 是环面}, \dim Q = \dim T - 1\}$$

生成. 这样又把问题分成 $Q \neq S$ 及 $Q = S$ 两种情形.

第八步. $Q \neq S$ 的情形.

当 Q 正则时, 利用 (4), $(C_B(Q))_u \subseteq I(T)_u$, 可得 $(C_H(Q))_u \subseteq I(T)_u$.

当 Q 奇异时, 根据 2.4 节的讨论, $C_{I_B^S}(Q) \subseteq I(T)$. 又因 $H \subseteq I_B^S$, $C_H(Q) \subseteq I(T)$. 由 H 幂幺 可知 $(C_H(Q))_u \subseteq I(T)_u$.

总之, 当 $Q \neq S$ 时, $C_H(Q) \subseteq I(T)_u$. 显然

$$C_H(S)/(C_H(S) \cap I(T)_u) \longrightarrow H/I(T)_u$$

是满同态.

第九步. 证: $(C_B(S))_u = C_H(S)$.

一方面, 由 $(C_B(S))_u \subseteq H$ 可以得到 $(C_B(S))_u \subseteq C_H(S)$. 反之, 由于 $H \subseteq B_u \subseteq B$, H 幂幺, 因此 $C_H(S) \subseteq (C_B(S))_u$.

第十步. 根据 2.4 节, $\dim(H/I(T)_u) \leqslant \dim(C_H(S)/C_H(S) \cap I(T)_u) \leqslant \dim((C_B(S))_u/(C_B(S))_u \cap I(T)_u) \leqslant 1$, 因此 $\dim H \leqslant \dim I(T)_u + 1$. □

推论 2.5.4 设 G 是连通群, 则

(1) $I(T) = T \cdot R_u(G)$.

(2) 若 $S \subseteq T$ 是环面, 则 $R_u(C_G(S)) = C_{R_u(G)}(S)$.

(3) 若 $S \subseteq T$ 是正则环面, 则 $(C_G(S))_u = C_{R_u(G)}(S)$.

(4) $C_G(T) = T \cdot C_{R_u(G)}(T)$.

证明 (1) $I(T)$ 可解, 故 $I(T) = T \cdot (I(T))_u = T \cdot R_u(G)$.

(2) 证 "$\supseteq$". 先证 $C_{R_u(G)}(S)$ 是 $C_G(S)$ 的正规子群. 为此, 取任意的 $g \in C_G(S)$, $c \in C_{R_u(G)}(S)$. 由 $R_u(G) \lhd G$ 可得 $gcg^{-1} \in R_u(G)$. 于是对任意的 $s \in S$ 有 $(gcg^{-1})s(gcg^{-1})^{-1} = g(c(g^{-1}sg)c^{-1})g^{-1} = g(csc^{-1})g^{-1} = gsg^{-1} = s$, 即 $gcg^{-1} \in C_{R_u(G)}(S)$. 正规性得证. 又因 $C_{R_u(G)}(S)$ 是连通幂幺群, 因此 $C_{R_u(G)}(S) \subseteq R_u(C_G(S))$.

再证 "$\subseteq$". $R(C_G(S))=\left(\bigcap_{B'\in\mathfrak{B}_{C_G(S)}}B'\right)^0$. 又知 $\mathfrak{B}_{C_G(S)}=\{C_{B'}(S)\mid B'\in\mathfrak{B}_G^S\}$. 所以对任意的 $B'\in\mathfrak{B}_G^S$, 都有 $R_u(C_G(S))\subseteq C_{B'}(S)$. 于是

$$R_u(C_G(S))=\left(\bigcap_{B'\in\mathfrak{B}_G^S}C_{B'}(S)\right)^0\subseteq I(T)=\left(\bigcap_{B'\in\mathfrak{B}_G^T}B'\right)^0,$$

即 $R_u(C_G(S))\subseteq I(T)_u=R_u(G)$. 因此 $R_u(C_G(S))$ 中的元素既属于 $R_u(G)$ 又与 S 的元素可换, 必含于 $C_{R_u(G)}(S)$, 即

$$R_u(C_G(S))\subseteq C_{R_u(G)}(S).$$

(3) 由 S 正则可知 $C_G(S)$ 可解, 因此 $(C_G(S))_u$ 可解, $(C_G(S))_u=R_u(C_G(S))$, 由 (2) 即得 $(C_G(S))_u=C_{R_u(G)}(S)$.

(4) T 极大必正则, 因此

$$C_G(T)=T\cdot(C_G(T))_u=T\cdot(C_{R_u(G)}(T)).$$ □

2.6 代数群的结构

本节中总是假定 G 是简约代数群, T 是 G 的一个固定的极大环面, B 为包含 T 的 Borel 子群. G,B,T 的李代数分别用 $\mathfrak{g},\mathfrak{b},\mathfrak{t}$ 表示. 本节的目的是说明 G 是由半单秩为 1 的子群 Z_α $(\alpha\in\Phi(G,T))$ 所造出来的, 以及证明 $\Phi(G,T)$ 是一个以 $W(G,T)$ 为 Weyl 群的根系.

2.6.1 根空间分解

命题 2.6.1 (1) $\Phi(G,T)=\Phi(G/I(T),T)$.

(2) $\mathfrak{g}=\mathfrak{t}\bigoplus_{\alpha\in\Phi(G,T)}\mathfrak{g}_\alpha$.

证明 (1) 因 $I(T)_u=R_u(G)=\{e\}$, 所以 $I(T)=T\cdot I(T)_u=T$, 立即推出 (1).

(2) $\mathfrak{g}=C_{\mathfrak{g}}(T)\bigoplus_{\alpha\in\Phi(G,T)}\mathfrak{g}_\alpha$, 而

$$C_{\mathfrak{g}}(T)=\mathfrak{L}(C_G(T))=\mathfrak{L}(T\cdot C_G(T)_u),$$

$(C_G(T))_u=C_{R_u(G)}(T)=\{e\}$, 所以 $C_{\mathfrak{g}}(T)=\mathfrak{L}(T)=\mathfrak{t}$, 由此得

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{t}\bigoplus_{\alpha\in\Phi(G,T)}\mathfrak{g}_\alpha.$$ □

2.6.2 半单秩为 1 的子群

命题 2.6.2 对 $\alpha \in \Phi(G,T)$, 设 $T_\alpha = (\operatorname{Ker}\alpha)^0$, $Z_\alpha = C_G(T_\alpha)$. 则

(1) G 是由 Z_α ($\alpha \in \Phi(G,T)$) 生成的.

(2) Z_α 是简约群, 半单秩为 1.

(3) $\mathfrak{L}(Z_\alpha) = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$, 且 $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$, $\Phi(G,T) = -\Phi(G,T)$.

证明 (1) 根据命题 1.2.17 知 (1) 成立.

(2) 因 $\Phi(G/I(T),T) = \Phi(G,T)$, 对 $\alpha \in \Phi(G,T)$, T_α 是奇异环面, 所以 Z_α 半单秩为 1. 另一方面,

$$R_u(Z_\alpha) = R_u(C_G(T_\alpha)) = C_{R_u(G)}(T_\alpha) = \{e\},$$

所以 Z_α 为简约群.

(3) 令 $\mathfrak{z} = \mathfrak{L}(Z_\alpha)$, 则因 Z_α 为半单秩 1 的简约群,

$$\mathfrak{z} = C_{\mathfrak{z}}(T) \bigoplus_{\gamma \in \Phi(Z_\alpha,T)} \mathfrak{z}_\gamma = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{z}_\gamma \oplus \mathfrak{z}_{-\gamma}$$

且

$$\dim \mathfrak{z}_\gamma = \dim \mathfrak{z}_{-\gamma} = 1.$$

又, $Z_\alpha \subseteq G$, 所以对任意的 $\beta \in \Phi(G,T)$, $\mathfrak{g}_\beta \subseteq \mathfrak{z}$ 当且仅当 $\beta(T_\alpha) = 1$ 当且仅当 $T_\alpha \subseteq T_\beta$. 由此推出

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{t} \bigoplus_{T_\beta \supseteq T_\alpha} \mathfrak{g}_\beta.$$

于是得到

$$\mathfrak{z}_\gamma \oplus \mathfrak{z}_{-\gamma} = \bigoplus_{T_\beta \supseteq T_\alpha} \mathfrak{g}_\beta \supseteq \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha},$$

其中至少 $\mathfrak{g}_\alpha$ 非空, 于是推及 $\gamma = \alpha$ 或 $-\gamma = \alpha$, 由维数关系, $\mathfrak{z}_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha$ 或 $\mathfrak{z}_{-\alpha} = \mathfrak{g}_\alpha$. 由此知道 $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ 非空, 并且

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}, \qquad \dim \mathfrak{g}_\alpha = 1.$$

因而从 $\alpha \in \Phi(G,T)$ 可以推出 $-\alpha \in \Phi(G,T)$, 即 $\Phi(G,T) = -\Phi(G,T)$. □

2.6.3 单参数子群

命题 2.6.3 设 $\alpha \in \Phi(G,T)$, 则

(1) 在 G 内存在唯一的 T 不变连通子群 $\mathfrak{g}_\alpha$, 使 $\mathfrak{L}(U_\alpha) = \mathfrak{g}_\alpha$.

(2) 存在同构 $\varepsilon_\alpha : \mathbb{G}_\mathrm{a} \to U_\alpha$, 使对于 $t \in T$, $x \in \mathbb{G}_\mathrm{a}$, 有 $t\varepsilon_\alpha(x)t^{-1} = \varepsilon_\alpha(\alpha(t)x)$.

(3) 若 $\sigma \in W(G,T) = N_G(T)/C_G(T)$, $\sigma = nC_G(T)$, 则 $nU_\alpha n^{-1} = U_{\sigma(\alpha)}$.

证明 先证 (1) 和 (2). 设 $B_{\pm\alpha}$ 是 Z_α 的 Borel 子群, 使 $\mathfrak{L}(B_{\pm\alpha}) = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$. U_α 的存在性不难建立, 只要令 $U_\alpha = (B_\alpha)_u$ 即可. 为证其唯一性, 设 V 是 G 的连通子群, $T \subseteq N_G(V)$ 及 $\mathfrak{L}(V) = \mathfrak{g}_\alpha$. 由于 $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$, 所以 $\dim V = 1$, 可见 $V \cong \mathrm{GL}(1)$ 或 $\mathbb{G}_\mathrm{a}$. 如果 $V \cong \mathrm{GL}(1)$, 则 V 是一个环面. 因为 $T \subseteq N_G(V)$, 所以对任意的 $t \in T$, $\mathrm{Int}(t) : V \to V$ 定义了一个作用 $T \times V \to V$. 用刚性定理, 对任意的 $t \in T$, $\mathrm{Int}(t)|_V = \mathrm{Int}(e)|_V$, 即 $\mathrm{Int}(t)|_V = \mathrm{id}$. 所以 $\mathrm{Ad}(t)|_{\mathfrak{L}(V)} = \mathrm{id}$. 但

$$\mathfrak{L}(V) = \mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{Ad}(t)X = \alpha(t)X \ \forall t \in T\},$$

其中 $\alpha \neq 0$. 这引起矛盾, 所以 V 不是 $\mathrm{GL}(1)$.

V 一定和 $\mathbb{G}_\mathrm{a}$ 同构. 设 $\varepsilon : \mathbb{G}_\mathrm{a} \to V$ 为这个同构. 这样可以建立一个交换图:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G}_\mathrm{a} & \xrightarrow{\varepsilon} & V \\ {\scriptstyle \varepsilon^{-1}\mathrm{Int}(t)\varepsilon}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Int}(t)} \\ \mathbb{G}_\mathrm{a} & \xrightarrow{\varepsilon} & V \end{array}$$

映射 $t \mapsto \varepsilon^{-1}\mathrm{Int}(t)\varepsilon$ 定义了一个同态 $\gamma : T \to \mathrm{GL}(1) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{G}_\mathrm{a})$, $\gamma \in X(T)$. 对所有的 $x \in \mathbb{G}_\mathrm{a}$, $\gamma(t)x = \varepsilon^{-1}\mathrm{Int}(t)\varepsilon(x)$, 所以 $\varepsilon(\gamma(t)x) = t\varepsilon(x)t^{-1}$.

从上面的交换图马上可以得出关于李代数的交换图:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{L}(\mathbb{G}_\mathrm{a}) & \xrightarrow{\mathrm{d}\varepsilon} & \mathfrak{L}(V) \\ {\scriptstyle 乘\,\gamma(t)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ad}(t)} \\ \mathfrak{L}(\mathbb{G}_\mathrm{a}) & \xrightarrow{\mathrm{d}\varepsilon} & \mathfrak{L}(V) \end{array}$$

于是,

$$\mathrm{Ad}(t)X = \mathrm{d}\varepsilon(\gamma(t)\mathrm{d}\varepsilon^{-1}(X)) = \gamma(t)X, \qquad \forall t \in T, X \in \mathfrak{L}(V).$$

但 $\mathfrak{L}(V) = \mathfrak{g}_\alpha$, $\mathrm{Ad}(t)X = \alpha(t)X$, 所以 $\alpha = \gamma$, 由此,

$$t\varepsilon(x)t^{-1} = \varepsilon(\alpha(t)x), \qquad \forall t \in T_\alpha.$$

对于 $v \in V$, 存在 $x \in \mathbb{G}_a$ 使 $\varepsilon(x) = v$, 所以

$$tvt^{-1} = t\varepsilon(x)t^{-1} = \varepsilon(\alpha(t)x) = \varepsilon(x) = v.$$

可见对任意的 $t \in T_\alpha, v \in V, t = vtv^{-1}$. 所以 $V \subseteq C_G(T_\alpha) = Z_\alpha$, 而 $T \subseteq N_G(V)$ 使我们可以作半直积 $T \ltimes V$, 它是 Z_α 内的一个含 T 的可解子群. 所以 $T \ltimes V \subseteq B_\alpha$ 或 $B_{-\alpha}$, 因为 Z_α 内含 T 的 Borel 子群只有这两个. 又,

$$\mathfrak{L}(T \ltimes V) = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{L}(V) = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}_\alpha,$$

所以 $T \ltimes V$ 不在 $B_{-\alpha}$ 中, 从而 $T \ltimes V \subseteq B_\alpha$, $V \subseteq (B_\alpha)_u = U_\alpha$. 但 $\dim V = \dim U_\alpha = 1$, 且 U_α 连通, 所以 $V = U_\alpha$. 以上证明了命题中的 (1) 与 (2).

再证 (3). 显然 $nU_\alpha n^{-1}$ 是 T 不变的, 连通的, 又

$$\mathfrak{L}(nU_\alpha n^{-1}) = \mathrm{Ad}\, n\mathfrak{L}(U_\alpha) = \mathrm{Ad}\, n\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_{\sigma(\alpha)} = \mathfrak{L}(U_{\sigma(\alpha)}).$$

由本命题的 (1), $nU_\alpha n^{-1} = U_{\sigma(\alpha)}$. □

推论 2.6.4　G 由 T 与 U_α $(\alpha \in \Phi(G,T))$ 生成.

证明　已知 G 由 Z_α 生成, 但 Z_α 由 $B_\alpha, B_{-\alpha}$ 生成, 而 $B_{\pm\alpha} = T \ltimes U_{\pm\alpha}$. □

2.6.4　Weyl 房

命题 2.6.5　设 $B \in \mathfrak{B}^T$, 则

(1) $\mathfrak{b} = \mathfrak{t} \bigoplus_{\alpha \in \Phi(B,T)} \mathfrak{g}_\alpha$.

(2) 若 $\alpha \in \Phi(G,T)$, 则 $\Phi(B,T) \cap \{\alpha, -\alpha\}$ 只有一个元, 并且 $\Phi(G,T) = \Phi(B,T) \cup -\Phi(B,T)$.

(3) 存在满映射 $\mathscr{B} : Y(T)_{\mathrm{reg}} \to \mathfrak{B}^T$, 并且在 Z_α 内存在 Borel 子群 $B_\alpha \supseteq T$, 使得 $\langle \alpha, \lambda \rangle > 0 \iff \mathscr{B}(\lambda) \cap Z_\alpha = B_\alpha$.

(4) 设

$$\mathfrak{C}(B) = \{\lambda \in Y(T)_{\mathrm{reg}} \mid \mathscr{B}(\lambda) = B\},$$

则

$$\mathfrak{C}(B) = \{\lambda \in Y(T)_{\mathrm{reg}} \mid \langle \alpha, \lambda \rangle > 0\ \forall \alpha \in \Phi(B,T)\}.$$

(5) 存在 $B^- \in \mathfrak{B}^T_G$, 使 $B \cap B^- = T$; 设 $B = TU$, $B^- = TU^-$, 则

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{b}^- + \mathfrak{b} = \mathfrak{u}^- \oplus \mathfrak{u}^+ \oplus \mathfrak{t}.$$

证明 (1) $\mathfrak{b} = C_{\mathfrak{b}}(T) \bigoplus_{\alpha\in\Phi(B,T)} \mathfrak{b}_\alpha$, 其中

$$\mathfrak{b}_\alpha = \{X \in \mathfrak{b} \mid \mathrm{Ad}(t)X = \alpha(t)X\ \forall t \in T\} \subseteq \mathfrak{g}_\alpha.$$

由于 $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$, 对任意的 $\alpha \in \Phi(B,T)$, 有 $\mathfrak{b}_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha$. 又,

$$C_{\mathfrak{b}}(T) = \mathfrak{L}(C_B(T)) = \mathfrak{L}(T) = \mathfrak{t}.$$

由此证明了 (1).

(2) $\Phi(B,T) \cap \{\alpha, -\alpha\} = \Phi(B,T) \cap \Phi(Z_\alpha, T)$. 但 $B \supseteq T$, 所以 $B \cap Z_\alpha = C_B(T_\alpha)$ 是 Z_α 的 Borel 子群, 即 $B \cap Z_\alpha \in \mathfrak{B}^T_{Z_\alpha}$, 所以 $\mathfrak{L}(B) \cap \mathfrak{L}(Z_\alpha) = \mathfrak{L}(B) \cap C_{\mathfrak{g}}(T_\alpha) = C_{\mathfrak{b}}(T_\alpha) = \mathfrak{L}(C_B(T_\alpha)) = \mathfrak{L}(B \cap Z_\alpha) = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}_\alpha$ 或 $\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$. 由此, $\Phi(B,T) \cap \{\alpha, -\alpha\} = \{\alpha\}$ 或 $\{-\alpha\}$.

上述结果对每个 $\alpha \in \Phi(G,T)$ 都成立, 所以, 对任意的 $\alpha \in \Phi(G,T)$, $\alpha \in \Phi(B,T)$ 或 $\alpha \in -\Phi(B,T)$, 从而

$$\Phi(G,T) = \Phi(B,T) \cup -\Phi(B,T).$$

(3) 参看 2.3 节.

(4) 对任意的 $\alpha \in \Phi(B,T)$, $\mathfrak{C}(B) \subseteq \mathfrak{C}(C_G(T_\alpha)) = \{\lambda \in Y(Z_\alpha, T)_{\mathrm{reg}} \mid \langle \alpha, \lambda \rangle > 0\}$. 所以

$$\mathfrak{C}(B) \subseteq \{\lambda \in Y(Z_\alpha, T)_{\mathrm{reg}} \mid \langle \alpha, \lambda \rangle > 0,\ \forall \alpha \in \Phi(B,T)\}.$$

反过来, 只要证 $\bigcap_{\alpha\in\Phi(B,T)} \mathfrak{C}(C_B(T_\alpha)) \subseteq \mathfrak{C}(B)$. 因为显然有

$$\begin{aligned}
&\{\lambda \in Y(G,T)_{\mathrm{reg}} \mid \langle \alpha, \lambda \rangle > 0,\ \forall \alpha \in \Phi(B,T)\} \\
\subseteq &\bigcap_{\alpha\in\Phi(B,T)} \{\lambda \in Y(Z_\alpha, T)_{\mathrm{reg}} \mid \langle \alpha, \lambda \rangle > 0, \} \\
\subseteq &\bigcap_{\alpha\in\Phi(B,T)} \mathfrak{C}(C_B(T_\alpha)),
\end{aligned}$$

任取 $\lambda \in \bigcap_{\alpha\in\Phi(B,T)} \mathfrak{C}(C_B(T_\alpha))$, 可以证明 $\lambda \in Y(G,T)_{\mathrm{reg}}$. 若此结论不成立, λ 不是正则的, $\mathrm{Im}\lambda$ 是奇异环面, 所以存在 $\alpha \in \Phi(G/I(T), T) = \Phi(G,T)$ 使 $\mathrm{Im}\lambda \subseteq T_\alpha$. 设 $\mathrm{Im}\lambda = S$, 则 $C_G(S) \supseteq C_G(T_\alpha) = Z_\alpha$, 所以 $C_{Z_\alpha}(S) = C_G(S) \cap Z_\alpha = Z_\alpha$ 是半单秩 1 的简约群, 可见 S 是 Z_α 的奇异环面, $\lambda \notin Y(Z_\alpha, T)_{\mathrm{reg}}$, 引起矛盾.

从 (3), 存在 $B' \in \mathfrak{B}^T$, 使 $B' = \mathscr{B}_G(\lambda)$, 但 $\mathscr{B}_{C_G(T_\alpha)}(\lambda) = C_B(T_\alpha)$, 故对任意的 $\alpha \in \Phi(B,T)$, $C_{B'}(T_\alpha) = C_B(T_\alpha)$, 前面的条件可以改为对任意的

$\alpha \in \Phi(G,T)$. 因 $T_\alpha = T_{-\alpha}$. B 与 B' 分别由 $\{C_B(T_\alpha) \mid \alpha \in \Phi(G,T)\}$ 与 $\{C_{B'}(T_\alpha) \mid \alpha \in \Phi(G,T)\}$ 生成, 所以 $B = B'$, $B = \mathscr{B}_G(\lambda)$, 即 $\lambda \in \mathfrak{C}(B)$.

(5) 设 $\lambda \in Y(T)_{\text{reg}}$, 使 $B = \mathscr{B}_G(\lambda)$. 设 $B^- = \mathscr{B}_G(-\lambda)$, 则所有结论可证: 由 (4) 的结果立即可知 $\Phi(B^-,T) = -\Phi(B,T)$; 另一方面 $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}^- = \mathfrak{t}$ 也是显然的, 因此 $\mathfrak{t} = \mathfrak{L}(T) \subseteq \mathfrak{L}(B \cap B^-) \subseteq \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}^- = \mathfrak{t}$, 迫使 $\mathfrak{L}(B \cap B^-) = \mathfrak{t}$, 由此推及 $B \cap B^- = T$; 令 $B_u = U$, $B_u^- = U^-$, 则最后的结论也得出. □

2.6.5　根系

命题 2.6.6　令 $\langle\Phi\rangle$ 表由 $\Phi(G,T)$ 生成的 $X(T)$ 的子群.

(1) $[X(T/Z(G)^0) : \langle\Phi\rangle]$ 有限.

(2) 若 $\alpha, \beta \in \Phi$, α, β 线性相关, 则 $\beta = \pm\alpha$.

(3) 对任意的 $B \in \mathfrak{B}^T$, 在 $X(T)$ 上存在一个全序结构, 使 $\Phi(B,T)$ 为正元.

(4) 设 $V = X(T/Z(G)^0) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, 则 Φ 为 V 内的抽象根系. 该根系的 Weyl 群与 $W(G,T) = N_G(T)/C_G(T)$ 同构.

证明　(1) G 是简约群, $R(G) = Z(G)^0 = Z$ 是一个环面, $C_G(Z) = G$, $C_{\mathfrak{g}}(Z) = \mathfrak{g}$, $Z \subseteq T_\alpha$, 故 $Z \subseteq (\cap T_\alpha)^0$. 反包含也是显然的, 所以 $Z = (\cap T_\alpha)^0$. 若 $\lambda \in Y(T)$ 使对所有的 $\alpha \in \Phi(G,T)$ 有 $\langle\alpha, \lambda\rangle = 0$, 则 $\mathrm{Im}\lambda \subseteq T_\alpha$, 推及 $\mathrm{Im}\lambda \subseteq Z$. 所以作为 $Y(T/Z)$ 的元素, $\lambda = 0$. 所以 $X(T/Z)$ 的子群 $\langle\Phi\rangle$ 与 $X(T/Z)$ 具有相同的秩. 从而 $[X(T/Z) : \langle\Phi\rangle]$ 有限.

(2) α, β 线性相关, 则存在 $m, n \in \mathbb{Z}$, 不同时为零, 使 $m\alpha = n\beta$, 于是 $T_\alpha = T_\beta$, $\beta \in \Phi(Z_\alpha, T) = \{\alpha, -\alpha\}$, 最终得到 $\beta = \pm\alpha$.

(3) 取 $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r\}$ 为 $Y(T)$ 的一个基, 使 $B = \mathscr{B}_G(\lambda_1)$, 对 $0 \neq \alpha \in X(T)$, 若序列 $\langle\alpha, \lambda_1\rangle, \langle\alpha, \lambda_2\rangle, \cdots, \langle\alpha, \lambda_r\rangle$ 中第一个非零的数是正数, 称 $\alpha > 0$. 这样, 得到 $X(T)$ 上的一个全序. 若 $\alpha \in \Phi(B,T)$, 则 $\langle\alpha, \lambda_1\rangle > 0$, 所以 $\alpha > 0$.

(4) 暂时假设已经证明了 $\Phi(G,T)$ 是根系, 先证 $W(G,T)$ 同构于这个根系的 Weyl 群 $W(\Phi)$. 容易看出 $W(G,T) \supseteq W(\Phi)$. 因为上文所说的 $\sigma_\alpha \in W(G,T)$, 而 σ_α 生成了 $W(\Phi)$. 再回忆及 $W(G,T)$ 单传递地作用在集合 $\{\mathfrak{C}(B)\}$ 上以及 $W(\Phi)$ 单传递作用在空间 V 的 Weyl 房上, 所以只要证明这两种 Weyl 房之间有一个一一对应即可. 但由于 $X(T/Z(G)^0)$ 与 $Y(T/Z(G)^0)$ 之间的对偶配对 $\langle\chi, \lambda\rangle$ (它可以扩充为 $X(T/Z(G)^0) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 与 $Y(T/Z(G)^0) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 之间的对偶积, 使它们成为对偶线性空间). 这种一一对应是显然的.

现回头证 $\Phi(G,T)$ 是根系, 即满足定义 2.1.5 中的 (R1) 至 (R4).

(R1) Φ 有限, 张成 V, 不含 0, 都是显然的.

(R2), (R3) 对任意的 $\alpha \in \Phi(G,T)$, $W(Z_\alpha, T) = N_{Z_\alpha}(T)/C_{Z_\alpha}(T) = N_{Z_\alpha}(T)/T \subseteq N_G(T)/T = N_G(T)/C_G(T) = W(G,T)$, 所以 $W(Z_\alpha, T)$ 可

以看成 $W(G,T)$ 的子群. 我们知道, $W(G,T)$ 只有两个元素, 以 σ_α 记其生成元, 则 $\sigma_\alpha^2 = 1$, $\sigma_\alpha(\alpha) = -\alpha$. 取 $\lambda \in Y(T)$ 使 $\sigma_\alpha(\lambda) = -\lambda$, 令 $H_\alpha = \{\chi \in V \mid \langle \chi, \lambda \rangle = 0\}$, 则 σ_α 在超平面 H_α 上是恒等变换, 所以 σ_α 是反射.

σ_α 使 Φ 不变是显然的, 因为它可以看成 $W(G,T)$ 的元素. 而对每个 $\sigma = nT \in W(G,T)$, $\sigma(\beta)$ $(\beta \in \Phi(G,T))$ 所对应的根空间是 $\mathfrak{g}_{\sigma(\beta)} = \operatorname{Ad} n(\mathfrak{g}_\beta)$ (见命题 2.1.10 的证明).

(R4) 由于 $Z(G)^0 = R(G)$, 所以可以假定 G 是半单的. 然后证明对任意的 $\alpha, \beta \in \Phi$, $\sigma_\alpha(\beta) - \beta$ 是 α 的整数倍.

如上指出, 对 $nT = \sigma_\alpha \in W$, $\sigma_\alpha(\beta)$ 实际上由公式 $\operatorname{Ad} n(\mathfrak{g}_\beta) = \mathfrak{g}_{\sigma_\alpha(\beta)}$ 所决定. 又由以上关于 (R3) 的讨论知道实际上可设 $n \in N_{Z_\alpha}(T)$. 故若能证明

$$\operatorname{Ad} Z_\alpha \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta + k\alpha} \right) \subseteq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta + k\alpha},$$

则 (R4) 便得证.

由推论 2.6.4 知 Z_α 是由 $T, U_\alpha, U_{-\alpha}$ 所生成. 显然 T 稳定 $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta + k\alpha}$. 所以只需要证明

$$\operatorname{Ad} U_\alpha \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta + k\alpha} \right) \subseteq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta + k\alpha},$$

这又可以由以下命题推出.

命题 2.6.7 设 G 为简约群, T 为 G 的极大环面. $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ 是有理表示, 对 $\chi \in X^*(T)$, 使

$$V_\chi = \{v \in V \mid \rho(t)v = \chi(t)v,\ \forall t \in T\},$$

则对 $\alpha \in \Phi(G,T)$. 我们有

$$\rho(U_\alpha)V_\chi \subseteq \sum_{k \in \mathbb{Z}^+} V_{\chi + k\alpha}.$$

证明 因 T 可对角化, 故 $V = \sum V_\chi$. 设 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 为 V 的基, v_i 为 $\rho(T)$ 的特征向量. 换句话说, 对应于这个基, $\rho(T)$ 的矩阵是对角矩阵. 对 $t \in T$, 常简写为 $\rho(t) = \operatorname{diag}(t_1, \cdots, t_n)$.

考虑同构

$$\mathbb{G}_a \xrightarrow{\varepsilon_\alpha} U_\alpha \xrightarrow{\rho} \rho(U_\alpha),$$

显然 $\rho\varepsilon_\alpha(x)$ 的系数必为多项式, 即有

$$\rho\varepsilon_\alpha(x)_{ij} = c_0 + c_1 x + \cdots + c_m x^m \quad (c_l \in k).$$

所以

$$\rho\varepsilon_\alpha(\alpha(t)x)_{ij} = c_0 + c_1(\alpha(t)x) + \cdots + c_m(\alpha(t)x)^m.$$

又

$$\rho\varepsilon_\alpha(\alpha(t)x)_{ij} = \rho(t\varepsilon_\alpha(x)t^{-1})_{ij} = t_it_j^{-1}(c_0 + c_1x + \cdots + c_mx^m),$$

因此

$$c_0(1 - t_it_j^{-1}) + c_1(\alpha(t) - t_it_j^{-1})x + \cdots + c_m(\alpha(t)^m - t_it_j^{-1})x^m = 0, \quad \forall x \in k.$$

这使得 x 的所有系数都等于零, 即若 $c_l \neq 0$, 则 $\alpha^l = \gamma$, 其中 $\gamma(t) = t_it_j^{-1}$. 因为 $\alpha \neq 0$, 所以最多只有一个 $c_l \neq 0$. 这就告诉我们, 存在 $c_{ij} \in k$, $k_{ij} \in \mathbb{Z}^+$ 使

$$\rho\varepsilon_\alpha(x)_{ij} = c_{ij}x^{k_{ij}},$$

故

$$\rho(t\varepsilon_\alpha(x)t^{-1})_{ij} = \alpha(t)^{k_{ij}}\rho\varepsilon_\alpha(x)_{ij}.$$

现设 $v_j \in V_\chi$, 则对 $t \in T$,

$$\begin{aligned}\rho(t)\rho\varepsilon_\alpha(x)v_j &= \rho(t\varepsilon_\alpha(x)t^{-1})\rho(t)v_j \\ &= \chi(t)\textstyle\sum_i \alpha(t)^{k_{ij}}\rho\varepsilon_\alpha(x)_{ij}v_i.\end{aligned} \tag{2.2}$$

另一方面,

$$\rho\varepsilon_\alpha(x)v_j = \sum_i \rho\varepsilon_\alpha(x)_{ij}v_i. \tag{2.3}$$

若 v_i 在上式的右边出现, 及 $v_i \in V_{\chi_i}$, 则

$$\rho(t)\rho\varepsilon_\alpha(x)v_j = \sum_i \chi_i(t)\rho\varepsilon_\alpha(x)_{ij}v_i.$$

与 (2.2) 比较, 立刻知道: 若 v_i 在 (2.3) 中出现, 则 $\chi_i = \chi + k_{ij}\alpha$. 定理从此得证.

□

第三章　概齐次向量空间

3.1　概齐次向量空间及其相对不变量

概齐次向量空间的理论是在 20 世纪 70 年代由日本数学家佐藤 (M. Sato), 新谷 (T. Shintani) 和木村 (T. Kimura) 等发展起来的.

定义 3.1.1　设 G 是特征数为 0 的域 k 上的一个连通代数群, V 是有限 n 维 k 向量空间. $\rho: G \to \mathrm{GL}(V)$ 是 G 的有理线性表示. G 通过 ρ 作用在 V 上. 如果 V 中有一个 Zariski 开的 G 轨道 Ω, 就称 (G, ρ, V) 是一个**概齐次向量空间** (prehomogeneous vector space). Ω 亦称**大轨道**. 大轨道里的点称为概齐次向量空间的**一般点**. $S = V - \Omega$ 称为**奇异集**. S 里的轨道称为**奇异轨道**.

从这个定义可以看出, 概齐次线性空间由 $(\rho(G), V)$ 完全确定.

定义 3.1.2　设 f 是 V 上有理函数, 如果存在 G 的一个有理特征标 χ 使得

$$f(\rho(g)x) = \chi(g)f(x), \qquad g \in G, x \in V,$$

则称 f 是一个**相对不变量** (relative invariant), χ 称为 f 的特征标.

当 (G, ρ, V) 是一个概齐次向量空间时, f 被它的特征标 χ 确定到相差一个非零常数倍. 对于任意的 $t \in k^*$, $f(tx)$ 也是特征标 χ 的相对不变量, 因此与 $f(x)$ 相差一个常数倍, 这说明相对不变量是齐次的. G 的有理特征标构成 Abel 群, 因此也可定义线性相关性. 不难验证线性无关特征标对应的相对不变量是代数无关的.

命题 3.1.1　设 (G, ρ, V) 是一个概齐次向量空间, S 的余维数 1 的不可约分支为 $S_1, \cdots, S_r$, 并设 S_i 的方程为 $f_i(x) = 0$. 则 f_i 是代数无关的相对不变量, 而且所有相对不变量都具有以下形式:

$$cf_1^{n_1} \cdots f_r^{n_r}, \qquad c \in k^*, n_i \in \mathbb{Z}.$$

对于 $x \in V$, 记 x 在 G 内的稳定子群为

$$G_x = \{g \in G \mid \rho(g)x = x\}.$$

Ω 内两个一般点的稳定子群是共轭的. 把由 G_x 以及 G 的换位子生成的子群记为 G_1, 则 G 的特征标 χ 与一个相对不变量关联的充分必要条件是 χ 局限在 G_1 上

是平凡的. 这样的特征标构成一个子群 $X_1(G)$, 这是以命题中的 χ_i 为基的自由 Abel 群.

设 V^* 是 V 的对偶空间, ρ^* 是 ρ 的逆步表示. 但 (G,ρ^*,V^*) 不一定是概齐次向量空间.

我们先看一个例子.

例 3.1.1 设 $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $V = M_n(\mathbb{C})$. G 在 V 上的作用定义为

$$\rho((A,B))X = AXB^T, \qquad A,B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), X \in M_n(\mathbb{C}).$$

显然 $\mathrm{rank}(AXB^T) = \mathrm{rank}(X)$, 两个方阵在同一个 G 轨道里的充分必要条件是它们有相同的秩. 因此 V 中共有 $n+1$ 个 G 轨道. 其中以 $\mathrm{rank}(X) = n$ 的轨道 Ω 为最大:

$$\Omega = \{X \in M_n(\mathbb{C}) \mid \det(X) \neq 0\}$$

是 V 的一个 Zariski 开子集. 我们把奇异矩阵的集合 $V - \Omega$ 记为 S, S 是由 $\det(X) = 0$ 定义的不可约超曲面. 设 $P(X) = \det(X)$, 可得

$$P(\rho((A,B))X) = \det(AB)P(X).$$

称 P 是一个相对不变量, 对应的特征标为

$$\chi((A,B)) = \det(AB).$$

不难证明相对不变多项式一定为 cP^r, 其中 $c \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{N}$.

另一方面, 通过双线性型 $\mathrm{Tr}(XY)$ 可以把 V 的对偶空间等同于 V. ρ 的逆步线性变换 ρ^* 可以定义为

$$\rho^*((A,B))X = B^{-T}XA^{-1},$$

这个逆步表示具有与 ρ 相同的性质. (G,ρ^*,V) 也是概齐次向量空间, 它的奇异集 $S^* = S$, 相对不变量 $Q = P$.

现在我们把 G 和 G_1 的李代数记为 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_1$. 设 ω 是在 $\mathfrak{g}_1$ 上取零值的 $\mathfrak{g}$ 的线性形式. 若 $x \in \Omega$, 由于 $\rho(G)x = \Omega$ 是开集, 可得 $\rho(\mathfrak{g})x = V$. 线性映射

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1 &\longrightarrow \quad V \\ A \quad &\longmapsto \rho(A)x \end{aligned}$$

是既单又满的. 由于线性形式 ω 在 $\mathfrak{g}_x$ 上取零值, 可以用以下公式

$$\langle \varphi_\omega(x), \rho(A)x \rangle = \omega(A) \tag{3.1}$$

定义 V 上一个线性形式 $\varphi_\omega(x)$. 这样就确定了一个有理映射 $\varphi_\omega : \Omega \to V$. 又因 ω 在 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 上恒等于零, 故对任意的 $g \in G$, $\omega(\mathrm{Ad}(g)A) = \omega(A)$. 对任意的 $x \in \Omega$, 有

$$\begin{aligned}\langle \rho^*(g^{-1})\varphi_\omega(\rho(g)x), \rho(\mathrm{Ad}(g)A)x \rangle &= \langle \varphi_\omega(\rho(g)x), \rho(g)\rho(\mathrm{Ad}(g)A)x \rangle \\ &= \langle \varphi_\omega(\rho(g)x), \rho(A)\rho(g)x \rangle \\ &= \omega(A) = \omega(\mathrm{Ad}(g)A),\end{aligned}$$

这样就有 $\rho^*(g^{-1})\varphi_\omega(\rho(g)x) = \varphi_\omega(x)$, 也就是

$$\varphi_\omega(\rho(g)x) = \rho^*(g)\varphi_\omega(x). \tag{3.2}$$

因此 φ_ω 的像是 V 的一个 G 轨道.

定义 3.1.3　设 (G, ρ, V) 是概齐次向量空间, 如果存在特征标 χ 的相对不变量 f, 使得 $\varphi_{\mathrm{d}\chi}$ 的微分在某个一般点处是一一的, 则称这个概齐次向量空间是**正则**的 (regular).

命题 3.1.2　若 (G, ρ, V) 是正则概齐次向量空间, 它的对偶空间 (G, ρ^*, V^*) 也是正则概齐次向量空间.

证明　设 $\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{d}\chi}$ 在一般点 $x \in \Omega$ 处是一一的. 记 $y = \varphi_{\mathrm{d}\chi}(x)$. 由 (3.2) 式知 $\Omega^* = \varphi_{\mathrm{d}\chi}(\Omega)$ 是 V^* 的一个 G 轨道. 又因微分映射 $\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{d}\chi}$ 在 x 是一一的, 可得 $\dim \Omega^* = \dim \Omega = \dim V$, 因此 Ω^* 是 V^* 的一个大轨道, 而且 $\varphi_{\mathrm{d}\chi}$ 把 Ω 一一地映射到 Ω^* 上. 这就证明了 (G, ρ^*, V^*) 是概齐次向量空间. 如果 $g \in G_y$, 则从 (3.2) 式可得 $\varphi_{\mathrm{d}\chi}(\rho(g)x) = \varphi_{\mathrm{d}\chi}(x)$, 由 $\varphi_{\mathrm{d}\chi}$ 的一一性知 $\rho(g)x = x$, 即 $G_y \subseteq G_x$. 又因 $\dim G_y = \dim G_x$, 所以 $G_y = G_x$. 这样, 它们有相同的李代数. 从而由 ρ^* 诱导的子代数 $\mathfrak{g}_1^*$ 与 $\mathfrak{g}_1$ 相同. 存在 V^* 内有理映射 $\varphi^*_{-\mathrm{d}\chi}$ 使得

$$\langle \rho^*(A)y, \varphi^*_{-\mathrm{d}\chi}(y) \rangle = -\mathrm{d}\chi(A),$$

公式 (3.1) 可以写成

$$\langle \rho^*(A)y, x \rangle = -\mathrm{d}\chi(A).$$

由于 $\rho^*(\mathfrak{g})y = V^*$, 比较上面两个等式, 可得 $\varphi^*_{-\mathrm{d}\chi}(y) = x$. 也就是说 $\varphi_{\mathrm{d}\chi}$ 与 $\varphi^*_{-\mathrm{d}\chi}$ 互逆. 注意到 $\mathrm{d}\chi^* = -\mathrm{d}\chi$, 可见 (G, ρ^*, V^*) 也是正则概齐次线性空间.　□

命题 3.1.3　如果 (G,ρ,V) 是概齐次向量空间，则 (G,ρ,V) 正则当且仅当存在一个相对不变量 f，其 Hesse 行列式 $H_f(x)=\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)$ 在某个一般点不等于零.

证明　设 f 是特征标为 χ 的相对不变量，经过简单的计算可以得到

$$\varphi_{\mathrm{d}\chi}=\frac{\mathrm{d}f}{f}.$$

由 Euler 恒等式可以验证，若 $r=\deg(f)>1$，则在 V^* 里取 V 的对偶基，可得

$$\det(\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{d}\chi}(x))=\frac{H_f(x)}{(1-r)f(x)^n}.$$

□

以后考虑 G 为简约群的情形. 如果 ρ 是不可约表示，则 $\rho(G)$ 也是简约群.

定理 3.1.4　设 G 是简约群，(G,ρ,V) 是概齐次向量空间. 则以下 3 个条件是等价的:

(1) (G,ρ,V) 是正则的;

(2) 对于大轨道上的点 $x\in\Omega$，G_x 是简约群;

(3) S 是超曲面.

命题 3.1.5　设 G 是简约群，(G,ρ,V) 是不可约正则概齐次向量空间. 则 S 是一个不可约的超曲面. 在不计非零常数因子的条件下，此概齐次向量空间的不可约相对不变多项式是唯一的，而且所有的相对不变量都是这个多项式的幂.

3.2　与概齐次向量空间相关联的 ζ 函数

现在设 $k=\mathbb{C}$，G 是简约群，(G,ρ,V) 是不可约正则概齐次向量空间. 从而 S 是一个不可约的超曲面. 假设 S 的定义多项式是 $P(x)$，则 P 是不可约的相对不变量，并设 $d=\deg P$. 记 P 的特征标为 χ. (G,ρ^*,V^*) 也是不可约正则概齐次向量空间. 把它的大轨道记为 Ω^*，奇异集记为 S^*，则 S^* 也是一个不可约的超曲面，记 S^* 的定义多项式是 Q，则 $\deg Q=d$. P 与 Q 都是 G 的相对不变量，满足

$$P(\rho(g)x)=\chi(g)P(x),\qquad \forall g\in G,\ x\in V,$$

$$Q(\rho^*(g)x^*)=\chi(g)^{-1}Q(x^*),\qquad \forall g\in G,\ x^*\in V^*.$$

设 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，定义微分算子

$$P(\partial)=P\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right),$$

可以证明, 对 P 与 Q 乘以适当的常数因子后, 存在 d 次多项式 $b(s)$ 使得

$$Q(\partial)P^s = b(s)P^{s-1}$$

以及

$$P(\partial)Q^s = \overline{b}(s)Q^{s-1},$$

这里 $\overline{b}(s) = \overline{b(\overline{s})}$. 而且 d 是 $2n$ $(n = \dim V)$ 的因子,

$$\det \rho(g)^2 = \chi(g)^{\frac{2n}{d}}.$$

再设 (G, ρ, V) 定义在实数域上, 也就是说 G 和 V 都有一个实形式 $G_{\mathbb{R}}$ 与 $V_{\mathbb{R}}$, 使得 $\rho(G_{\mathbb{R}})V_{\mathbb{R}} = V_{\mathbb{R}}$. 并记 $\Omega_{\mathbb{R}} = \Omega \cap V_{\mathbb{R}}$, $S_{\mathbb{R}} = S \cap V_{\mathbb{R}}$. 此时相对不变多项式 P 与 Q 都可以取成实系数的. 于是 $b(s)$ 也是实系数的, $b(s) = \overline{b}(s)$. 再设 $G_{\mathbb{R}}$ 的单位连通分支是 $G_{\mathbb{R}}^0$, $\Omega_{\mathbb{R}}$ 的连通分支是 $V_1, \cdots, V_l$, 它们也是 $G_{\mathbb{R}}^0$ 在 $V_{\mathbb{R}}$ 内的开轨道. P 在每个连通分支上都有确定的符号. 令

$$P(x) = \varepsilon_i |P(x)|, \qquad x \in V_i,\ \varepsilon_i = \pm 1.$$

适当选取 $V_{\mathbb{R}}$ 的基, 可以把 $\Omega_{\mathbb{R}}$ 分解成 l 个 $G_{\mathbb{R}}^0$ 轨道 $V_1^*, \cdots, V_l^*$, 而且可以假设

$$Q(x^*) = \varepsilon_i |Q(x^*)|, \qquad x^* \in V_i^*.$$

保持与前式相同的符号 ε_i.

对于正整数 m, 令

$$b_m(s) = b(s)b(s-1)\cdots b(s-m+1).$$

可得

$$Q(\partial)^m |P(x)|^s = \varepsilon_i^m b_m(s) |P(x)|^{s-m}, \qquad x \in V_i,\ s \in \mathbb{C}$$

$$P(\partial)^m |Q(x^*)|^s = \varepsilon_i^m b_m(s) |Q(x^*)|^{s-m}, \qquad x^* \in V_i^*,\ s \in \mathbb{C}$$

对于 $V_{\mathbb{R}}$ 上 Schwartz 函数的空间 $\mathscr{S}(V_{\mathbb{R}})$ 中的任意函数 f, 定义

$$\Phi_i(f, s) = \int_{V_i} f(x)|P(x)|^s \mathrm{d}x, \qquad 1 \leqslant i \leqslant l,\ \mathrm{Re}(s) > 0.$$

类似地, 对 $f^* \in \mathscr{S}(V_{\mathbb{R}}^*)$, 定义

$$\Phi_i^*(f^*, s) = \int_{V_i^*} f^*(x^*)|Q(x^*)|^s \mathrm{d}x^*, \qquad 1 \leqslant i \leqslant l,\ \mathrm{Re}(s) > 0.$$

显然 $\Phi_i(f,s)$ 与 $\Phi_i^*(f^*,s)$ 在右半平面关于 s 全纯, 另可证明它们可以解析延拓为整个复平面上的亚纯函数, 而且满足

$$\Phi_i(Q(\partial)^m f,s)=(-1)^{dm}\varepsilon_i^m b_m(s)\Phi_i(f,s-m),$$

$$\Phi_i^*(P(\partial)^m f^*,s)=(-1)^{dm}\varepsilon_i^m b_m(s)\Phi_i^*(f^*,s-m),$$

其中 m 取正整数值.

对任意的 $f\in\mathscr{S}(V_{\mathbb{R}})$ 以及 $f^*\in\mathscr{S}(V_{\mathbb{R}}^*)$, 定义它们的 Fourier 变换为

$$\hat{f}(x^*)=\int f(x)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(x,x^*)}\mathrm{d}x$$

与

$$\hat{f}^*(x)=\int f^*(x^*)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(x,x^*)}\mathrm{d}x^*.$$

设

$$b(s)=b_0(s-c_1)\cdots(s-c_d),\qquad b_0\in\mathbb{R}-\{0\},$$

$$\gamma(s)=\prod_{i=1}^{d}\Gamma\left(s+c_i+\frac{n}{d}\right).\tag{3.3}$$

则可得到以下定理:

定理 3.2.1 *存在次数不超过 d 的多项式 u_{ij},u_{ij}^* $(1\leqslant i,j\leqslant l)$, 使得*

$$\Phi_i\left(\hat{f}^*,s-\frac{n}{d}\right)=\gamma\left(s-\frac{n}{d}\right)(2\pi)^{-ds}|b_0|^s\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}ds}{2}}\sum_{j=1}^{l}u_{ij}(\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}s})\Phi_j^*(f^*,-s),$$

$$\Phi_i^*\left(\hat{f},s-\frac{n}{d}\right)=\gamma\left(s-\frac{n}{d}\right)(2\pi)^{-ds}|b_0|^s\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}ds}{2}}\sum_{j=1}^{l}u_{ij}^*(\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}s})\Phi_j(f,-s).$$

再假设概齐次线性空间 (G,ρ,V) 定义在 $\mathbb{Q}$ 上, 使得 $V_{\mathbb{Q}}$ 有一个 $\mathbb{Z}$ 形式 $V_{\mathbb{Z}}\subset V_{\mathbb{Q}}$, 并记

$$G_{\mathbb{Z}}=\{g\in G_{\mathbb{Q}}\mid\rho(g)V_{\mathbb{Z}}=V_{\mathbb{Z}}\}.$$

多项式 P,Q 可被取成有理系数的, 而且可以假设对偶空间 (G,ρ^*,V^*) 也有同样的性质.

设

$$G^1=\{g\in G\mid\chi(g)=1\},$$

由于 χ 是 G 的定义在 $\mathbb{R}$ 上的有理特征标, 因此 G^1 也是定义在 $\mathbb{R}$ 上的简约代数群. 设 $\Gamma=G_{\mathbb{R}}^1\cap G_{\mathbb{Z}}$, $V_{\mathbb{Z}}'=V_{\mathbb{Z}}-V_{\mathbb{Z}}\cap S$.

我们再假设以下积分

$$\int_{G_{\mathbb{R}}^1/\Gamma}\sum_{x\in V_{\mathbb{Z}}'}f(\rho(g)x)\mathrm{d}g \tag{3.4}$$

对于 $f\in\mathscr{S}(V_{\mathbb{R}})$ 绝对收敛, 并且定义了一个缓增的广义函数. 这个假设实际上是要除去某些小维数的情形. 最后再假定 $S_{\mathbb{R}}$ 只有有限多个 $G_{\mathbb{R}}^1$ 轨道. 这些假设保证了当 $\mathrm{Re}(s)\gg 0$ 时所出现的那些积分的收敛性.

对 $x\in V_{\mathbb{Q}}'=V_{\mathbb{Q}}-V_{\mathbb{Q}}\cap S$, 记 x 在 $G_{\mathbb{R}}$ 里的稳定子群为 G_x, 显然有 $G_x\subset G_{\mathbb{R}}^1$. 记 $\Gamma_x=\Gamma\cap G_x$. 并设

$$\mu(x)=\mathrm{vol}(G_x/\Gamma_x). \tag{3.5}$$

$\mu(x)$ 称为在 x 点的密度. 对于 $V_{\mathbb{Q}}$ 里的一个 Γ 不变格 L, 记 $L_i=L\cap V_i\ (1\leqslant i\leqslant l)$, $L'=L\cap V_{\mathbb{Q}}'=\bigcup_{i=1}^{l}V_i$. 这样就可以定义 Dirichlet 级数

$$\xi_i(s,L)=\sum_{x\in L_i/\Gamma}\mu(x)|P(x)|^{-s},\qquad 1\leqslant i\leqslant l,$$

以及

$$\xi_i^*(s,L^*)=\sum_{x^*\in L_i^*/\Gamma}\mu^*(x^*)|Q(x^*)|^{-s},\qquad 1\leqslant i\leqslant l.$$

定理 3.2.2 设 (G,ρ,V) 是满足上述条件的概齐次线性空间, 则函数 $\xi_i(s,L)$ 以及 $\xi_i^*(s,L^*)\ (1\leqslant i\leqslant l)$ 当 $\mathrm{Re}(s)\gg 0$ 时有定义且解析, 它们可以解析延拓成 $\mathbb{C}$ 上亚纯函数, 并且满足以下函数方程:

$$\begin{aligned}\xi_i^*\left(\frac{n}{d}-s,L^*\right)&=\mathrm{vol}(V_{\mathbb{R}}^*/L^*)^{-1}(2\pi)^{-ds}\gamma\left(s-\frac{n}{d}\right)|b_0|^s\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}ds}{2}}\\&\quad\times\sum_{j=1}^{l}u_{ji}(\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}s})\xi_j(s,L),\\\xi_i\left(\frac{n}{d}-s,L\right)&=\mathrm{vol}(V_{\mathbb{R}}/L)^{-1}(2\pi)^{-ds}\gamma\left(s-\frac{n}{d}\right)|b_0|^s\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}ds}{2}}\\&\quad\times\sum_{j=1}^{l}u_{ji}^*(\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}s})\xi_j^*(s,L^*).\end{aligned}$$

这些 Dirichlet 级数 $\xi_i(s,L)$ 以及 $\xi_i^*(s,L^*)\ (1\leqslant i\leqslant l)$ 被称为**与概齐次向量空间相关联的 ζ 函数**.

定理证明的思路如下：对于 $f\in\mathscr{S}(V_{\mathbb{R}})$, $f^*\in\mathscr{S}(V_{\mathbb{R}}^*)$, 考虑积分

$$Z(f,L,s)=\int_{G_{\mathbb{R}}^0/\Gamma}\chi(g)^s\sum_{x\in L'}f(\rho(g)x)\mathrm{d}g,$$

$$Z^*(f^*, L^*, s) = \int_{G_{\mathbb{R}}^0/\Gamma} \chi(g)^{-s} \sum_{x^* \in L^{*\prime}} f(\rho^*(g)x^*)\mathrm{d}g.$$

然后证明

$$Z(f, L, s) = \sum_{i=1}^{l} \xi_i(s, L)\Phi_i\left(f, s - \frac{n}{d}\right),$$

$$Z^*(f^*, L^*, s) = \sum_{i=1}^{l} \xi_i^*(s, L^*)\Phi_i^*\left(f^*, s - \frac{n}{d}\right).$$

对 $f \in \mathscr{S}(V_{\mathbb{R}}^*)$, 由 Poisson 公式,

$$\sum_{x^* \in L^*} f^*(x^*) = \mathrm{vol}(V_{\mathbb{R}}^*/L^*)^{-1} \sum_{x \in L} \hat{f}^*(x),$$

可以推导得

$$Z^*\left(f^*, L^*, \frac{n}{d} - s\right) = \mathrm{vol}(V_{\mathbb{R}}^*/L^*)^{-1} Z(\hat{f}^*, L, s).$$

然后利用定理 3.2.1 的结论, 就能得到定理 3.2.2.

例 3.2.1　我们继续研究例 3.1.1. 由 Capelli 恒等式, 可得

$$Q(\partial)P(x)^s = b(s)P(x)^{s-1},$$

其中

$$b(s) = s(s+1)\cdots(s+n-1).$$

根据公式 (3.3), 有

$$\gamma(s) = \Gamma(s+1)\Gamma(s+2)\cdots\Gamma(s+n).$$

在 (G, ρ, V) 里可以定义一个 $\mathbb{R}$ 结构:

$$G_{\mathbb{R}} = \{(A, \overline{A}) \mid A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\},$$

$$V_{\mathbb{R}} = \{X \in V \mid \overline{X}^T = X\},$$

$$G_{\mathbb{R}}^0 = G_{\mathbb{R}}.$$

通过映射

$$\begin{aligned} G_{\mathbb{R}} &\longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \\ (A, \overline{A}) &\longmapsto A, \end{aligned}$$

可以把 $G_{\mathbb{R}}$ 等同于 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, 则对 $A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, 有 $\rho(A)X=AX\overline{A}^T$, $\chi(A)=|\det A|^2$, 而且

$$G_{\mathbb{R}}^1=\{A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\mid|\det A|=1\}.$$

此外 $\Omega_{\mathbb{R}}=V_{\mathbb{R}}-S_{\mathbb{R}}$ 有连通分支分解

$$\Omega_{\mathbb{R}}=V_0\cup V_1\cup\cdots\cup V_n,$$

其中 V_i 是有 i 个正特征值, $n-i$ 个负特征值的 n 阶 Hermite 矩阵的集合.

现在设 K 是虚二次域, $K_{\mathbb{Z}}$ 是 K 的整数环. 则存在 (G,ρ,V) 的 $\mathbb{Q}$ 结构:

$$G_{\mathbb{Q}}=\{(A,\overline{A})\mid A\in\mathrm{GL}_n(K)\},$$

$$G_{\mathbb{Z}}=\{(A,\overline{A})\mid A\in\mathrm{GL}_n(K_{\mathbb{Z}})\},$$

$$V_{\mathbb{Q}}=\{X\in M_n(K)\mid\overline{X}^T=X\},$$

$$V_{\mathbb{Z}}=\{X\in M_n(K_{\mathbb{R}})\mid\overline{X}^T=X\},$$

且 $\Gamma=G_{\mathbb{Z}}$.

可以证明: (G,ρ,V) 及它的 $\mathbb{Q}$ 结构满足 (3.4) 所述的条件. 设 $L\in V_{\mathbb{Q}}$ 是一个 $G_{\mathbb{Z}}$ 不变格, $L_i=V_i\cap L$. 则可定义 Dirichlet 级数:

$$\xi_i(s,L)=\sum_{X\in L_i/\Gamma}\mu(X)|\det X|^{-s},$$

其中 $\mu(X)$ 由公式 (3.5) 定义.

佐藤和新谷[320] 证明了 $\xi_i(s,L)$ 以及 $\xi_i(s,L^*)$ $(0\leqslant i\leqslant n$, L^* 是 L 的对偶格) 在 $\mathrm{Re}\,s>n$ 时绝对收敛, 而且可以解析延拓成整个复平面上的亚纯函数, 它们满足函数方程

$$\xi_i(n-s,L)=v(V_{\mathbb{R}}/L)^{-1}(2\pi)^{-ns}\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma(s-k)\mathrm{e}^{\frac{\pi ins}{2}}\times\sum_{j=1}^{n}u_{ji}(\mathrm{e}^{-\pi is})\xi_j(s,L^*),$$

其中

$$u_{ij}(z)=(-1)^{(n-i)(n-1)}\pi^{\frac{n(n-1)}{2}}\sum_{k=\max(0,i+j-n)}^{\min(i,j)}C_j^kC_{n-j}^{i-k}z^{i+j-2k},\quad 0\leqslant i,j\leqslant n.$$

函数 $\xi_i(s,L)$ 只在 $s=n,n-1,\cdots,1$ 处有单极点.

与不定二次型相关联的 Epstein ζ 函数以及 Siegel 的 Dirichlet 级数都是与概齐次向量空间相关联的 ζ 函数的例子. 新谷还定义了与二元整三次型关联的 ζ 函数, 并得到了与判别式等于 n 的不可约整二元三次型的类数有关的一些渐近公式.

第四章　代数群的算术性质

4.1　典　型　群

设 Ω 是代数闭域, Ω 在素域上的超越次数为无限, 取 $\mathrm{GL}(n,\Omega)$ 内的代数群 G, 则有 $\Omega[G]=\Omega[T]/I$, $I=\{f\in\Omega[T]\mid f(g)=0\ \forall g\in G\}$ 为多项式环 $\Omega[T]$ 的理想. 现设有域 $k\subseteq\Omega$ (k 不一定代数闭), 及 I 的生成元 $f_1,\cdots,f_m\in k[T]$, 则我们说 G 是定义在 k 上, 或说 G 是 k 群并用符号 G/k 记这件事. 同样, 若代数群同态 $\varphi: G_1\to G_2$ 是由 $k[T]$ 中的多项式给出及 G_1, G_2 均在 k 上定义, 则我们说 φ 在 k 上定义, 常记这事实为 $\varphi: G_1\to G_2/k$ 或 $G_1\xrightarrow[k]{\varphi}G_2$, 以 $\mathrm{Aut}_k G$ 记定义在 k 上的 G 的自同构. 若 G 在 k 上定义, 则 G 的 k 有理点是指

$$G(k)=G\cap\mathrm{GL}(n,k).$$

若 σ 是域 Ω 的自同构及 $g=(g_{ij})\in G\subseteq\mathrm{GL}(n,\Omega)$, 我们以 ${}^{\sigma}G$ 记 $\{{}^{\sigma}g\mid g\in G\}$, 其中 ${}^{\sigma}g=({}^{\sigma}g_{ij})$.

如果我们用群概形的语言就不必假设有 Ω 使 $G\subseteq\mathrm{GL}(n,\Omega)$.

4.1.1　殆单代数群

设 $\overline{k}$ 为 k 的代数闭包.

定理 4.1.1　设 G, G' 为 $\overline{k}$ 上半单代数群, T, T' 分别为 G, G' 的极大环面, 如果有一同构 $\varphi_T: T\to T'$, 使

$$\varphi_T^t:\Phi(G',T')\to\Phi(G,T)$$

为一同构, 则 φ_T 可以扩张为 $\varphi_G: G\to G'$, 这是一个代数群的同构.

证明　参见 [169] p.197, 定理 32.1. □

定义 4.1.1　设 G 是代数群, 如果 $G/\overline{k}$ 是中心有限的, 且所有真正规 $\overline{k}$ 子群含于 $G/\overline{k}$ 的中心, 则称 G 是 $\overline{k}$ 上**殆单代数群** (almost simple algebraic group).

命题 4.1.2　G 为 $\overline{k}$ 上单连通半单代数群, 则存在 $\overline{k}$ 上殆单单连通代数群 G_i $(1\leqslant i\leqslant r)$, 使

$$G\cong G_1\times\cdots\times G_r.$$

证明　参见 [169] p.167, 定理 27.5. □

4.1.2　非交换上同调

我们知道, 若 A 为交换群, 群 G 作用于 A 上, 则可以定义上同调群 $H^n(G,A)$. 若 A 为非交换群, 我们现在对 $n=0,1$ 作相应的定义.

定义 4.1.2　设群 G 作用在群 A 上,

(1) $H^0(G,A)={}^GA=\{a\in A\mid g\cdot a=a,\ \forall g\in G\}$,

(2) $H^1(G,A)$ 可如下定义:

映射 $G\to A: s\mapsto a_s$ 若对任意的 $s,t\in G$, 满足

$$a_{st}=a_s({}^sa_t),$$

则称 (a_s) 为 G 的系数在 A 中的 1 **上闭链**, 以 $Z^1(G,A)$ 记 G 的系数在 A 中的所有上闭链的集合.

如果 $(a_s),(b_s)$ 是两个 1 上闭链, 且存在 $c\in A$ 使

$$b_s=c^{-1}a_s\,{}^sc,\qquad \forall s\in G,$$

则称这两个上闭链等价. 易证这确实是一个等价关系. 以 $[a_s]$ 记 (a_s) 所在的等价类, 则定义

$$H^1(G,A)=\{[a_s]\mid (a_s)\in Z^1(G,A)\},$$

称为 G 的系数在 A 中的 1 **上同调群**.

$H^1(G,A)$ 的单位元就是单位上同调 $1:G\to A:s\mapsto 1$. 我们同样可以有正合列的概念.

命题 4.1.3　设

$$1\longrightarrow A\xrightarrow{k}B\xrightarrow{p}C\longrightarrow 1$$

是一个 G 群正合列, 则

(1) 存在映射 i_0,p_0,δ_0,v_1,p_1, 使以下序列正合:

$$\begin{aligned}1\longrightarrow H^0(G,A)&\xrightarrow{i_0}H^0(G,B)\xrightarrow{p_0}H^0(G,C)\\&\xrightarrow{\delta_0}H^1(G,A)\xrightarrow{v_1}H^1(G,B)\xrightarrow{p_1}H^1(G,C).\end{aligned}$$

(2) 若

$$1\longrightarrow A\xrightarrow{k}B\underset{j}{\overset{p}{\rightleftarrows}}C\longrightarrow 1$$

为分裂正合列 (此即: $p\circ j=\mathrm{id}|_C$), 则

$$H^1(G,B)\xrightarrow{p_1}H^1(G,C)\longrightarrow 1$$

为正合的.

4.1.3 k 形

定义 4.1.3 设 L/k 是一个域扩张, $\tilde{G}$ 为一个定义在 L 上的代数群. 若 G 为定义在 k 上的代数群, 且存在定义在 L 上的同构 $f:\tilde{G}\to G$, 则称 G 为 $\tilde{G}$ 的一个 k 形 (或 L/k 形).

例 4.1.1 由

$$\mathrm{SU}(1,1)=\{g\in M_2(\mathbb{C})\mid {}^t\bar{g}Jg^{-1}=J\},$$

其中 $J=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$. 设 $G(\mathbb{R})=\mathrm{SU}(1,1)$, $\tilde{G}(\mathbb{R})=\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. 则 $\mathrm{SU}(1,1)/\mathbb{R}\ncong\mathrm{SL}(2)/\mathbb{R}$, 但 $\mathrm{SU}(1,1)/\mathbb{C}=\mathrm{SL}(2)/\mathbb{C}$.

设 L/k 是一个 Galois 扩张, $\mathrm{Gal}\,(L/k)$ 为 Galois 群. 记

$$S(L/k,\tilde{G})=\{G\mid G\text{ 是 }\tilde{G}\text{ 的一个 }L/k\text{ 形}\}.$$

若 $G,G'\in S(L/k,\tilde{G})$, 并有定义在 k 上的同构 $h:G\to G'$, 则称 G 与 G' 等价, 并把 G 所在的等价类记为 $[G]$. 记

$$\mathscr{S}(L/k,\tilde{G})=\{[G]\mid G\in S(L/k,\tilde{G})\}.$$

对 $s\in\mathrm{Gal}\,(L/k)$ 及同构 $f:G_1\to G_2/L$, 定义

$${}^sf(g)=sf(s^{-1}\cdot g),\qquad\forall g\in G_1,$$

则 ${}^sf$ 为 $G_1\to G_2$ 的同态, 特别对 $f\in\mathrm{Aut}_L(\tilde{G})$, ${}^sf\in\mathrm{Aut}_L(\tilde{G})$. 这样, $\mathrm{Aut}_L(\tilde{G})$ 为一个 $\mathrm{Gal}\,(L/k)$ 群. 注意到群 $\mathrm{Aut}_L(\tilde{G})$ 未必交换, 应用 4.1.2 节中的非交换上同调理论, 我们有 1 上同调集 $H^1(\mathrm{Gal}\,(L/k),\mathrm{Aut}_L(\tilde{G}))$.

对 $G\in S(L/k,\tilde{G})$, 我们有同构 $f:\tilde{G}\to G/L$. 定义映射

$$\begin{aligned}a:\mathrm{Gal}\,(L/k)&\longrightarrow\mathrm{Aut}_L(\tilde{G})\\ s&\longmapsto f^{-1}\circ{}^sf.\end{aligned}$$

我们以 a_s 记 $a(s)=f^{-1}\circ{}^sf$.

命题 4.1.4

$$a_s\in Z^1(\mathrm{Gal}\,(L/k),\mathrm{Aut}_L(\tilde{G})).$$

证明　对 $s,t\in \mathrm{Gal}(L/k)$,

$$\begin{aligned} a_{st} &= f^{-1}\circ {}^{st}f = f^{-1}\circ {}^{s}f\circ {}^{s}f^{-1}\circ {}^{st}f \\ &= (f^{-1}\circ {}^{s}f)^{s}(f^{-1}\circ {}^{t}f) \\ &= a_s\circ {}^{s}a_t. \end{aligned}$$

□

若 $[G]=[G_1]\in \mathscr{S}(L/k,\tilde{G})$, 则有同构

$$f:\tilde{G}\longrightarrow G/L,\qquad f_1:\tilde{G}\longrightarrow G_1/L$$

及

$$h:G_1\longrightarrow G/k.$$

从 f 定义:

$$a_s=f^{-1}\circ {}^{s}f.$$

从 f_1 定义:

$$b_s=f_1^{-1}\circ {}^{s}f_1.$$

设 $c=f^{-1}hf_1\in \mathrm{Aut}_L(\tilde{G})$, 则由

$$\begin{aligned} (f^{-1}hf_1)^{-1}(f^{-1}\,{}^{s}f)({}^{s}f^{-1}\,{}^{s}h\,{}^{s}f_1) &= (f_1^{-1}h^{-1}f)(f^{-1}\,{}^{s}f)({}^{s}f^{-1}h\,{}^{s}f_1) \\ &= f^{-1}\,{}^{s}f_1 \end{aligned}$$

(注意到 h 定义于 k, 故 ${}^{s}h=h$), 得

$$c^{-1}a_s\,{}^{s}c=b_s.$$

这就是说,

$$[a_s]=[b_s]\in H^1(\mathrm{Gal}(L/k),\mathrm{Aut}_L(\tilde{G})).$$

因此我们可以定义映射

$$\begin{aligned} \theta:\mathscr{S}(L/k,\tilde{G}) &\longrightarrow H^1(\mathrm{Gal}(L/k),\mathrm{Aut}_L(\tilde{G})) \\ [G] &\longmapsto [a_s]. \end{aligned}$$

命题 4.1.5　θ 是双射.

证明　先证 θ 是单的：设 $[G'],[G]\in \mathscr{S}(L/k,\tilde{G})$, 且 $\theta([G])=\theta([G'])$. 则有同构

$$f:\tilde{G}\longrightarrow G/L,\qquad f_1:\tilde{G}\longrightarrow G'/L$$

及

$$\theta([G]) = [a_s], \qquad a_s = f^{-1}\, {}^s f,$$

$$\theta([G']) = [b_s], \qquad b_s = f_1^{-1}\, {}^s f_1.$$

从 $[a_s] = [b_s]$ 可以得出：存在 $c \in \mathrm{Aut}_L(\tilde{G})$, 使 $c^{-1} a_s\, {}^s c = b_s$. 从 $c^{-1} f^{-1}\, {}^s f\, {}^s c = f_1^{-1}\, {}^s f_1$ 可得 $fcf_1^{-1} = {}^s(fcf_1^{-1})$. 由 $s \in \mathrm{Gal}(L/k)$ 的任意性, fcf_1^{-1} 定义在 k 上.

于是 $fcf_1^{-1} : G' \to G$ 为 k 上代数群同构, $[G] = [G']$.

θ 的满射性证明略去. □

4.1.4　典型群

设 $\overline{k}$ 为完全域, 也是 k 的代数封闭域. $\overline{k}/k$ 是 Galois 扩张. 设 $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ 作用在群 A 上.

Galois 群 $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ 为完全不连通的紧拓扑群, 这时在 1 上闭链 $a \in Z^1(\mathrm{Gal}(\overline{k}/k), A)$ 的定义中我们再加上以下条件：

- $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ 有开正规子群 H 及有映射 $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)/H \xrightarrow{b} A$, 使 $a = b\pi$, 其中 $\pi : \mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \to \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)/H$ 为自然同态.

加了这个条件之后, 以上两小节的结果仍然成立. 我们以 $H^1(k, A)$ 记 $H^1(\mathrm{Gal}(\overline{k}/k), A)$.

设 $\tilde{G}$ 是定义在 $\overline{k}$ 上的殆单单连通代数群.

$\tilde{G}/Z(\tilde{G})$ 是由 Dynkin 图决定的. 因 $\overline{k}$ 是代数闭域, 故有分裂正合列：

$$1 \longrightarrow \mathrm{Ad}(\tilde{G}) \xrightarrow{i} \mathrm{Aut}_{\overline{k}}(\tilde{G}) \underset{p}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \mathrm{Dyn}(\tilde{G}) \longrightarrow 1$$

其中 $\mathrm{Dyn}(\tilde{G})$ 是 $\tilde{G}$ 的 Dynkin 图的自同构群, $\mathrm{Ad}(\tilde{G})$ 是 $\tilde{G}$ 的伴随群, 所以有正合列：

$$H^1(k, \mathrm{Ad}(\tilde{G})) \xrightarrow{i_1} H^1(k, \mathrm{Aut}_{\overline{k}}(\tilde{G})) \xrightarrow{p_1} H^1(k, \mathrm{Dyn}(\tilde{G})) \longrightarrow 1.$$

$\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ 在 $\mathrm{Dyn}(\tilde{G})$ 上的作用是平凡的, s 在 a_s 上的作用是平凡的, ${}^s a_s = a_s$, $a_{st} = a_s \cdot a_t$. $H^1(k, \mathrm{Dyn}(\tilde{G})) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(\overline{k}/k), \mathrm{Dyn}(\tilde{G}))$.

设 $\tilde{G}$ 的 Dynkin 图是 X_n (如：$A_n, B_n, \cdots$), 取 $[G] \in \mathscr{S}(\overline{k}/k, \tilde{G})$, 则 $\theta([G]) \in H^1(k, \mathrm{Aut}_{\overline{k}}(\tilde{G}))$, 故 $p_1\theta([G]) \in H^1(k, \mathrm{Dyn}(\tilde{G})) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(\overline{k}/k), \mathrm{Dyn}(\tilde{G}))$. 由 Galois 理论, 知 $\mathrm{Ker}\, p_1\theta([G])$ 决定一个扩张 L/k 使 $\mathrm{Gal}(\overline{k}/L) = \mathrm{Ker}\, p_1\theta([G])$.

$$\begin{array}{ccc} \overline{k} & \text{———} & 1 \\ \cup & & \cap \\ L & \text{———} & \operatorname{Ker} p_1\theta([G]) \\ \cup & & \cap \\ k & \text{———} & \operatorname{Gal}(\overline{k}/k) \end{array}$$

进一步由于 $\operatorname{Im} p_1\theta([G]) \subseteq \operatorname{Dyn}(\tilde{G})$, $\operatorname{Im} p_1\theta([G])$ 有限, 因此 $[\operatorname{Gal}(\overline{k}/k) : \operatorname{Ker} p_1\theta([G])] = [L : k] < \infty$. 设 $m = [L : k]$, 称 G 的类型为 ${}^mX_n$.

定义 4.1.4 若 G 为 k 上单连通代数群, 在 $\overline{k}$ 上殆单且 G 的类型是 ${}^1A_n, {}^2A_n, B_n, C_n, {}^1D_n, {}^2D_n$, 则称 G 为**典型群**.

在下一节我们将利用单代数的理论把 G 明显的"造"出来.

4.2 单 代 数

关于代数的算术的名著是文献 [102]. 可惜难得见, 又没有中译本或英译本. [311] 及 [400] Part II 亦详述代数的算术.

4.2.1 中心单代数

设 k 为域, A 为 k 上有幺代数. $Z(A)$ 记 A 的中心.

定义 4.2.1 如果 A 没有真双边理想, 称 A 为**单代数**.

设 M 为 A 模, 令

$$\operatorname{Ann} M = \{a \in A \mid ax = 0 \quad \forall x \in M\}.$$

命题 4.2.1 (1) 设 A 是 k 代数, M 是不可约 A 模, $\operatorname{Ann} M = 0$, $D = \operatorname{End}(M)$, 则 $A \cong M_n(D)$.

(2) 若 A 是单 k 代数, 则存在 k 上可除代数 D, 使 $A \cong M_n(D)$, 这时 n, D 是由 A 决定的.

证明 参见 [24] 第三章 §3, [179] vol. II. □

定义 4.2.2 设 A 是 k 代数, $Z(A) = k \cdot 1_A = k$, 则 A 是**中心代数**.

命题 4.2.2 A 是中心 k 代数, 对 $a, b \in A$, 设

$$\begin{aligned} f(a,b) : A &\longrightarrow A \\ x &\longmapsto axb. \end{aligned}$$

这样可以定义

$$\begin{aligned} F : A \otimes_k A^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \operatorname{End}_k(A) \\ a \otimes b &\longmapsto f(a,b) \end{aligned}$$

(这里 A^{op} 表示 A 的反代数). 则 F 为双射当且仅当 A 是中心单 k 代数.

证明 设 $\dim_k A = N$, 则 $\dim_k A \otimes_k A^{\mathrm{op}} = N^2 = \dim_k \mathrm{End}_k(A)$. 显然 F 是 k 线性的, 故 F 是一一映射当且仅当 F 是单的, 当且仅当 F 是满的.

必要性. 若 A 不是单代数, 则存在 $0 \neq I \neq A$, I 是 A 的双边理想. 于是对任意的 $a, b \in A$, $aIb \subseteq I$, 即 $f(a,b) \in \mathrm{End}_k I$, 从而 $F(A \otimes_k A^{\mathrm{op}}) \subseteq \mathrm{End}_k I \subsetneq \mathrm{End}_k A$. 这说明 F 不是满的, 因而 F 不是一一映射.

充分性. 已知 A 是单代数, 为证 F 是一一的, 我们来计算 $\mathrm{Ker}\, F$.

把 A 看作 k 向量空间并记为 M, 对 $c = a \otimes b \in A \otimes_k A^{\mathrm{op}}$, $x \in M$ 定义 $c \cdot x = axb = F(c)(x)$, 这样 M 成为 $A \otimes_k A^{\mathrm{op}}$ 模, 而

$$\mathrm{Ann}(M) = \{c \in A \otimes_k A^{\mathrm{op}} \mid c \cdot x = 0\ \forall x \in M\} = \mathrm{Ker}\, F.$$

现在证: (1) M 是不可约 $A \otimes_k A^{\mathrm{op}}$ 模; (2) $\mathrm{End}_{A \otimes_k A^{\mathrm{op}}}(M) = k$.

(1) 设 $M' \subseteq M$ 是子模, 则对任意的 $a, b \in A$, $x \in M'$, 有 $(a \otimes b) \cdot x \in M'$, 即 $AM'A \subseteq M'$, 因此 M' 是 A 的双边理想, 于是 $M' = 0$ 或 M, 所以 M 不可约.

(2) 设 $\varphi \in \mathrm{End}_{A \otimes_k A^{\mathrm{op}}}(M)$, 则对任意的 $c \in A \otimes_k A^{\mathrm{op}}$, $x \in M$, $\varphi(c \cdot x) = c \cdot \varphi(x)$, 即 $\varphi(axb) = a\varphi(x)b$. 令 $x = 1_A$, 再分别取 $(a,b) = (a,1)$ 及 $(1,a)$, 则 $a\varphi(1_A) = \varphi(a) = \varphi(1_A)a$, 即 $\varphi(1_A) \in Z(A) = k$, 且对任意的 $x \in M$ 有 $\varphi(x) = x\varphi(1_A)$, 说明 φ 由 $\varphi(1_A) \in k$ 完全确定. 这就证明了 $\mathrm{End}_{A \otimes_k A^{\mathrm{op}}}(M) = k$.

设 $\mathscr{A} = A \otimes_k A^{\mathrm{op}}/\mathrm{Ann}(M)$, 则 M 是不可约 $\mathscr{A}$ 模, $\mathrm{Ann}_{\mathscr{A}}(M) = 0$. 根据命题 4.2.1, $\mathscr{A} \cong M_n(D) = M_n(k)$, 因而 $\dim_k M = n$, $\dim_k \mathscr{A} = n^2 = (\dim_k M)^2$. 已知 $\dim_k M = \dim_k A = N$, 因此 $\dim_k \mathscr{A} = N^2 = \dim_k A \otimes_k A^{\mathrm{op}}$. 这就得出 $\mathrm{Ann}(M) = 0 = \mathrm{Ker}\, F$, F 是单的, 也是一一映射. □

推论 4.2.3 (1) 若 L/k 是域扩张, 则 $A_L = A \otimes_k L$ 是单代数的充分必要条件是 A 是单代数.

(2) 若 L/k 是代数闭扩张, 则 A 为单代数的充分必要条件是 $A_L \cong M_n(L)$.

(3) 如果 A 是单 k 代数, 则 $\dim_k A$ 是一个正整数的平方.

(4) 若 A, B 是中心单代数, 则 $A \otimes_k B$ 也是中心单代数.

(5) 若 A 是中心单代数, 又设 $\dim_k A = n^2$, 若有域 $L \supseteq k$, $F: A \to M_n(L)$ 为 k 代数同态, 则 $F_L : A_L = A \times_k L \to M_n(L)$ 是同构.

命题 4.2.4 A 为中心单代数.

(1) 对任意的自同构 $\varphi \in \mathrm{Aut}_k A$, 必存在可逆元 $a \in A$, 使得对任意的 $x \in A$ 有 $\varphi(x) = a^{-1}xa$ (Skolem-Noether 定理).

(2) 若 L 是 k 的一个可离闭域, 则存在 L 同构 $A_L \cong M_n(L)$.

(3) 对任何 $L \subseteq k$, 以及两个同构 $F_L, F'_L : A_L \to M_n(L)$, 则存在 $Y \in \mathrm{GL}(n, L)$, 使 $F'_L = Y^{-1}F_LY$, 而 Y 除了差 L^* 中的一个因子外, 是唯一确定的.

证明　(1), (2) 略.

(3) 作 $F'_L \circ F_L^{-1} \in \mathrm{Aut}(M_n(L))$. 由 (1), 存在 $Y \in \mathrm{GL}(n, L)$, 使对任意的 $X \in M_n(L)$, $F'_L \circ F_L^{-1}(X) = Y^{-1}XY$. 对任意的 $a \in A$, 存在 $X \in M_n(L)$, 使得 $a = F_L^{-1}(X)$, 这样, $F'_L = Y^{-1}F_LY$. □

定义 4.2.3　若 L/k 是域扩张, A 是 k 代数, $F : A \to M_n(L)$ 是 k 线性代数同态 (即是 $F(1_A) = 1_n$, $F(ab) = F(a)F(b)$), 则称 F 为 A 的一个 L **表示**. 此时, 如果 $\dim_k A = n^2$, 则 F 的扩张 $F_L : A_L \to M_n(L)$ 是同构.

这等价于要求: 有 k 代数同态 $F : A \to M_n(L)$ 使得 $F_L : A_L \cong M_n(L)$.

命题 4.2.5　若 k 是无限域, A 是中心单 k 代数, $\dim_k A = n^2$, 则存在 k 线性函数 $\tau : A \to k$ 及多项式函数 $\nu : A \to k$, $\deg \nu = n$, 使对任何域扩张 L/k 及 A 的 L 表示 F, 有

$$\tau(a) = \mathrm{tr}\, F(a), \qquad \nu(a) = \det F(a).$$

(称 ν 为 A 的已约范数.)

证明　第一步. 设 L 是 k 的可离封闭域, 则存在 $F_L : A_L \to M_n(L)$. 这样,

$$\begin{aligned} \tau^{F_L} : A_L &\longrightarrow L \\ a &\longmapsto \mathrm{tr}\, F_L(a), \\ \nu^{F_L} : A_L &\longrightarrow L \\ a &\longmapsto \det F_L(a). \end{aligned}$$

(i) τ^{F_L} 和 ν^{F_L} 与 F_L 无关: 这是因为对另一个 L 表示 $F'_L : A_L \to M_n(L)$, 存在 $Y \in \mathrm{GL}(n, L)$ 使 $F'_L = Y^{-1}F_LY$, 因此 $\tau^{F_L} = \tau^{F'_L}$, $\nu^{F_L} = \nu^{F'_L}$.

(ii) F_L 同构必得 $\tau, \nu \neq 0$.

取 A 的基 $\{a_1, \cdots, a_N\}$, $N = n^2$.

对任意的 $a \in A_L$, $a = \sum_{i=1}^N x_ia_i$, $x_i \in L$. 这样 $\tau^{F_L} = \tau$, $\nu^{F_L} = \nu$ 可以看成以 x_i 为变元, 系数在 L 里的多项式函数.

对任意的 $\sigma \in \mathrm{Aut}(L/k)$, 把 σ 作用在多项式函数的系数上, 可以定义 $\tau^\sigma, \nu^\sigma, F_L^\sigma$.

现在对任意的 $a \in A_L$, $\tau^\sigma(a) = \mathrm{tr}(F_L^\sigma(a))$, $\nu^\sigma(a) = \det(F_L^\sigma(a))$. 但 $F_L^\sigma : A_L \cong M_n(L)$ 仍是 L 表示, 因此

$$\mathrm{tr}(F_L^\sigma(a)) = \mathrm{tr}(F_L(a)), \qquad \det(F_L^\sigma(a)) = \det(F_L(a)).$$

于是 $\tau^\sigma = \tau$, $\nu^\sigma = \nu$, 说明 τ, ν 的系数在 k 中, 这样就可以定义多项式函数 $\tau, \nu : A \to k$.

第二步. 若 E 是一个域, E 包含 k 的一个可离封闭域, 则命题对 A 的 E 表示亦成立.

第三步. 设 L/k 是任一扩张, 则 L 必 k 同构于第二步中的域 E 的一个子域. 因此命题对 A 的 L 表示也成立. $\square$

推论 4.2.6 设 A 是中心单 k 代数, $\dim_k A = n^2$. 对 $a \in A$, $x \mapsto ax$ 及 $x \mapsto xa$ 是 $\mathrm{End}_k A$ 的元, 它们的行列式是 $\nu(a)^n$.

证明 只要对 $A = M_n(k)$ 证明. 对 $M_n(k)$ 的基 $(e_{11}, \cdots, e_{nn})$, 其中

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

只有第 i 行第 j 的元素是 1, 其余均为 0. $x \mapsto ax$ 的阵是 $\mathrm{diag}(\underbrace{a, \cdots, a}_{n})$, $\det a = \nu(a)$. $\square$

定义 4.2.4 设 A 是 k 代数, $I : A \to A$ 是一一线性变换, 满足

(1) 对任意的 $x, y \in A$, $I(xy) = I(y)I(x)$;

(2) $I^2 = \mathrm{id}_A$.

则称 I 是一个对合.

如果对所有的 $z \in Z(A)$, $I(z) = z$, 则称 I 是**第一种对合**, 否则, 称 I 是**第二种对合**.

显然对 $z \in Z(A)$, $I(z) \in Z(A)$.

命题 4.2.7 设 A 为单 k 代数, 域扩张 L/k 为 A 的中心, I 及 J 为 A 的对合, 对 $c \in L$, $I(c) = J(c)$.

(1) 若 I 为第一种对合, 则存在 $a \in A^*$, $I(a) = \pm a$ 及对任意的 $x \in A$,

$$J(x) = aI(x)a^{-1}.$$

(2) 若 I 为第二种对合, 则存在 $a \in A^*$, $I(a) = a$ 及对任意的 $x \in A$,

$$J(x) = aI(x)a^{-1}.$$

证明 显然 JI^{-1} 是中心单 L 代数的自同构, 故由 Skolem-Noether 定理得 $a \in A^*$, 使得对任意的 $x \in A$, 有 $JI^{-1}(x) = axa^{-1}$. 于是

$$J(x) = aI(x)a^{-1}.$$

所以对任意的 $x \in A$,

$$x = JJ(x) = aI(aI(x)a^{-1})a^{-1}$$
$$= aI(a)^{-1}x(aI(a)^{-1})^{-1},$$

即是说 $aI(a)^{-1} \in L$ (A 的中心). 取 $c \in L$ 使 $I(a) = ca$, 则 $a = I(I(a)) = I(ca) = I(a)I(c) = cI(c)a$. 因此 $cI(c) = 1$.

若 I 为第一种对合, 则 $c \in L$ 可得 $I(c) = c$, $c^2 = cI(c) = 1$, 从而 $c = \pm 1$, 证得 (1).

若 I 为第二种对合, 则设 $F = \{b \in L \mid I(b) = b\}$. 由 $I^2 = 1$, 得 $[L : F] = 2$. 所以 $cI(c) = 1$ 得出 $N_{L/F}(c) = 1$ (范数). 由 Hilbert 定理 90, 得 $d \in L^*$ 使 $c = I(d)d^{-1}$. 因此 $I(a) = ca = I(d)d^{-1}a$ 即 $I(d^{-1}a) = d^{-1}a$. 因 $d \in L$, 若取 $a' = d^{-1}a$ 则 $J(x) = aI(x)a = a'I(x)a'^{-1}$ 及 $I(a') = a'$, 证得 (2). □

4.2.2　典型群与单代数

以后我们使用以下的记号: $\overline{k}$ 表示域 k 的代数封闭域; G/k 表示代数群是定义在域 k 上的.

注　(1) 对代数群 $\tilde{G}/\overline{k}$, 存在双射 $\theta : \mathscr{S}(k, \tilde{G}) \to H^1(k, \mathrm{Aut}_{\overline{k}}(\tilde{G}))$. 同样可以证明, 对任何的 $\overline{k}$ 代数 $\tilde{A}$, 存在双射 $\mathscr{S}(k, \tilde{A}) \to H^1(k, \mathrm{Aut}_{\overline{k}}(\tilde{A}))$, 这里, 若 $[A] \in \mathscr{S}(k, \tilde{A})$, 则 A 是 k 代数且有 k 同构 $\tilde{A} \to A_{\overline{k}}$; 又若 $[A_1] = [A]$, 则存在 k 同构 $A_1 \cong A$.

(2) 若 $[a_s] \in H^1(k, \mathrm{Aut}_{\overline{k}}(\tilde{G}))$, 则有 $[G] \in \mathscr{S}(k, \tilde{G})$, 使 $\theta([G]) = [a_s]$, 这时我们说用 $[a_s]$ 扭转 (twisting) $\tilde{G}$ 得到 G.

本节利用 Galois 上同调群的理论来讨论代数群的分类问题.

$\tilde{G}$ 是 SL_{n+1} 的情况

(1) 若 G 的类型是 ${}^1A_n$ 时,

(i) 因为 $[\mathrm{Gal}(\overline{k}/k) : \mathrm{Ker}\, p_1\theta([G])] = 1$, 所以 $p_1\theta([G]) = 1 : \mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \to \mathrm{Dyn}(A_n)$. 于是 $\mathrm{Aut}(G)$ 没有图自同构.

(ii) $p_1\theta([G]) \in \mathrm{Ker}\, p_1 = \mathrm{Im}\, i_1$, 看正合列

$$1 \longrightarrow \mathrm{Ad}(\mathrm{SL}_{n+1}) \stackrel{i}{\longrightarrow} \mathrm{Aut}_{\overline{k}}(\mathrm{SL}_{n+1}) \stackrel{p}{\longrightarrow} \mathrm{Dyn}(A_n) \longrightarrow 1$$

及

$$i_1 : H^1(k, \mathrm{Ad}(\mathrm{SL}_{n+1})) \longrightarrow H^1(k, \mathrm{Aut}_{\overline{k}}(\mathrm{SL}_{n+1}))$$
$$[a_s] \longmapsto [i(a_s)],$$

可把 $\theta([G])$ 看成 $H^1(k, \mathrm{Ad}(\mathrm{SL}_{n+1}))$ 的元.

(iii) 因为

$$\mathrm{Ad}(\mathrm{SL}_{n+1}) = \mathrm{PGL}_{n+1} = \mathrm{Aut}_{\overline{k}}(M_{n+1}(\overline{k})),$$

所以

$$\theta([G]) \in H^1(k, \mathrm{Aut}_{\overline{k}}(M_{n+1}(\overline{k})),$$

用 $\theta([G])$ 扭转 $M_{n+1}(\overline{k})$ 得到 k 代数 A. 这就是说, 存在 k 同构 $f: M_{n+1}(\overline{k}) \to A \otimes_k \overline{k}$. 又设 $a_s = f^{-1} \circ {}^s f$, 则 $[a_s] = \theta([G])$. 由于 $M_{n+1}(\overline{k})$ 是中心单 $\overline{k}$ 代数, f 是 k 同构, 所以 $A_{\overline{k}} = A \otimes_k \overline{k}$ 是中心单 $\overline{k}$ 代数, 从而 A 是中心单代数且 $Z(A) = k$.

(iv) 由 $f: M_{n+1}(\overline{k}) \to A \otimes_k \overline{k}$ 及 $\mathrm{SL}_{n+1}(k) = \{X \in M_{n+1}(k) \mid \det X = 1\} \subseteq M_{n+1}(\overline{k})$, $H(\overline{k}) = \{a \in A_{\overline{k}} \mid \nu(a) = 1\} \subseteq A \otimes_k \overline{k}$, 得到 $f: \mathrm{SL}_{n+1}(k) \to H(k)$.

因为 ν 是 k 上多项式函数, 所以 $H = H(k) = \{a \in A \mid \nu(a) = 1\}$ 是 k 代数群. 又因为 $\theta([H]) = [a_s] = \theta([G])$, 得到 $[H] = [G]$, 从而 $H \cong_k G$.

(v) 结论是: 若 G 的类型是 ${}^1A_n$ 时, 则存在中心单 k 代数 A 使 $G(\overline{k}) = \{x \in A \otimes_k \overline{k} \mid \nu x = 1\}$, 其中 ν 为 A 的已约范数.

(2) 若 G 的类型是 ${}^2A_n$ 时,

(i) 因为 $[\mathrm{Gal}(\overline{k}/k) : \mathrm{Ker}\, p_1\theta([G])] = 2$, 所以 $\mathrm{Im}(p_1\theta([G])) \cong \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)/\mathrm{Ker}\, p_1\theta([G])$. 从而 $|\mathrm{Im}(p_1\theta([G]))| = |\mathrm{Dyn}(A_n)| = 2$, $\mathrm{Dyn}(A_n) \cong S_2$ (2 个元素的对称群), 于是 $1 \neq p_1\theta([G]) : \mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \to \mathrm{Dyn}(A_n)$.

(ii) 在 $M_{n+1}(\overline{k}) \oplus M_{n+1}(\overline{k})$ (简记为 $M_{n+1} \oplus M_{n+1}(\overline{k})$) 里, 有 $I: (x, y) \mapsto ({}^t y, {}^t x)$. 若 $(a, b) \in Z(M_{n+1} \oplus M_{n+1}(\overline{k})) = \overline{k} \oplus \overline{k}$, 及 $I(a, b) = (a, b)$, 得 $a = b$, 从而 ${}^I(\overline{k} \oplus \overline{k}) = \{I(a, b) = (a, b)\} = \{(a, a) \mid a \in \overline{k}\} = \overline{k}$, 所以 I 是 $M_{n+1} \oplus M_{n+1}(\overline{k})$ 的一个第二种对合. 由 Skolem-Noether 定理得

$$\begin{aligned}&\mathrm{Aut}_{\overline{k}}(M_{n+1} \oplus M_{n+1})\\ &= \langle (X, Y) \mapsto (Y, X); (X, Y) \mapsto (A^{-1}XA, B^{-1}YB) \mid A, B \in \mathrm{GL}(n+1, \overline{k}) \rangle.\end{aligned}$$

(iii) 令 $\mathrm{Aut}_{\overline{k}}(M_{n+1} \oplus M_{n+1}, I) = \{g \in \mathrm{Aut}_{\overline{k}}(M_{n+1} \oplus M_{n+1}) \mid gI = Ig\} = \langle (X, Y) \mapsto (Y, X); (X, Y) \mapsto (A^{-1}XA, ({}^tA^{-1})^{-1}Y({}^tA^{-1})) \mid A \in \mathrm{SL}(n+1, \overline{k}) \rangle$, 这是由于

(a) $(X, Y) \mapsto (Y, X)$ 显然在 $\mathrm{Aut}_{\overline{k}}(M_{n+1} \oplus M_{n+1}, I)$ 中.

(b) 若

$$g: (X, Y) \mapsto (A^{-1}XA, B^{-1}YB), \qquad A, B \in \mathrm{GL}(n+1, \overline{k}),$$

则

$$gI(X, Y) = g({}^tY, {}^tX) = (A^{-1t}YA, B^{-1t}XB),$$

$$Ig(X,Y)=I(A^{-1}XA,B^{-1}YB)=({}^tB^tY^tB^{-1},{}^tA^tX^tA^{-1}).$$

于是 $A^{-1t}YA={}^tB^tY^tB^{-1}$, 即 ${}^tYA^tB=A^tB^tY$, 从而 $A^tB=a1$ (1 是单位阵), $a\in\overline{k}$. 同样, 由 $B^{-1t}XB={}^tA^tX^tA^{-1}$ 得到 $B^tA=b1$, $b\in\overline{k}$. 所以 $(A,B)I(A,B)=(A^tB,B^tA)=(a1,b1)$. 但是, $I((A,B)I(A,B))=(A,B)I(A,B)$, 故由 $(a1,b1)=(b1,a1)$ 得 $(a,b)=(b,a)\in\overline{k}\oplus\overline{k}$, 所以 $a=b$. 又因为 $\overline{k}$ 是代数封闭域, 可不妨假设 $a=b=1$, 从而 $A^tB=B^tA=1$, 得到 $B={}^tA^{-1}$, 即有 $g:(X,Y)\mapsto(A^{-1}XA,({}^tA^{-1})^{-1}Y({}^tA^{-1}))$, $A\in\mathrm{SL}(n+1,\overline{k})$.

(iv) 已知

$$\mathrm{Aut}_{\overline{k}}(\mathrm{SL}_{n+1})=\langle X\mapsto{}^tX^{-1};X\mapsto A^{-1}XA\mid A\in\mathrm{SL}(n+1,\overline{k})\rangle.$$

利用单映射

$$\begin{aligned}\varphi:\mathrm{SL}(n+1,\overline{k})&\hookrightarrow M_{n+1}\oplus M_{n+1}(\overline{k})\\ X&\mapsto(X,{}^tX^{-1}),\end{aligned}$$

得同构

$$\begin{aligned}\mathrm{Aut}_{\overline{k}}(\mathrm{SL}(n+1,\overline{k}))&\longrightarrow\mathrm{Aut}_{\overline{k}}(M_{n+1}\oplus M_{n+1},I)\\ (X\mapsto{}^tX^{-1})&\longmapsto((X,Y)\mapsto(Y,X))\\ (X\mapsto A^{-1}XA)&\longmapsto((X,Y)\mapsto(A^{-1}XA,({}^tA^{-1})^{-1}Y({}^tA^{-1}))).\end{aligned}$$

(v) 假定 G 是 ${}^2A_n$ 型.

$\theta([G])\in H^1(k,\mathrm{Aut}_{\overline{k}}(\mathrm{SL}(n+1,\overline{k})))=H^1(k,\mathrm{Aut}_{\overline{k}}(M_{n+1}\oplus M_{n+1},I))$, 用 $\theta([G])$ 扭转 $(M_{n+1}\oplus M_{n+1},I)$, 得到 (A,J), 其中 A 是中心单 k 代数, J 是 A 的对合. 又有 $f:M_{n+1}\oplus M_{n+1}(\overline{k})\to A_{\overline{k}}$, 使 $\theta([G])$ 对应于上闭链 $a_s=f^{-1}\circ{}^2f$. 此时 φ 把 $\mathrm{SL}(n+1)$ 映为 $\{Z\in M_{n+1}\oplus M_{n+1}(\overline{k})\mid Z\cdot I(Z)=1,\nu(Z)=1\}$, 而这个群在 $\theta([G])$ 下扭转为 $H(\overline{k})=\{a\in A_{\overline{k}}\mid a\cdot J(a)=1,\nu(a)=1\}$.

我们的结论是: 若 G 是 ${}^2A_n$ 型, 则有单 k 代数 A, A 上有第二种对合 J 使得 $G\cong_k H$, 而其中 H 是一个 k 代数群, $H=H(k)=\{a\in A\mid a\cdot J(a)=1,\nu(a)=1\}$.

(vi) 我们以下证明 A 的中心是 k 的二次扩张.

引理 4.2.8 设 S_n 是 n 个元素的对称群, k 是域, $A=k^n$, 则

$$H^1(k,S_n)=\{\text{所有维数为 } n^2 \text{ 的可离交换 } k \text{ 代数的 } k \text{ 同构类}\},$$

其中 S_n 被看成 $\mathrm{Aut}_{\overline{k}}(A_{\overline{k}})$.

证明　第一步. $\mathrm{Aut}_{\overline{k}}(A) = \{g : \overline{k}^n \to \overline{k}^n \mid \overline{k}\text{自同构}\} = \{g : (x_1, \cdots, x_n) \mapsto (x_{g(1)}, \cdots, x_{g(n)}) \mid g \in S_n\}$.

第二步. $H^1(k, S_n) = H^1(k, \mathrm{Aut}_{\overline{k}}(A_{\overline{k}})) = \mathscr{S}(k, \overline{k}^n) = \{$ 所有维数为 n^2 的可离交换 k 代数的 k 同构类 $\}$. □

现在我们来看 $p_1\theta([G]) \in H^1(\mathrm{Gal}(\overline{k}/k), \mathrm{Dyn}(A_n))$, 这里 $\mathrm{Dyn}(A_n) = S_2$. 由 (vi), 用 $\theta([G])$ 扭转 $k \oplus k$, 得到 $Z(A_k)$, 由引理可得: $Z(A_{\overline{k}}) \cong B_{\overline{k}}$, 这里 B 是一个可离交换 k 代数. 但 $H^1(k, S_2)$ 只有两个元素: [1] 由 $k \oplus k$ 决定, 另外一个元素是由 $\overline{k}/k$ 的任何一个二次扩张所决定, 故 B 其实是 k 的一个二次扩张, 从而 $Z(A)$ 是 k 的一个二次扩张.

$\tilde{G}$ 为 Sp_{2n} 的情况

(1) 设 $2n \times 2n$ 矩阵

$$J = \left(\begin{array}{cc|cc} & & 0 & 1 \\ & 0 & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} \\ & & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & 0 \\ -1 & 0 & & \end{array}\right).$$

则 $\mathrm{Sp}(2n, \overline{k}) = \{x \in \mathrm{SL}(2n, \overline{k}) \mid XJ^tX = J\}$.

(2) G 的类型是 C_n 时, 推出 $\theta([G]) \in H^1(k, \mathrm{Aut}_{\overline{k}}(\mathrm{Sp}(2n, \overline{k})))$.

(3) $\mathrm{Aut}_{\overline{k}}(\mathrm{Sp}(2n, \overline{k}))$ 是等于 $\mathrm{Sp}(2n, \overline{k})$ 的内自同构群.

我们看 k 代数 $M_{n+1}(\overline{k})$, 可以定义一个对合 $I : X \mapsto J^tXJ^{-1}$.

$$\mathrm{Aut}_{\overline{k}}(M_{n+1}(\overline{k})) = \{X \mapsto A^{-1}XA \mid A \in \mathrm{SL}(n+1, \overline{k})\}.$$

令

$$\mathrm{Aut}_{\overline{k}}(M_{n+1}(\overline{k}), I) = \{g \in \mathrm{Aut}_{\overline{k}}(M_{n+1}(\overline{k})) \mid gI = Ig\},$$

则

$$\mathrm{Aut}_{\overline{k}}(M_{n+1}(\overline{k}), I) \cong \mathrm{Aut}_{\overline{k}}(\mathrm{Sp}(2n, \overline{k})).$$

这是由于

$$gI(X) = g(J^tXJ^{-1}) = A^{-1}J^tXJ^{-1}A,$$

$$Ig(X) = I(A^{-1}XA) = J^tA^tX^tA^{-1}J^{-1}.$$

由 $Ig(X) = gI(X)$, 得到 $A^{-1}J^tXJ^{-1}A = J^tA^tX^tA^{-1}J^{-1}$, 所以 ${}^tAJXJ^{-1\,t}A^{-1} = JA^{-1}XAJ^{-1}$, 即 $AJ^{-1\,t}AJ \in Z(M_{n+1}(\overline{k}))$, 但因 $J^{-1} = -J$, 所以 $AJ^tAJ^{-1} =$

$AJ^{-1t}AJ \in Z(M_{n+1}(\overline{k}))$, 即 $A \cdot I(A) \in Z(M_{n+1}(\overline{k}))$, $A \cdot I(A) = a1$, $a \in \overline{k}$. 由 $\overline{k}$ 是代数封闭域可不妨设 $a = 1$, 故 $A \cdot I(A) = 1$. 所以 $\mathrm{Aut}_{\overline{k}}(M_{n+1}(\overline{k}), I) \cong \mathrm{Aut}_{\overline{k}}(\mathrm{Sp}(2n, \overline{k}))$.

(4) 从 $\theta([G]) \in H^1(k, \mathrm{Aut}_{\overline{k}}(\mathrm{Sp}(2n, \overline{k})))$ 可推出

$$\theta([G]) \in H^1(k, \mathrm{Aut}_{\overline{k}}(M_{n+1}(\overline{k}), I)),$$

用 $\theta([G])$ 扭转 $(M_{n+1}(\overline{k}), I)$, 得 A, J. 于是由 $(M_{n+1}(\overline{k}), I) \to (A_{\overline{k}}, J)$, 及由 $\mathrm{Sp}(2n, \overline{k}) \subseteq (M_{n+1}(\overline{k}), I)$,

$$H(\overline{k}) = \{a \in A_{\overline{k}} \mid aJ(a) = 1\} \subseteq (A_{\overline{k}}, J),$$

得到 $\mathrm{Sp}(2n, \overline{k}) \to H(\overline{k})$.

(5) 结论: $\tilde{G}$ 为 $\mathrm{Sp}(2n, \overline{k})$ 的情况, 有中心单 $\overline{k}$ 代数 A 及 A 的第一种对合 I, 使

$$G(\overline{k}) = \{X \in A_{\overline{k}} \mid X \cdot I(X) = 1\}.$$

$\tilde{G}$ 为 $\mathrm{Spin}_{2n}(q)$ 的情况

(1) q 是非退化二次型, 它的 Witt 指标最大, 则 Spin(q) 的 Dynkin 图是 B_n, D_n 型的. 而且可以证明若典型群的类型是 $B_n, {}^1D_n, {}^2D_n$ $(n > 3)$ 时, G 是 $G' \cong \mathrm{SO}(q)$ 的二次覆盖. 所以只要找 $\mathrm{SO}(q)$ 的 k 形.

(2) $\mathrm{Aut}_{\overline{k}}(\mathrm{SO}_n(q)) \cong \mathrm{Aut}_{\overline{k}}(M_n(\overline{k}), I)$, 把 X 映到 $I(X) = a^tXa^{-1}$, 这里 a 是非退化二次型 q 的矩阵.

(3) 仿前一段的方法, 可得到下述结论:

存在中心单 k 代数 A 及 A 的第一类对合 J, 使

(i) 在 $\overline{k}$ 上, $(M_n(\overline{k}), I) \cong (A, J)$, 其中 $I(X) = a^tXa^{-1}$. a 为 q 的矩阵;

(ii) G 为 $G'(\overline{k}) = \{X \in A_{\overline{k}} \mid X \cdot J(X) = 1, \nu(X) = 1\}$ 的二次覆盖.

综上所述, 得到 Weil 定理

定理 4.2.9 *G 为 k 上典型群, G 是绝对殆单单连通的, $\mathrm{char}\, k = 0$, 则*

(1) G 为 SL_{n+1} 时: (i) 有中心单 $\overline{k}$ 代数 A, 使

$$G(\overline{k}) = \{X \in A_{\overline{k}} \mid \nu(X) = 1\}, \text{或}$$

(ii) 有单 $\overline{k}$ 代数 A, A 的中心为 k 的二次扩张, A 有一个第二种对合 I, 使

$$G(\overline{k}) = \{X \in A_{\overline{k}} \mid X \cdot I(X) = 1, \nu(X) = 1\}.$$

(2) G 为 Sp_{2n} 时: 有中心单 $\overline{k}$ 代数 A 及 A 的第一种对合 I, 使

$$G(\overline{k}) = \{X \in A_{\overline{k}} \mid X \cdot I(X) = 1\}.$$

(3) G 为 $\mathrm{Spin}_n(q)$ 时：$n > 6$, q 是非退化二次型，Witt 指标为 $[\frac{n}{2}]$，矩阵为 a，则有中心单 $\overline{k}$ 代数 A 及 A 的第一种对合 J，使 (i) 在 k 上，$(M_n, I) \cong (A, J)$，其中 $I(X) = a^t X a^{-1}$，及 (ii) G 为

$$G'(\overline{k}) = \{X \in A_{\overline{k}} \mid X \cdot J(X) = 1, \nu(X) = 1\}$$

的二次覆盖.

4.2.3　在代数数域上的典型群

当 k 为代数数域时，上一段的 Weil 定理可以改进为

定理 4.2.10　设 G 为 k 上典型群，G 是绝对殆单单连通的，则有以下三种情形.

(1) (i) 有中心单 k 代数 A，使

$$G(\overline{k}) = \{X \in A_{\overline{k}} \mid \nu(X) = 1\}, \text{ 或}$$

(ii) 有单 k 代数 A，A 的中心为 k 的二次扩张，A 有一个第二种对合 I，使

$$G(\overline{k}) = \{X \in A_{\overline{k}} \mid X \cdot I(X) = 1, \nu(X) = 1\}.$$

(2) (i) 有非退化斜对称矩阵 S 使

$$G = \mathrm{Sp}_{2n}(S) = \{X \in M_{2n} \mid X \cdot I(X) = 1\}, \qquad I(X) = S^{-1t} X S.$$

(ii) 有 k 上的 4 元数代数 D 及 D 上的 Hermite 型 h 使 $G = \mathrm{SU}(h)$.

(3) (i) $G = \mathrm{Spin}_n(q)$，或

(ii) 有 k 上的 4 元数代数及 D 上的斜 Hermite 形 h 使 $G = \mathrm{Spin}_n(h)$.

关于这定理的证明我们作以下的补充.

关于 (1)(ii)：我们知道对任意正整数 n，及 k 的二次扩张必存在单 k 代数 A 使 $\dim_L A = n^2$ 并满足 (1)(ii) 中的条件. (参见 [24] 定理 10.22.)

关于 (2) 及 (3)：首先，如果单 k 代数 A 有第一种对合，则 $A \cong M_m(D)$，其中 D 为 k 或为 k 上的可除四元代数. (参见 [24] 定理 10.20.)

对 $\alpha, \beta \in K^*$，取一个 4 维 k 空间 V 及 V 的一个基 $\{1, X_1, X_2, X_3\}$，用下表定义乘法，

	1	X_1	X_2	X_3
1	1	X_1	X_2	X_3
X_1	X_1	$\alpha 1$	X_3	αX_2
X_2	X_2	$-X_3$	$\beta 1$	$-\beta X_1$
X_3	X_3	$-\alpha X_3$	βX_1	$-\alpha\beta 1$

则 V 便成为一个代数, 称为四元代数 (quaternion algebra), 并以 $(\frac{\alpha,\beta}{k})$ 记这个代数. (事实上利用类域论可以证明四元代数完全局部决定, 参看 [278].)

当 $A \cong M_m(k)$ 及 I 为 A 的第一种对合时, 对 $X \in M_m(k)$, $X \mapsto {}^tX$ 为 A 的对合. 用命题 4.2.7, 得 $a \in \mathrm{GL}(m,k)$ 使 ${}^ta = \pm a$ 及 $I(X) = a^tXa^{-1}$. 当 ${}^ta = -a$ 时 m 偶数, G 便是 $\mathrm{Sp}(a)$, 及 G 的类型是 C_n $(n = \frac{m}{2})$, 当 ${}^ta = a$, G 便是由 a 所定义的二次型 q 的特殊正交群 $\mathrm{SO}(q)$, 而 G 的类型便是 B_l $(2l+1=m)$ 或 D_l $(2l=m)$.

当 $A = M_m(D)$, D 为可除四元数时, 以 $d \mapsto \overline{d}$ 记 D 的标准对合, 则 $X = (x_{ij}) \mapsto X^* = {}^t(\overline{x_{ij}})$ 是 A 的对合, 再用命题 4.2.7, 便得 $a \in M_m(D)^*$, 使 $a^* = \pm a$ 及 $I(X) = aX^*a^{-1}$. 当 $a = {}^*a$ 时, 即 a 定义一个 D 上的 Hermite 型 h, 这时 $X \cdot I(X) = 1$, 因此 $X \in U(h) = \mathrm{SU}(h)$, 经过维数的计算便知 G 的类型是 C_n. 当 ${}^*a = -a$ 时, 同样可知 G 的类型是 D_l 及 $G = \mathrm{Spin}(h)$, h 为 D 上的斜 Hermite 形, 详细的计算我们留给读者了.

我国在典型群方面有出色的工作, 见 [8]. 在实数域上的代数群是李群, 关于李群和它的齐性空间可看书末文献中所列的陆启铿、龚昇、谷超豪、许以超和严志达的著作.

系统的介绍代数群分类的有 [381] 与 [383] 两篇文章. 但 Tits 从来没有发表系统详细的证明. [317] 及 [318] 有部分证明. 至于对称空间理论可以看 [164], [319] 及 [269]. 另外还有人用 Jordan triple system 来研究对称空间, 可参看相关文献.

4.3 算术子群

已给定义在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的代数群 G. 设有 $G(\mathbb{Q})$ 的子群 Γ. 如果存在嵌入态射 $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_n$ 使得 $\Gamma \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ 是 Γ 及 $G(\mathbb{Q})$、$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ 的有限指数子群, 即 $[\Gamma : \Gamma \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})] < \infty$ 和 $[G(\mathbb{Q})$、$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) : \Gamma \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})] < \infty$, 则我们称 Γ 为**算术子群** (arithmetic subgroup, 见 [172]).

以下我们将介绍几个和算术子群有关的概念：玉河数, 志村簇, 互反律, L 函数. 这一节用了一些不是代数的概念. 初学的读者当不以此为难. 一个初学的人常不知有什么可以学. 希望读者把在本书见到的未学过的东西看作可学的题目, 多找参考文献学习.

4.3.1 玉河数

设 k 是代数数域 (即 k 是有理数域 $\mathbb{Q}$ 的有限 Galois 扩张). 以 v 记 k 的素除子, 以 k_v 记 k 在 v 的完满化. k_v 的整数环记作 O_v (见 [400] Chap. III §1).

设 G 是定义在 k 上的连通线性代数群 (即是说 G 的有理函数环是 k 代数; 关于簇的定义域可参看: [398] 及 [268] Chap. 2 §4). 此时我们可以把 G 看作线性群 GL_n 的子群. 这样 G 便成为仿射空间 $\mathbb{A}^{n^2+1}$ 的闭代数子集.

以 $\mathbf{A}$ 记 k 的 adele 环 (见 [398] IV). 群 G 的 adele 群 $G_{\mathbf{A}}$ 是指 $\mathbb{A}^{n^2+1}$ 内满足定义 G 的方程的点所组成的群. 以 $\mathbf{A}$ 的拓扑定义仿射空间 $\mathbb{A}^{n^2+1}$ 的拓扑为直积拓扑. 在 $G_{\mathbf{A}}$ 上取从 $\mathbb{A}^{n^2+1}$ 所诱导的拓扑, 则 $G_{\mathbf{A}}$ 为局部紧拓扑群 (关于拓扑群可以看 [9]).

因为 k 是 $\mathbf{A}$ 的离散子群 ([400] IV §2), 所以代数群 G 的 k 有理点所组成的群 G_k 是 G 的 adele 群的离散子群.

设 V 为定义在 k 上的 n 维代数簇. 设 P 为 V 上的光滑点. 则在 V 内 P 的开邻域 U 上有局部坐标 $x_1, \cdots, x_n$. 这样, V 上的 n 次微分形式 ω 在 U 上可以写为

$$\omega = f(x)\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n,$$

其中 $f(x)$ 为在 P 有定义的 V 的有理函数. 如果 f 及 x_i 均在 k 上定义, 我们说 ω 是在 k 上定义的.

回到连通线性代数群 G. 左平移 $\lambda_a : x \mapsto ax$ $(a \in G)$ 为 G 上的态射. 这态射作用在 G 上的微分形式 $\omega \mapsto \lambda_a^*\omega$. 设 G 的维数是 n. 在 G 上存在定义在 k 上的、在所有左平移下不变的 n 次非零微分形式 ω. 除 k 内的常数因子外, ω 是唯一决定的.

以 G_{k_v} 记 G 的 k_v 有理点集.

我们把 f 写成系数在 k 内, 并以 $t_i = x_i - x_i(P)$ 为变元的形式幂级数. 取 P 在 G_{k_v} 内的邻域 U 使得 $\varphi : x \mapsto (t_1, \cdots, t_n)$ 定义一个从 U 到 k_v^n 内零点的一个邻域 U' 的同胚, 并且以上由 f 所给出的幂级数在 U' 上收敛. 在 U' 上有正测度 $|f(t)|_v \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_n$ (其中 $\mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_n$ 是指积测度 $\mu_v \times \cdots \times \mu_v$, 而 μ_v 是局部紧域 k_v 的 Haar 测度). 在 U 上我们可以定义测度 ω_v 如下：对有紧支集的连续函数 g, 设

$$\int_U g\omega_v = \int_{U'} g(\varphi^{-1}(t))|f(t)|_v \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_n.$$

利用积分的 Jacobi 变元公式可知 ω_v 扩张为 G_{k_v} 上的测度.

由所有的代数群同态 $G \to \mathbb{G}_m$ 所组成的群记为 $\hat{G}$. 在 $\hat{G}$ 内所有定义在 k 上的元组成 $\hat{G}_k$. 存在有限 Galois 扩张 F/k 使得 $\hat{G} = \hat{G}_F$. 以 $\mathrm{Gal}(F/k)$ 记扩张 F/k 的 Galois 群, 则 $\hat{G}$ 是 $\mathrm{Gal}(F/k)$ 模. 群 $\mathrm{Gal}(F/k)$ 在 $\hat{G}$ 上的表示的特征记作 χ_G. 这个表示所定义的 Artin L 函数 (见 [226] Chap. 12 §2) 记为 $L(s,\chi_G)$. 以 $L_v(s,\chi_G)$ 记这个 L 函数在 v 的因子. 设 r 为 $\hat{G}_k$ 的秩, 以 ρ_G 记 $\lim_{s\to 1}(s-1)^r L(s,\chi_G)$. 以 Δ_k 记域 k 的判别式. 在 $G_{\mathbf{A}}$ 上我们取测度

$$\mathrm{d}G_{\mathbf{A}} = \frac{1}{\rho_G|\Delta_k|^{\frac{n}{2}}}\prod_{v|\infty}\omega_v\prod_{v<\infty}L_v(1,\chi_G)\omega_v.$$

设

$$G_{\mathbf{A}}^1 = \{x\in G_{\mathbf{A}} \mid \|\chi(x)\| = 1 \text{ 对 } \chi\in\hat{G}_k\},$$

则 $G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{A}}^1$ 同构于 $\mathbb{R}^r$. 所以在 $G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{A}}^1$ 上我们取测度 $\mathrm{d}(G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{A}}^1)$ 同构于 $\mathbb{R}^r$ 的测度. 因为 k 是 $\mathbf{A}$ 的离散子群, 在 G_k 上我们取 $\mathrm{d}G_k$ 为离散测度. 这样由

$$\mathrm{d}G_{\mathbf{A}} = \mathrm{d}(G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{A}}^1)\mathrm{d}(G_{\mathbf{A}}^1/G_k)\mathrm{d}G_k$$

决定出 $G_{\mathbf{A}}^1/G_k$ 的测度 $\mathrm{d}(G_{\mathbf{A}}^1/G_k)$. 我们定义 G 的**玉河数** (Tamagawa number) 为

$$\tau(G) = \int_{G_{\mathbf{A}}^1/G_k}\mathrm{d}(G_{\mathbf{A}}^1/G_k).$$

作为最简单的例子, 我们有 $\tau(\mathbb{G}_a) = 1$, $\tau(\mathbb{G}_m) = 1$ (见 [400] V §4). 当 G 是典型群时, Weil 作了很多计算. 当 G 是单连半单时, Weil 猜想 $\tau(G) = 1$. 黎景辉 [219] 证明了当 G 是拟裂 (quasi-split) 时, Weil 的猜想是对的. 在这个基础上, Kottwitz[208] 完全证明了 Weil 的猜想. 这两个证明都是用自守形式理论.

当我们把定义域换为其他域时, 没有人知道怎样证明 Weil 的猜想. 比如代数数域换为函数域 $F(t_1,\cdots,t_n)$, 尤其当 F 是有限域, 或是复数域时, 这便是个很有意义的问题了. 更一般地, 当我们把本篇中常用的假设: k 是代数封闭域取消, 改换为其他的域, 如以上的 $F(t_1,\cdots,t_n)$, 则这一篇的那些结果是否仍成立呢? Grothendieck 在 [147] 就作过这样的考虑. 当定义域 k 是实数域时, $G_{\mathbb{R}}$ 是个实李群, 于是便有李群的丰富性质. 当定义域 k 是局部紧完备域时 (如 p 进数域 $\mathbb{Q}_p$), G_k 便有类似 $G_{\mathbb{R}}$ 的性质, 这时有 Bruhat-Tits 所开发的 building 理论, Parshin 正在发展二维完备域上的 building 理论.

当我们把线性代数群 G 换为椭圆曲线或 Abel 簇, 亦可以定义玉河数. 要了解这样的玉河数就要了解著名的 Birch-Swinnerton-Dyer 猜想了. 这是科雷研

究所 (Clay Institute) 悬赏百万美元的问题! 更一般地还有 Bloch-Kato[45] 关于 Grothendieck motive 的玉河数猜想. 这都是现在算术几何的中心问题.

最早是玉河坦夫 (Tamagawa Tsuneo) 与 Kneser 把经典的 Minkowski-Siegel 关于二次型的质量公式 (Mass formula) 改用 adele 的语言来写出, 而得出玉河数这个概念. 今日人们推出精确质量公式 (如 [342] 与 [343]). 与此密切有关的是所谓 Siegel-Weil 公式 (如 [215] 及 [174]).

玉河数的计算可以看作离散子群的基本区的体积计算. 关于离散子群可看 [393], [346], 及两本著名的教科书 [303] (讲 Weil 的变形理论) 和 [410] (讲 Margulic 得 Fields 奖的工作: 离散子群的 Selberg 猜想的证明). 但是请注意, 玉河数的研究并不单是计算体积的问题, 而是在这个数所包含的算术内容. 比如前面所讲的: 正交群的玉河数等于 2 是等价于 Minkowski-Siegel 的二次型质量公式, 又如群 G 的玉河数与 G 所作用的齐性空间的整数点的分布的关系. 更一般的, 如 Bloch-Kato 猜想. 正如我们不单只想计算 Riemann ζ 函数在整数点的值, 我们更想知道这些值的算术内容, 比如与代数 k 群的关系 (如 Lichtenbaum[239] 猜想).

与玉河数有密切关系的是代数齐性空间的整数点的个数的渐近估值. 关于这方面可参看 [58], [257] 及 [125].

关于代数群还有好些算术性质. 比如代数群的上同调 (见 Borovoi[56] 等关于 endoscopy 的工作), 又如 R 等价 (见 [85] 及 [57]). R 等价是 Manin 在他的关于三次方程的很有创见的书 [244] 中引入的. 又如 Waldschmidt[388] 关于代数群的 diophantine 逼近. 最近 Bhargava[44] 从研究代数群在实向量空间的整数点的作用与代数数域的理想类的关系而引入新的格点对应.

4.3.2 志村簇

设 G 是半单李群, 设 G 的中心是有限的. 设 K 为 G 的极大紧子群. 则 $\mathfrak{X} = G/K$ 是对称黎曼空间. 设 $\mathfrak{X}$ 是 Hermite 空间. 设 Γ 是 G 的算术子群, 则 Baily-Borel 证明 $\Gamma \backslash \mathfrak{X}$ 是 $\mathbb{C}$ 上拟投射簇. 然后 Shimura[345] 和他的学生 Miyake[255] 和 Shih[338] 证明当 G 是典型群时 $\Gamma \backslash \mathfrak{X}$ 是定义在一个代数数域 E 上, 并且决定了 Galois 群在 $\Gamma \backslash \mathfrak{X}$ 的特殊点的作用. 这些 $\Gamma \backslash \mathfrak{X}$ 便是我们所谓的志村簇 (Shimura variety). 今日我们一般是用以下的 Deligne[96],[97] 的定义.

我们引入一个定义在 $\mathbb{R}$ 上的代数环面 S 使得 $S(\mathbb{R}) = \mathbb{C}^\times$. 设有 $\mathbb{R}$ 有理表示 $h : S \to \mathrm{GL}(V)$, 其中 V 为有限维 $\mathbb{R}$ 向量空间. 则 $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \oplus_{p,q\in\mathbb{Z}} V^{p,q}$, 其中

$$V^{p,q} = \{v \in V \mid h(z)v = z^{-p}\overline{z}^{-q}v,\ \forall z \in S(\mathbb{R})\}.$$

我们称集合 $\{(p,q) \in \mathbb{Z}^2 \mid V^{p,q} \neq \emptyset\}$ 为 (h, V) 的型号 (type).

我们假设 G 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的简约代数群, 考虑所有由 S 到 $G_{\mathbb{R}}$ 的实代数群同态. $G(\mathbb{R})$ 以共轭作用在这些同态上, 设 X 是这些同态的一个 $G(\mathbb{R})$ 共轭类. 我们要求 (G, X) 满足以下公理:

(1) 对所有 $h \in X$, 则 $(h, \mathrm{Lie}(G_{\mathbb{R}}))$ 的形号是 $\{(-1,1),(0,0),(1,-1)\}$ (其中 $\mathrm{Lie}(G_{\mathbb{R}})$ 是 $G_{\mathbb{R}}$ 的李代数).

(2) $h(\sqrt{-1})$ 是 $G^{\mathrm{ad}}_{\mathbb{R}}$ 的 Cartan 对合 (其中 G^{ad} 是 G 的伴随群).

(3) G^{ad} 内不存在左因子 H 使得 h 在 H 上投射为平凡映射.

设 $\mathbb{A}_f = \mathbb{Q} \otimes \varprojlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. 对每一 $G(\mathbb{A}_f)$ 的开紧子群 K, 设

$$Sh_K(G, X) = G(\mathbb{Q}) \setminus X \times (G(\mathbb{A}_f)/K).$$

我们称 $(Sh_K(G, X))_K$ 为 (G, X) 所决定的**志村簇**(Shimura variety)(见 [97]§2.1).

从这个定义我们是很难理解这种结构的. Deligne 在他的文章中也没有说清楚, 但我们可以这样想, 他在发表研究 Shimura 的工作 [96] Griffiths 横截性时, 正在研究 Hodge 结构, 在 [134] 里, Griffiths 透过很多例子指出 Hermite 空间是代数簇的周期的模空间 (period space). 他还发现了一组紧复流形的上同调必须满足的一个微分条件, 我们称这个条件为**Griffiths 横截性** (Griffiths transversality), 他称此为无穷小周期关系 (infinitesimal period relation) (见 [95] 定理 3.6, [11] §8.4.7). 现在我们可以回到前面三个公理. 公理 (1) 是等价于 Griffiths 横截性, 而公理 (2) 是等价于要求 h 所决定的 Hodge 结构是可以极化的 (polarizable). 证明见 [97] 命题 1.1.14. Deligne 把他关于 Hodge 理论的工作发表为他的博士论文 [98]. 公理 (3) 是等价于 $G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{R})$ 没有紧因子, 而这个条件是来自算术子群的定理:

定理 4.3.1(Borel 稠密定理) 设 G 为 $\mathbb{Q}$ 上半单群, G 没有紧因子, Γ 为 $G(\mathbb{Q})$ 的算术子群. 则 Γ 为 G 的 Zariski 稠密子群.

定理 4.3.2(强逼近定理) 设 G 为 $\mathbb{Q}$ 上单连通半单群, G 没有紧因子, 则 $G(\mathbb{Q})$ 为 $G(\mathbb{A}_f)$ 的稠密子群.

两个定理的证明请参看 [301]. 要了解志村簇还得多看例子. 最基本的例子是 $G = \mathrm{GL}_2$. 详情见 Shimura 著名的教科书 [344]. 这本书的结果翻译为概形和李群的无穷维表示也不是三言两语的事 (也许看看 [11] 和 [10] 有点帮助). 另一个基本的例子是 G 是一个四元代数的可逆元群, 这是 Shimura 和 Langlands 常用的群, 在他们之后很多人的文章里也出现过 (见 [96] 4.9, 4.13). 不过, 在这些人的文章中遇上技术问题时也是 "如是我闻" 而已. 比如说: 某个模函子是可表的, 他们都是引自 [259], 但实际上 Mumford 书中並没有一个他们所说的定理. 读者只好自我领会或求教于人了. 当然, 在明白了现有的定理后就可以开始做很多工作, 而不必顾虑这些定理的详细证明.

Langlands[230] 推广了经典的复乘理论, 提出共轭志村簇的猜想, 并从此推出任一志村簇必有**规范模形** (canonical model). 这个猜想由 Borovoi, Milne 和 K-Y. Shih 证出 (详情见 Michigan 大学的 J. Milne 的网页的多份笔记).

关于志村簇的一个问题是计算志村簇的 ζ 函数, 这项工作是由 Ihara, Shimura 开始的. 今人多跟随 Langlands[232],[233]. Carayol, Casselman, Gorgon, Hales, Haines, Kottwitz, Laumon, Milne, Reimann, Rapoport, Rogawski, Zink 都有这方面的文章. 这些计算是和特征 $p > 0$ 的 Abel 簇的模空间的结构有关. 近年 Oort 和翟敬立在这方面有新的发展.

另一个方向是研究志村簇的代数链的周期 (periods of algebraic cycles). 这个问题是与微分几何 (如 Griffiths 学派), 代数 K 理论 (如 Bloch 及其随人) 和自守形式理论 (如 Shimura, Manin) 有密切关系. 中心的问题是: Hodge 猜想. 科雷研究所悬红 100 万美元 (见 http://www.claymath.org/millennium/). 沿着 Hodge 的想法, Tate[370] 提出关于代数链的 Tate 猜想: 代数链群的秩等于 L 函数极点的阶. 除带 CM 的 Abel 簇外, 只有在两个情形下证明了 Tate 猜想: 开志村面 ([160]) 和闭志村面 ([220]). 至于计算代数链的周期有很多文章, 可以看 Yoshida, Tong-Wang[384], Kudla-Rapoport[216], Jacquet 和他的合作人的文章 [178] 和他们所引的文献.

还有一个热门的方向: 就是 p 进对称空间与 p 进自守形式理论. 这是由 Drinfeld, Katz[190] 和 Serre[335] 发起的. 有三本新书讲这方面的工作: [306], [131] 和 [165]. 近日 Kisin-黎景辉 [197] 用 Berthelot-Raynaud 的刚性解析几何 ([126]) 走出另一条路. 至于这些工作和 Schneider-Teitelbaum 的 p 进表示理论, Breuil 的 p 进 Hodge 理论和 Christol-Mebkhout 的 p 进微分方程理论的关系则是近日频频会议的话题, 文章还有待出现呢!

4.3.3 Hilbert 第 12 问题

为了帮助读者了解上一小节关于志村簇的讨论, 我们将在本节介绍 Hilbert 第 12 问题, 并且更深入地讲解志村簇. 尽管以下材料不是简单看看就能弄明白的, 不过我们希望这能成为一个开端, 使我们理解是什么在推动代数群的发展, 又见到这些好像是多头各方面的发展, 实际上是有个基本的中心的.

(Ⅰa) Hilbert 第 12 问题

设 F 是代数数域, 问: 怎样刻画 F 的交换扩张? 这是 Hilbert 的第 9 个问题. 基本上已知这一问题的答案是类域论 (class field theory) 的主要内容, 其中心定理是以下 4.3.3 的**互反律** (reciprocity law). 讲类域论有几种方法: 1) 解析方法, 用 L 函数理论: 见 Takagi (高木贞治) 的著名教科书 (日文) 和 Hasse 的讲义 (德文). 2) 用群论: 见 Neukirch 的书. 3) 用单代数: 见 Deuring 的代数书 (德文) 和

Chevalley, Weil 的讲义. 4) 用 Galois 上同调：见 Artin, Tate 的不完全讲义 (没有第一章的!). 5) 用 Grothendieck 的 étale 上同调：见 Artin-Mazur 讲义 (没有发表的). 众议是：市面流行的其他教本是有问题的!

定理 4.3.3　代数数域的交换 Artin L 函数都是 Hecke L 函数.

以 F^{ab} 记 F 的极大交换扩张, $\mathbb{A}_F^\times$ 记 F 的乘值量群 (idele group, 亦记为 J_F, 定义见第三篇 3.1.7 节), C_F 记 F 的 (乘值量) 类群 $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$, C_F^0 记 C_F 的单位元的连通分支, 则从以上定理 4.3.3 可以推出存在同构

$$C_F/C_F^0 \longrightarrow \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{ab}}/F): \ s \mapsto [s], \tag{4.1}$$

其中 $\mathrm{Gal}(F^{\mathrm{ab}}/F)$ 是扩张 F^{ab}/F 的 Galois 群. 根据 Galois 理论, 利用这个同构就可以找到 F 的任一个交换扩张 E/F 的 Galois 群, 也可以说是找到了 E. 不过这个同构并没有给出 E 的明显构造方法.

当 F 是有理数数域 $\mathbb{Q}$ 时, 类域论告诉我们

$$\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}} = \mathbb{Q}(e_N(1))_{N\in\mathbb{Z}_+^\times}.$$

这就是说 $\mathbb{Q}$ 的极大交换扩张是由 1 的 N 次根 $e_N(1) = \exp\frac{2\pi i}{N}$ 所生成 ($\mathbb{Z}_+^\times$ 是指正整数集). 而上面的同构 (4.1) 则是说：对 $s \in \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\times$,

$$e_N(1)^{[s]} = e_N(s^{-1}). \tag{4.2}$$

请注意两点：(i) $e_N(1)$ 只不过是指数函数的特殊值; (ii) 以上的 (4.2) 是一个明显的互反律.

Hilbert 的第 12 个问题可以表述为：如果把 $\mathbb{Q}$ 换为任意的代数数域 F, 可否找到一些解析函数 f 使在某些点的值生成 F 的极大交换扩张 F^{ab}. 进一步, 我们要求有像 (4.2) 的明显互反律 (explicit reciprocity law).

(I b) 椭圆模函数

$\mathbb{Q}$ 以外的最简单代数数域就是二次扩张, 当 K 是虚二次扩张时, Hilbert 的第 12 个问题早在 20 世纪初由 Kronecker, Weber, Tagaki 及 Hasse 等人的工作解决了. 这时我们用椭圆模函数代替指数函数.

设 L 为 $\mathbb{C}$ 内的格, 以 $j(L)$ 记椭圆曲线 C/L 的 j 不变量, 以 $f_{a,b,N}^k(L)$ ($k = 1,2,3$) 记 Weber-Fricke 函数 (我们假设 $\Delta(L) \neq 0$ 及 $(a,b) \neq (0,0) \bmod N$). 椭圆曲线的 n 阶点的坐标可由 Weber-Fricke 函数算出. 对 z 在上半复平面内, 以 $\langle z\rangle$ 记格 $z\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, 则 j 和 $f_{a,b,N}^k$ 可看成上半复平面上的函数：$j(z) = j(\langle z\rangle)$, $f_{a,b,N}^k(z) = f_{a,b,N}^k(\langle z\rangle)$. 这样 j 是一个一阶的模函数而 $f_{a,b,N}^k$ 是 N 阶的模函数. 这些函数的定义如下：

设 L 的基是 $\{\omega_1, \omega_2\}$, 定义

$$g_2(L) = 60 \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^4},$$

$$g_3(L) = 140 \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^6},$$

$$\Delta(L) = g_2^3(L) - 27 g_3^2(L),$$

$$\wp(z, L) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right), \qquad j(L) = \frac{1728 g_2^3(L)}{\Delta(L)},$$

$$f^1_{a,b,N}(L) = \frac{g_2(L) g_3(L)}{\Delta(L)} \wp\left(\frac{a\omega_1 + b\omega_2}{N}, L \right),$$

$$f^2_{a,b,N}(L) = \frac{g_2(L)^2}{\Delta(L)} \wp\left(\frac{a\omega_1 + b\omega_2}{N}, L \right)^2,$$

$$f^3_{a,b,N}(L) = \frac{g_3(L)}{\Delta(L)} \wp\left(\frac{a\omega_1 + b\omega_2}{N}, L \right)^3.$$

对 $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}\, z > 0$, 我们设

$$\alpha(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

则

$$j(\alpha(z)) = j(z).$$

若

$$\alpha \in \Gamma(N) = \{\alpha \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \mid \alpha \equiv 1 \bmod N\},$$

则

$$f^k_{a,b,N}(\alpha(z)) = f^k_{a,b,N}(z).$$

关于这些模函数和模形式的理论可以看 [15] 及 [17].

现设 F 是虚二次扩张. 固定 F 内的一个分式理想 $\mathfrak{a}$, 可以把 $\mathfrak{a}$ 看成 $\mathbb{C}$ 内的格. 在 $\mathfrak{a}$ 内可找到一个基 $\{\omega_1, \omega_2\}$ 使 $z = \omega_1 \omega_2^{-1}$ 在上半复平面上, 则 $F = \mathbb{Q}(z)$, $F \cong \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C}/\mathfrak{a})$ (即椭圆曲线 $\mathbb{C}/\mathfrak{a}$ 以 F 为**复乘** (complex multiplication)). 利用公式

$$x\left(\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}\right) = q(x) \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}$$

及注意到 $xI \subseteq I$, 我们可以定义一个单同态

$$q: F^{\times} \longrightarrow \mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})_+$$

使 z 为 $q(F^{\times})$ 的固定点 (此时常称 z 为代数环面 $q(F^{\times})$ 所决定的**特殊点** (special point)). 对 $s \in \mathbb{A}_F^{\times}$, $q(s)$ 可以写成 rt, 其中 $r \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})_+$, $t \in \mathrm{GL}(2,F_\infty)_+ \prod \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}_p)$. 把 t 写成 (t_∞, t_p), 这样则存在 $\beta \in M_2(\mathbb{Z}) \cap \mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})_+$ 使

$$t_p \equiv \beta \bmod N \cdot M(2,\mathbb{Z}_p).$$

若 $(a,b)\beta = (c,d)$, 则设

$$(f^k_{a,b,N})^{\nu(s)} = f^k_{c,d,N}.$$

设 $g_2(\mathfrak{a})g_3(\mathfrak{a}) \neq 0$ 及 $2k$ 是椭圆曲线的自同构群的阶. 则由类域论可推出虚二次扩张 F 的极大交换扩张 F^{ab} 是由模函数 j 和 $f^k_{a,b,N}$ 的特殊值所生成的参见 [344]:

$$F^{\mathrm{ab}} = F(j(\mathfrak{a}),\ f^k_{a,b,N}(\mathfrak{a})), \qquad a,b \in \mathbb{Z}, N \in \mathbb{Z}_+^{\times} \tag{4.3}$$

(其中 $(a,b) \not\equiv (0,0) \bmod N$), 而且有以下的明显互反律, 对 $s \in \mathbb{A}_F^{\times}$,

$$j(\mathfrak{a})^{[s]} = j(s^{-1}\mathfrak{a}),$$

$$f^k_{a,b,N}(\mathfrak{a})^{[s]} = (f^k_{a,b,N})^{\nu(s^{-1})}(\mathfrak{a}).$$

这一个虚二次扩张的理论有四个部分:

1) 定义在上半复平面上关于 SL(2) 的同余子群的模函数;

2) 虚二次扩张 $F/\mathbb{Q}$;

3) 由 F 的理想所决定在上半复平面内 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})_+$ 的子群的不动点;

4) 椭圆曲线及它的自同态环和 N 阶点.

这显然只是一个一维的情形, 在高维数的情形, 以上四个部分可分别推广如下:

1′) 定义在有界对称域 H 上, 关于代数群 G 的算术子群的自守函数;

2′) 代数数域;

3′) $G(\mathbb{Q})$ 的离散子群在 H 内的不动点;

4′) 交换簇的 PEL 结构, Hodge 结构, Motif 结构.

以上的公式让我们看见志村簇的一个基本性质: 即是 Galois 群的作用.

(Ic) 志村簇

在这个小节, 我们谈一个最重要的现代例子.

设 F 是全实代数数域 (即是说：若 $F/\mathbb{Q}$ 的次数是 g, 则有 g 个不相等的嵌入 $F \hookrightarrow \mathbb{R}$), B 是 F 上的全不定 (即 $B \otimes \mathbb{R} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^g$) 四元数代数, I 是 B 的主对合, G 是定义在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的代数群, G 的有理点是

$$G(\mathbb{Q}) = \{a \in \mathrm{GL}(n, B) \mid a \cdot {}^t a^I = v(a)1\},$$

其中 ${}^t a$ 是转置, $v : G \to F^\times$ 是同态. 设

$$G^u = \{a \in G \mid v(a) = 1\}.$$

取 $G^u(\mathbb{R})$ 的一个极大紧子群 K.

n 次 Siegel 上半平面 H_n 的元素是 $n \times n$ 复矩阵 Z, 并且虚部 $\mathrm{Im}\, Z$ 是正定的. 则有界对称域 $G^u(\mathbb{R})/K$ 与 H_n^g 同构, 其中 $g = [F : \mathbb{Q}]$ (F 的次数), 以 $G(\mathbb{A})$ 记 G 的 adele 点, G_0 记 $G(\mathbb{A})$ 的有限部分, $G_{\infty+}$ 记 $G(\mathbb{A})$ 无限部分包含单位元的连通分支, 对 G_0 的任一个开紧子群 S_0, 我们考虑 $G(\mathbb{A})$ 的子群 $G_{\infty+}$, S_0. 以 Z 记由这些 $G(\mathbb{A})$ 的子群所组成的集合.

Shimura 证明了：(i) 对每一个 $S \in Z$, 存在一个关于 $\Gamma_S = G(\mathbb{Q}) \cap S$ 的自守函数 f_S, 使这个函数诱导出一个双正则同构 $H_n^g/\Gamma_S \overset{\varphi_S}{\to} V_S$, 其中 V_S 是拟投影簇; (ii) 对 $S, T \in Z$, 若有 $x \in G_{\infty+} \cdot G_0$ 使 $xSx^{-1} \subset T$, 则有簇同态 $J_{\Gamma_S}(x) : V_S \to V_\Gamma^{\sigma(x)}$.

在 H_n^g 内有一些特别点, 每一个这样的点都是 $G(\mathbb{Q})$ 的某一个子群的唯一不动点对. Shimura 证明存出代数数域 P', 这 P' 是由有限个全实域的虚二次扩张所合成, 而且对 $S \in Z$, 有

(iii) $P'(\varphi_S(z))/P'$ 是交换扩张; (iv) 存在映射 $e : P'^\times \to G$, 使对 $u \in \mathbb{A}_{P'}^\times$,

$$\varphi_T(z)^{[u]} = J_{TS}(e(u)^{-1})\varphi_y(z),$$

这里的 (iii) 是相应于 Ⅰa 中的公式 (4.2), (iv) 可以看成明显互反律, 而 $\{V_S \mid S \in Z\}$ 就是志村簇.

(Ⅱa) 自守 L 函数

以下我们将使用表示论的语言, 没有学过的读者可以看看 [10].

要推广 Ⅰa 的定理 4.3.3, 可以先看怎样推广 Hecke L 函数. 设 χ 是 C_F 的特征标, 则 $\chi = (\chi_p)$, 其中 χ_p 是完备域 F_p 的特征标. 若 π 生成 F_p 的素理想, 则设 $\chi(p) = \chi_p(\pi)$. 这样 Hecke 的 L 函数是由以下公式定义：

$$L(s, \chi) = \prod_p (1 - \chi(p)(N_p)^{-s})^{-1}.$$

其中 s 是复数. 以 O_F 记 F 的代数整数环, 则 N_p 是指环 O_F/p 的阶数. 可以证明: 当 $\mathrm{Re}\, s > 1$ 时, $L(s,\chi)$ 是解析函数; $L(s,\chi)$ 可以延拓为半纯函数, 而且存在函数 $\varepsilon(s,\chi)$ 使 $L(s,\chi)$ 满足函数方程:

$$L(s\chi) = \varepsilon(s,\chi)L(1-s,\chi^{-1}).$$

显然 $F^\times$ 只不过是最简单的代数群 $\mathrm{GL}(1,F)$. 若把 $\mathrm{GL}(1,F)$ 换为既约代数群, 则相应于 χ 就是 G 的自守表示 π. 对 G 的 L 群 ${}^LG$ (又称 associated group) 的有限维表示 r, Langlands 用 Euler 积定义了 L 函数 $L(s,\pi,r)$, 并证明了当 $\mathrm{Re}\, s$ 足够大时, $L(s,\pi,r)$ 绝对收敛. 同时还猜想 $L(s,\pi,r)$ 可以延拓为半纯函数, 而且存在函数 $\varepsilon(s,\pi,r)$ 使

$$L(s,\pi,r) = \varepsilon(s,\pi,r)L(s,\widetilde{\pi},r),$$

其中 $\widetilde{\pi}$ 是与 π 逆步的表示. 这是自守形式理论中非常重要的猜想!

(Ⅱb) 局部 L 函数

G 的自守表示 π 是 $G(\mathbb{A})$ 的容许表示. π 可以写成限制张量积 $\otimes\pi_p$, 其中 π_p 是 $G(F_p)$ 的容许表示, 上一节的 $L(s,\pi,r)$ 是局部 L 函数 $L(S,\pi_p,r_p)$ 的积, 其中 $r = \otimes r_p$. 本节讨论这些局部的 L 函数. 假设 F 是局部域.

以 $\Pi(G(F))$ 记由 $G(F)$ 的不可约容许表示 (的无限小等价类) 所组成的集合. 设

$$\Pi(F) = \bigcup_{n\geqslant 1} \Pi(\mathrm{GL}(n,F)).$$

则 $\Pi(F)$ 是交换范畴. **Langlands 猜想**: 假如可以用 Tannaka 对偶, 则有 $\mathbb{C}$ 上既约代数群 $G_{\Pi(F)}$ 及双射映射 $\Pi(\mathrm{GL}(n,F)) \leftrightarrow \mathrm{Rep}(G_{\Pi(F)})_n$, 其中 $\mathrm{Rep}(G_{\Pi(F)})_n$ 是指 $G_{\Pi(F)}$ 的 n 维表示的等价类所组成的集合. 以 $\Phi(G(F))$ 记所有 $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ 上的容许同态 $\varphi: G_{\Pi(F)} \to {}^LG$. Langlands 猜想: 存在满映射 $\Pi_G: \Pi(G(F)) \to \Phi(G(F))$ 使对 $\varphi \in \Phi(G(F))$, $\Pi_G^{-1}(\varphi)$ 内的表示为 L 不可辨别. 这时, 若 $\pi \in \Pi_G^{-1}(\varphi)$, 则取 $L(s,\pi,r)$ 为 Artin L 函数 $L(s,r\circ\varphi)$.

(Ⅱc) L 同态

设 G 及 H 均为既约 F 群, G 为**拟裂群** (quasi-split), 及 $u: {}^LH \to {}^LG$ 为 L 同态. 设 $\pi = \otimes\pi_p$ 是 $H(\mathbb{A})$ 的不可约容许表示, $\widetilde{\pi} = \otimes\widetilde{\pi}_p$ 是 $G(\mathbb{A})$ 的不可约容许表示. 若对每一个 P, 存在 $\varphi \in \Phi(H(F_P))$ 使 $\pi_P \in \Pi_H^{-1}(\varphi)$ 及 $\widetilde{\pi}_P \in \Pi_G^{-1}(u\circ\varphi)$, 则说 π 升为 $\widetilde{\pi}$, 这时便有 $L(s,\widetilde{\pi},r) = L(s,\pi,r\circ u)$. 以 $A(G/F)$ 记 $G(\mathbb{A})$ 的所有不可约自守表示的等价类. Langlands 猜想: 存在一个映射 $u_*: A(H/F) \to A(G/F)$ 使 π 升为 $u_*(\pi)$.

例如若取 $H = \{1\}$, $G = \mathrm{GL}_n$. 则当 $n = 1$ 时, 以上的猜想便是 Ⅰa 的定理 4.3.3. 当 $n = 2$ 时, 这个猜想是与 Artin 猜想等价. 又若设 E/F 为有限 Galois 扩张, H 为 F 裂群, $G = R_{E/F}H$, 则以上的猜想便是换基 (Base change) 问题. 又若取 $G = \mathrm{GL}_2$, H 为 F 上的一个四元数代数的可逆元, 则这猜想已解决.

(Ⅲa) Hasse-Weil 函数

设 d 为 $\geqslant 1$ 的整数, X 为 $\mathbb{Z}[1/d]$ 上的光滑固有概形 (proper scheme). 对素数 $p \nmid d$, X 在 p 的 ζ 函数可由下式决定:

$$\log Z_p(s, X) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{ms}} (\#X(F_{p^m})),$$

其中 F_{p^m} 是指只有 p^m 个元的域. 除了有限个因子外, X 的 Hasse-Weil ζ 函数 $Z(s, X)$ 是积 $\prod_{p \nmid d} Z_p(s, X)$. 代数几何和数论的工作者一直对这个函数很有兴趣.

对任意光滑完备簇的 ζ 函数, 我们所知很少. 假如 V_S 是 Ⅰc 中的代数簇, Langlands 猜想 V_S 的 ζ 函数除了有限个因子外, 是可以写成 **Ⅱa** 中的 L 函数的乘积.

(Ⅲb) Shimura 簇的 ζ 函数

取 F, B, G 如 Ⅰc, 并设 $n = 1$. 这时 ${}^LG$ 是半直积 $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})^g \rtimes \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. 作表示 $\rho : {}^LG \to \otimes_1^g \mathbb{C}^2$ 如下: ρ 在 $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})^g$ 上是对每一个因子的标准表示, ρ 在 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 上是把因子排列. Langlands 证明了以下的

定理 4.3.4 除了有限个因子外, V_S 的 HasseWeil ζ 函数是 $\Pi_\pi L(s - g/2, \pi, \rho)^{m(\pi)}$, 其中 π 为 G 的自守表示, 整数 $m(\pi) \geqslant 0$.

证明分三部分, 首先用代数几何学的方法 (Grothendieck-Lefschetz 固定点定理) 算出 $\log Z(s, V_s)$ 的系数, 再用 Selberg 迹公式算 $L(s - g/2, \pi, \rho)$, 最后利用局部轨道积分 (及 Bruhat-Tits building 的理论) 来比较两边的结果.

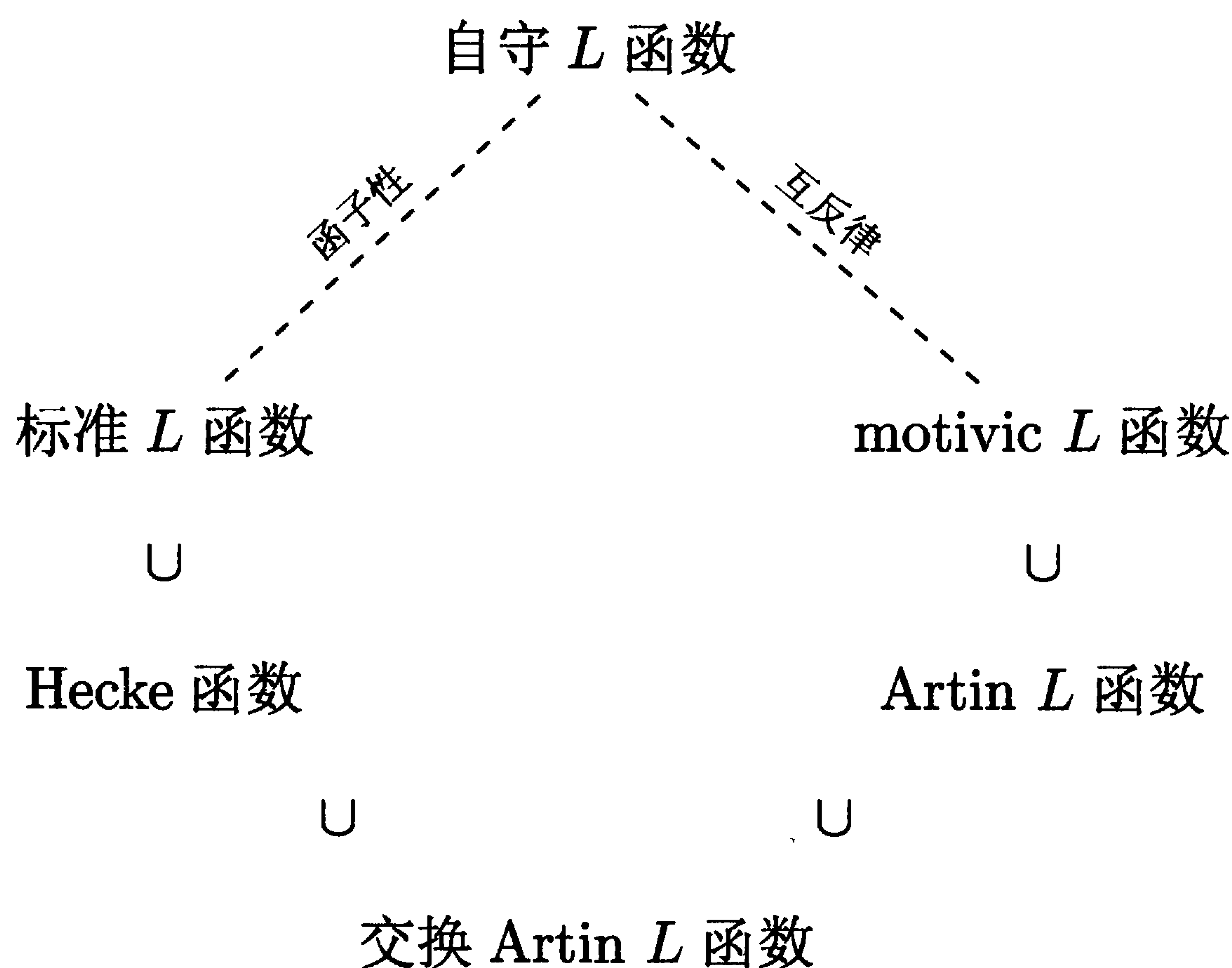
(Ⅲc) 标准 L 函数

现取 $G = \mathrm{GL}(n)$, 则 ${}^LG = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \times \mathrm{Gal}(K/F)$, 其中 K/F 为一个足够大的 Galois 扩张. 设 pr_1 为对第一个因子的投射 ${}^LG \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, π 为 $\mathrm{GL}(n)$ 的任一自守表示, 则称 Ⅱa 的自守 L 函数 $L(s, \pi, \mathrm{pr}_1)$ 为标准 L 函数, 并简记之为 $L(s, \pi)$. 对于这些 L 函数, Ⅱa 中的猜想是正确的.

设 G 是既约代数群, r 是 ${}^LG$ 的 n 次表示 ($r : {}^LG \to \mathrm{GL}(n)$). 若有 L 同态 $u : {}^LG \to {}^L\mathrm{GL}(n)$ 使 $r = \mathrm{pr}_1 \circ u$, 则 Ⅱc 中 Langlands 猜想的函子性原理 (principle of functoriality) 说 $L(s, \pi, r) = L(s, u_*(\pi))$. 如果可以这样做的话, 我们可以利用标准 L 函数的性质来研究自守 L 函数.

假如著名的 Hodge 猜想是正确的话．则 Grothendieck 的 motif 理论告诉我们：对每一个 motive M，有 L 函数 $L(s,M)$ (见 [45])，这样 IIIa 的猜想 (reciprocity principle) 就是说：$L(s,M)$ 可以写成几个自守 L 函数的积.

我们可以作一个简图：



(IVa) 椭圆曲线的 ζ 函数

设 $\mathbb{Q}$ 为有理数域，E 是在 $\mathbb{Q}$ 上定义的椭圆曲线．则有满足以下条件的 Weierstrass 方程定义 E：

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6, \tag{4.4}$$

所要求的条件如下：

(i) 方程 (4.4) 中的系数 $a_i \in \mathbb{Z}$ (整数);

(ii) 对每一个整数 p，判别式

$$\begin{aligned}\Delta = \Delta(a_1,\cdots,a_6) = &-(a_1^2+4a_2)^2[(a_1^2+4a_2)a_6 - a_1a_3a_4 + a_2a_3^2 - a_4^2] \\ &-8(a_1a_3+2a_4)^3 - 27(a_3^2+4a_6)^2 + 9(a_1^2+4a_2)(a_1a_3+2a_4)(a_3^2+4a_6)\end{aligned} \tag{4.5}$$

的 p 阶为最小．对 $a \in \mathbb{Z}$，以 $\overline{a}$ 表示 a 在 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 的像．方程

$$y^2 + \overline{a}_1xy + a_3y = x^3 + \overline{a}_2x^2 + \overline{a}_4x + \overline{a}_6 \tag{4.6}$$

给出一条定义在 $F_p\ (=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ 上的代数曲线，以 E_p 表示之，称 E_p 为 E **对模 p 的约化** (reduction mod p).

如果 $p \nmid \Delta(a_1, \cdots, a_6)$ (p 不能除尽 Δ), 则 $\overline{E}_p$ 仍然是一条椭圆曲线; 否则 $\overline{E}_p$ 是一条只有一个奇点, 亏格为零的代数曲线. 设

$$N = N(E) = \prod_{p|\Delta} p^{f_p},$$

称 N 为 E 的**前导子** (conductor) (其中 f_p 为整数, N 的定义可参考 [347] App C §16). N 是用来度量 E 的**坏约化** (bad reduction) 的程度.

以 $\overline{E}_p(\mathbf{F}_p)$ 表示 $\overline{E}_p$ 的 $\mathbf{F}_p$ 有理点, $N_1(p)$ 表示 $\overline{E}_p(\mathbf{F}_p)$ 里的元素个数. 这就是说, $N_1(p)$ 是不定方程 (4.6) 在 $\mathbf{F}_p$ 上的解的个数加 1; 也可以说成, $N_1(p)$ 是同余方程

$$y^2 + a_1xy + a_3y \equiv x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6 \pmod p$$

的解的个数加 1, 集 $\{N_1(p) \mid p \text{ 为素数}\}$ 可以看做 E 的一个算术数据. 我们把这些数据存储在一个解析函数里：E 的 Hasse-Weil ζ 函数是

$$\zeta(E,s) = \prod_{p<\infty} (1 - a_p p^{-s} + \psi(p)p^{1-2s})^{-1}, \tag{4.7}$$

其中 $s \in \mathbb{C}$, $a_p = 1 + p - N_1(p)$,

$$\psi(p) = \begin{cases} 0, & \text{若 } p \mid N(E), \\ 1, & \text{若 } p \nmid N(E). \end{cases}$$

设 $p \nmid N(E)$, a_1 和 a_2 为满足以下方程的复数：

$$1 - a_p u + pu^2 = (1 - a_1 u)(1 - a_2 u),$$

则根据椭圆曲线的黎曼假设

$$|a_1| = |a_2| = p^{1/2}, \tag{4.8}$$

由此容易证明无穷乘积 (4.7) 在右半平面 $\mathrm{Re}(s) > \frac{3}{2}$ 上决定一个解析函数. 现在我们可以写下 Weil 在 1967 年提出的

猜想甲：设 E 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的椭圆曲线, N 为 E 的前导子; χ 是一个对模 m 之原 Dirichlet 特征标 (参看 [6] 第 7 章 §3), 其中 $(m, N) = 1$. 设

$$\zeta(E,s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s}$$

为 $\zeta(E,s)$ 的 Dirichlet 级数展开. 定义

$$\zeta(E,\chi,s)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\chi(n)n^{-s} \tag{4.9}$$

及

$$L(E,\chi,s)=(m^2N)^{s/2}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\zeta(E,\chi,s), \tag{4.10}$$

则 $L(E,\chi,s)$ 是一个整函数 (其中 $\Gamma(s)$ 是经典的 Γ 函数), 在 $\mathbb{C}$ 的垂直带上有界, 而且满足以下的函数方程

$$L(E,\chi,s)=w\frac{g(\chi)}{g(\overline{\chi})}\chi(-n)L(E,\overline{\chi},2-s),$$

其中 $g(\chi)=\sum_{y=1}^{m}\chi(y)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}y/m}$ 为高斯和, $w=\pm1$.

作为以上猜想的一个实验数据, 我们介绍一个例子:

设 E 是由方程

$$y^2+y=x^3-x^2,$$

所定义的椭圆曲线, E 的判别式是 -11, E 的前导子是 11. 可以证明 E 与以下的 Fricke 曲线 E' 同源 (isogenous):

$$y^2=-44x^3+56x^2-20x+1,$$

因而 $\zeta(E,s)=\zeta(E',s)$. 另一方面, 设 $\mathfrak{H}$ 为上半复平面,

$$\Gamma_0(11)=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\ \middle|\ c\equiv 0 \bmod 11\right\},$$

则 Fricke 曲线为**模簇** (modular variety) $\Gamma_0(11)\backslash\mathfrak{H}$ 之**模型** (model). 进一步设

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{2\pi inz},\quad c_1=1,$$

为在 $\Gamma_0(11)$ 上权 $=2$ 的唯一**尖形式** (cusp form), 则

$$\zeta(E,s)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nn^{-s},$$

这样根据模形式的 Hecke 理论, 猜想甲在 $\chi=1$ 的情形下成立.

(IVb) 模形式理论

F. Klein 曾说过, 在他年轻的时候 (19 世纪下半叶), 模函数 (modular function) 理论是一门热门的学问, 但这个理论被遗忘了. 直至最近由于 Weil, Siegel,

Langlands, Selberg, Shimura 等人的工作, 才把整个局面完全反转过来, 引起许多有为的数学工作者的兴趣 (如 Serre, Deligne, Drinfeld, Faltings, Lafforgue, Borcherds, Margulis 等 (都得过 Fields 奖)), 而介绍模形式的书更如雨后春笋.

我们不打算全面介绍模形式理论, 而只是简介与椭圆曲线有关的内容.

以 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ 表示如下之群:

$$\left\{\alpha=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\,\middle|\, \det\alpha>0\right\}.$$

$\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ 作用在上半复平面 $\mathfrak{H}$ 上:

$$a(z)=\frac{az+b}{cz+d},\qquad z\in\mathfrak{H},\alpha\in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}).$$

设

$$\Gamma_0(N)=\left\{\alpha=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\,\middle|\, c\equiv 0 \bmod N\right\}.$$

设 $f(z)$ 为 $\mathfrak{H}$ 上的函数, k 为非负整数, 及

$$\alpha=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}),$$

定义

$$(f|_k\alpha)(z)=(ad-bc)^{\frac{k}{2}}(cz+d)^{-k}f(\alpha(z)).$$

一个在 $\Gamma_0(N)$ 上权为 k 的模形式是指一个满足以下条件定义在 $\mathfrak{H}$ 上的函数 $f(z)$:

$$f|_k\gamma=f,\qquad \text{对所有 }\gamma\in\Gamma_0(N)$$

(f 还要满足一些解析条件).

因为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\in\Gamma_0(N)$, 以上条件说明 $f(z+1)=f(z)$. 于是有 Fourier 展开:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\mathrm{e}^{2\pi inz}.$$

如果 f 在无穷远点取值 0, 则称 f 为**尖形式** (cusp form), 此时 $a_0=0$. 由权为 k 的尖形式所组成的线性空间记为 $S_k(\Gamma_0(N))$. 用 f 的 Fourier 系数所决定的 Dirichlet 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nn^{-s}$ 称为 f 的 L 函数並记为 $L(f,s)$. 在尖形式中有一组

所谓**标准原形** (normalized primitive form). 按 Hecke-Weil 的定理, 前面的猜想甲是和以下的猜想乙等价.

猜想乙：设 E 为一定义在 $\mathbb{Q}$ 上, 前导子为 N 的椭圆曲线. $\zeta(E,s)=\sum a_n n^{-s}$ 为 E 的 ζ 函数. 则函数

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nz}$$

是 $S_2(\Gamma_0(N))$ 内的一个标准原形, 而且

$$L(f,s)=L(E,s).$$

利用模形式与 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$ 的自守表示的关系, 我们可把猜想乙改写为

猜想丙：设 E 为一定义在 $\mathbb{Q}$ 上的椭圆曲线, 则存在一个 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$ 的尖性表示 $\pi(E)$, 使得 $L(\pi(E),s-\frac{1}{2})=L(E,s)$.

从 Langlands 纲领的观点来看这个等价是很自然的. 从椭圆曲线 E 得出 E 的上同调群, 进而决定一组 Galois 群 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ 的二维表示 σ_p. 按 Langlands 纲领所猜想的 Langlands 对应则从 $\{\sigma_p\}$ 应得出自守表示 $\pi(E)$.

话虽然是这样说, 但实际上有很多技术上的问题. 比如给出一组 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q}_p)$ 的无限维表示 π_p, 怎样决定 $\otimes\pi_p$ 是 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$ 的自守表示呢? 现在已由 Wiles 及他的学生们所证明的 Shimura-Taniyama-Weil 猜想 (即定义在 $\mathbb{Q}$ 上的椭圆曲线都是模曲线) 实际上就是猜想丙. 他们的证明所用的方法便是以下一篇群概形为基础的, 我们第一篇亦到此为止.

第二篇　群　概　形

本篇所讨论的是这样的结构：考虑概形同态 $G \to S$, 其中 G 带有群结构. 我们称 G 为 S 群概形. 这种结构带有丰富的算术内容. 我们将分别讨论两个重要的情形, 一是 G 为有限群概形, 二是 G 为 Abel 概形.

在第一篇我们讨论了域 k 上的线性代数群 G. 我们可以看作为研究 $G \to \operatorname{Spec} k$. 此时概形 $\operatorname{Spec} k$ 的集合只是一点. 在实际应用的情况下, 有必要考虑一族代数群 $\{G_s\}_{s\in S}$. 例如当我们研究模形式时便是如此. 这时直观上把 S 看作参数空间, 对 S 的每一个点 s 给出一个代数群 G_s. 我们还可以要求 S 有代数概形的结构. 如此便得到概形 S 上的群概形 $G \to S$ 这个概念. 这并不是一个简单的推广. 例如 $\mathbb{Z}$ 是整数环, $S = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ 时, 对于不同的点 $p \in S$, G_p 的特征是不同的! 我们有必要使用 Grothendieck 的概形理论, 这是不能避免的. 在第一篇我们只是简单的介绍代数簇的基本概念进而讨论线性代数群. 从这一篇开始, 我们假定读者有概形理论的基本知识.

我们将从仿射群概形开始, 然后把群概形看作一个函子 (读者可参看 [11] 第一章). 第 1 章是比较难的一章, 我们将应用 Grothendieck 拓扑理论 (背景知识可参见本书附录). 其余是念近代数论必要的知识.

概形的学习在我国还不是十分普遍. 所以本章的写法与前章有点不同. 我们经常有重复, 对高能力的读者来说比较累赘, 但对初学的人肯定有好处.

第一章　群概形的初等性质

1.1　有　限　性

在未开始本章的正题之前, 我们先说明几个 "有限性" 的概念, 以免日后混淆.

1.1.1　模的有限性

定义 1.1.1　设 R 是环. 我们说一个 R 模是**有限生成的** (finitely generated), 如果存在有限秩的自由 R 模 F_0 以及正合序列

$$F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

若 $F = \bigoplus_{i=1}^n Rx_i$, 在同态 $F_0 \to M$ 下 x_i 映为 m_i $(i = 1, \cdots, n)$, 则定义中的条件是说 M 中存在有限子集 $\{m_1, \cdots, m_n\}$, 使得 M 的任一元素 m 皆可表为 $m_1, \cdots, m_n$ 的 R 线性组合 $m = \sum_{i=1}^n r_i m_i$ $(r_i \in R, \forall\, 1 \leqslant i \leqslant n)$. 有限生成 R 模常被称为 "有限 R 模". 这时所谓 "有限 $\mathbb{Z}$ 模" 指的并不一定是有限交换群. 通常, 有限群是指此群本身是一个有限集! 因此我们将不用 "有限 R 模" 这个容易混淆的术语, 而是用有限生成 R 模.

定义 1.1.2　我们说一个 R 模是**有限展示的** (finitely presented), 如果存在有限秩的自由 R 模 F_0 和 F_1 以及正合序列

$$F_1 \xrightarrow{\rho} F_0 \xrightarrow{\gamma} M \longrightarrow 0.$$

设 $G = \operatorname{Im} \rho$, 则定义 1.1.2 中的正合序列可以写为以下两个正合序列

$$F_1 \longrightarrow G \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow G \longrightarrow F_0 \xrightarrow{\gamma} M \longrightarrow 0.$$

若 $F_0 = \bigoplus_{i=1}^n Rx_i$, $\gamma(x_i) = m_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, 则 F_0 的元素 $\sum_{i=1}^n r_i x_i$ $(r_i \in R, 1 \leqslant i \leqslant n)$ 属于 G (视为 $\operatorname{Ker} \gamma$) 当且仅当 $\sum_{i=1}^n r_i m_i = 0$. 这就是说 G 是 M 的生成元 $m_1, \cdots, m_n$ 之间的全部线性关系. 所以, M 是有限展示的 R 模的含义是: 不仅 M 是有限生成的, 而且生成元之间的 R 线性关系也是有限的.

1.1.2 有限型态射

定义 1.1.3 我们说概形态射 $f: X \to Y$ 在点 $x \in X$ 处是**有限型**的 (finite type), 如果存在 $f(x)$ 的仿射开邻域 V 和 x 的仿射开邻域 U, 使得 $f(U) \subset V$ 并且 $\mathscr{O}_X(U)$ 是有限型 $\mathscr{O}_Y(V)$ 代数 (即存在有限多个变元 $T_1, \cdots, T_n$ 以及 $\mathscr{O}_Y(V)$ 代数的满同态 $\mathscr{O}_Y(V)[T_1, \cdots, T_n] \twoheadrightarrow \mathscr{O}_X(U)$). 称 f 是**局部有限型**的 (locally of finite type), 如果 f 在所有的 $x \in X$ 处都是有限型的 (参见 $[145]_1$ 1.3 节). 称概形态射 $f: X \to Y$ 是**有限型**的 (finite type), 如果存在 Y 的仿射开覆盖 $\{V_\alpha\}$, 使得对于任一 α, 存在 X 的有限多个仿射开子概形 U_{α_i} $(1 \leqslant i \leqslant n_\alpha)$, 使得 $f^{-1}(V_\alpha) = \bigcup_{i=1}^{n_\alpha} U_{\alpha_i}$ 并且 $\mathscr{O}_X(U_{\alpha_i})$ 是有限型 $\mathscr{O}_Y(V_\alpha)$ 代数 (参见 [142] 6.3 节, $[145]_1$ 1.5 节).

1.1.3 拟紧态射和有限展示态射

定义 1.1.4 我们说概形态射 $f: X \to S$ 是**拟紧的** (quasi-compact), 如果对于 S 的任一开拟紧子集 V, $f^{-1}(V)$ 都是 X 的拟紧子集 (参见 $[145]_1$ (1.1.1)).

f 是拟紧的充分必要条件是: 对于 S 的任一仿射开子集 V, $f^{-1}(V)$ 都是 X 的有限多个仿射开子集的并集. 所以, 若 X 是 Noether 概形, 则由 X 到 S 的浸入是拟紧态射.

定义 1.1.5 我们说概形态射 $f: X \to S$ 是**局部有限展示的** (locally finitely presented), 如果对于 X 的任一点 x, 存在 x 的仿射开邻域 $U = \operatorname{Spec} B$ 以及 $f(x)$ 的仿射开邻域 $V = \operatorname{Spec} A$, 使得 $f(U) \subset V$ 并且由 F 决定的 A 代数 B 是有限展示的 (即 B 同构于 $A[T_1, \cdots, T_n]/\mathfrak{a}$, 其中 $\mathfrak{a}$ 是多项式环 $A[T_1, \cdots, T_n]$ 的有限生成理想 (参见 $[145]_1$ (1.4.1)). 称概形态射 f 为**有限展示的** (finitely presented), 如果 f 是局部有限展示的, 并且 f 和 f 所决定的对角态射 $\Delta: X \to X \times_S X: x \mapsto (x, x)$ 都是拟紧的 (参见 $[145]_1$ (1.6.1)).

容易证明: 拟紧开浸入 (open immersion) 必是有限展示的.

1.1.4 有限态射

定义 1.1.6 称概形态射 $f: X \to Y$ 是**拟有限的** (quasi-finite), 如果 f 是有限型的并且对于任一 $y \in Y$, 纤维 $f^{-1}(y)$ 是有限集 (参见 [143] (6.2.3)).

定义 1.1.7 称概形态射 $f: X \to Y$ 是**有限的** (finite), 如果存在 Y 的仿射开覆盖 $\{U_\alpha\}$, 使得 $f^{-1}(U_\alpha)$ 都是 X 的仿射子概形, 并且环 $\mathscr{O}_X(f^{-1}(U_\alpha))$ 是有限生成 $\mathscr{O}_Y(U_\alpha)$ 模 (参见 [143] §6). 概形态射 $f: X \to Y$ 称为**局部有限自由的** (locally finite free), 如果 f 是有限态射, 并且上面所说的 $\mathscr{O}_X(f^{-1}(U_\alpha))$ 是有限生成自由 $\mathscr{O}_Y(U_\alpha)$ 模. 换句话说, $\mathscr{O}_X$ 是局部自由有限秩 $\mathscr{O}_Y$ 模. 此时, 对于 $y \in U_\alpha$, 令 $[X:Y](y)$ 为 $\mathscr{O}_Y(U_\alpha)$ 模 $\mathscr{O}_X(f^{-1}(U_\alpha))$ 的秩 (则 $[X:Y]$ 为 Y 上的局部常值函数), 我们称函数 $[X:Y]$ 为 X 在 Y 上的**阶** (order), 又称它为态射 f 的**秩** (rank).

定义 1.1.8　设 $f: X \to S$ 是概形态射. 我们说 f 是**平坦的** (flat), 如果对于任一 $x \in X$, 茎 $\mathscr{O}_{X,x}$ 是平坦的 $\mathscr{O}_{S,f(x)}$ 模 (参见 [142] (0.6.7.1), $[145]_2$ (2.1.1)). 平坦满态射称为**忠实平坦的** (faithfully flat) (参见 [142] (0.6.7.8)).

设 S 为局部 Noether 概形. 由于有限展示模是平坦的当且仅当它是局部自由的, 所以概形态射 $X \to S$ 是有限平坦的当且仅当 $\mathscr{O}_X$ 是局部自由有限秩的 $\mathscr{O}_S$ 模.

命题 1.1.1　(1) 设 $X \to Y \to S$ 为概形态射, 其中 $X \to Y$ 有限平坦, 并且阶 $[X:Y]$ 为常值 $m > 0$. 则 $X \to S$ 有限平坦当且仅当 $Y \to S$ 有限平坦. 此时有等式 $[X:S] = [X:Y][Y:S]$.

(2) 若概形态射 $X_i \to S$ $(i = 1, 2)$ 是有限平坦的, 则 $[X_1 \times_S X_2 : S] = [X_1 : S][X_2 : S]$.

(3) 若概形态射 $X \to S$ 是有限平坦的, T 为任一 S 概形. 则 $X \times_S T : T] \to T$ 是有限平坦的, 并且 $[X \times_S T : T] = [X : T]$.

1.2　S 群概形

1.2.1　S 概形

固定一个概形 S. 我们以 $\mathfrak{Sch}/S$ 记 S 概形范畴, 其对象为概形态射 $X \to S$ (称为 S 概形), 由对象 $X \to S$ 到 $Y \to S$ 在范畴 $\mathfrak{Sch}/S$ 内的态射 (称为 S 态射) 是指概形态射的交换图

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle g} & \\ & S & \end{array}$$

我们以 $\mathrm{Hom}_S(X, Y)$ 记所有由 X 到 Y 的 S 态射组成的集合.

若 X, T 是 S 概形, 则称 S 态射 $T \to X$ 为 X 的 T 点. X 的所有 T 点组成的集合记为 $X(T)(= \mathrm{Hom}_S(T, X))$. 又若 $T = \mathrm{Spec}\, B$, 则以 $X(B)$ 记 $X(T)$.

1.2.2　S 群概形

定义 1.2.1　概形 S 上的一个**群概形** (group scheme) 是指一个概形态射 $\pi: G \to S$, 同时具有 S 态射 $\mu: G \times_S G \to G$, $\iota: G \to G$, $\varepsilon: S \to G$, 满足以下条件:

(1) 结合律. 即下面的图交换

$$\begin{array}{ccc} G\times_S G\times_S G & \xrightarrow{1_G\times\mu} & G\times_S G \\ {\scriptstyle \mu\times 1_G}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ G\times_S G & \xrightarrow{\quad\mu\quad} & G \end{array}$$

(2) 单位律. 即下面的图交换

$$\begin{array}{ccccc} & & G\times_S G & & & & \\ & \overset{\approx}{\nearrow} & & \overset{\varepsilon\times 1_G}{\searrow} & & & \\ G & & & & G\times_S G & \xrightarrow{\quad\mu\quad} & G \\ & \underset{\approx}{\searrow} & & \underset{1_G\times\varepsilon}{\nearrow} & & & \\ & & G\times_S G & & & & \end{array}$$

(3) 逆律. 以 Δ 记对角态射: $\Delta: G\to G\times_S G$: $g\to(g,g)$, 则由图

$$G \xrightarrow{\quad\Delta\quad} G\times_S G \underset{\iota\times 1_G}{\overset{1_G\times\iota}{\rightrightarrows}} G\times_S G \xrightarrow{\quad\mu\quad} G$$

得到的两个合成态射 $G\to G$ 都等于 $\varepsilon\circ\pi$. 此时我们又称 G 是范畴 $\mathfrak{Sch}/S$ 中的**一个群对象** (group object).

当我们说到 S 群概形 $G\xrightarrow{\pi}S$ 具有某种性质时, 是指态射 π 具有该性质. 例如, 说 G 是有限 S 群概形, 意即 π 是有限概形态射.

对于 S 群概形 G, 与通常一样, 如果有 S 概形态射 $T\to G$, 则以 $G(T)$ 记 $\mathrm{Hom}_S(T,G)$, 并称 $G(T)$ 的元素为 G 的 T **值点** (T-valued point).

1.2.3　S 群同态

定义 1.2.2　设 (G,μ) 和 (G',μ') 是 S 群概形. 如果 S 态射 φ : $G\to G'$ 使得下面的图交换:

$$\begin{array}{ccc} G\times G & \xrightarrow{\varphi\times\varphi} & G'\times G' \\ {\scriptstyle \mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu'} \\ G & \xrightarrow{\quad\varphi\quad} & G' \end{array}$$

则称 φ 是 S 群同态.

1.2.4 几点说明

群概形的一个重要的例子就是椭圆曲线. 它在高维情形下的推广是 Abel 概形. 另外一类重要的群概形是本章所要讨论的仿射群概形.

一个群概形 G 包含了若干复杂的资料. 研究 G 的一个方法是把 G "线性化", 即从 G 出发构造出一些线性的资料. 当今所谓的 "Dieudonné 理论" 就是当基概形的特征 $p>0$ 时这种方法的体现之一. 虽然我们不能在本书中详细介绍这个理论, 我们在这里举一个重要的例子.

以 $\mathbb{Z}_p$ 记 p 整数环. 引入两个变元 F ("Frobenius") 和 V ("Verschiebung"). 定义 Dieudonné 环 $D=\mathbb{Z}_p[F,V]/(FV-p)$. 一个有限 Honda 系统是指一个偶对 (L,M), 其中 M 是 D 模, 它作为 $\mathbb{Z}_p$ 模是长度有限的, L 是 M 的 $\mathbb{Z}_p$ 子模, 并且下面的合成态射是同构:

$$L/p \longrightarrow M/p \longrightarrow M/FM.$$

定理 1.2.1(Fontaine) 阶为 p 的方幂的有限平坦 $\mathbb{Z}_p$ 群概形范畴等价于有限 Honda 系统范畴.

A. Wiles 在他的 Fermat 大定理的证明中就要用这个定理.

1.3 仿射群概形和 Hopf 代数

从现在起, 除非有特别的声明, 我们所说的环都是指有乘法单位元的交换环, 环同态都是指把单位元映到单位元的同态.

1.3.1 Hopf 代数

定义 1.3.1 设 R 是环. 一个 R 代数 A 称为 Hopf 代数 (Hopf algebra), 如果存在三个 R 模同态

$$m: A \longrightarrow A\otimes_R A,\quad e: A\longrightarrow R,\quad i: A\longrightarrow A$$

使得下面的三个图交换:

$$\begin{array}{ccc} A\otimes A\otimes A & \xleftarrow{\mathrm{id}\otimes m} & A\otimes A \\ \uparrow{\scriptstyle m\otimes \mathrm{id}} & & \uparrow{\scriptstyle m} \\ A\otimes A & \xleftarrow{m} & A \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} R\otimes A & \xleftarrow{e\otimes\mathrm{id}} & A\otimes A \\ \approx\uparrow & & \uparrow m \\ A & \xleftarrow{=} & A \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{(i,\mathrm{id})} & A\otimes A \\ \uparrow & & \uparrow m \\ R & \xleftarrow{e} & A \end{array}$$

若 $a \in A$, $m(a) = \sum b_j \otimes c_j$, 则第二、三图交换分别是指以下二等式成立:

$$a = \sum e(b_i)c_j, \qquad e(a) = \sum i(b_j)c_j.$$

称 m 为**余乘法** (comultiplication), e 为**增广映射** (augmentation map), i 为**余逆映射** (coinverse). e 的核称为 A 的**增广理想** (augmentation ideal). 若 R 从右边作用在 A 上, 则上述等式中的第一个应写为 $a = \sum b_i e(c_j)$, 第二个等式类似地改变.

1.3.2　仿射群概形

设 (A, m, e, i) 是环 R 上的 Hopf 代数. 如果令 $G = \operatorname{Spec} A$, $S = \operatorname{Spec} R$, 则由 m, e, i 所决定的 R 态射 $\mu:\ G \times_S G \to G$, $\varepsilon:\ S \to G$ 和 $\iota:\ G \to G$ 满足 S 群概形定义中所要求的交换图, 所以 G 是 S 群概形.

定义 1.3.2　由 Hopf 代数所决定的群概形称为**仿射群概形** (affine group scheme). 上述的由 R 上的 Hopf 代数 A 所决定的 S 群概形称为 R 群概形 (R-group scheme).

1.3.3　群概形的值点群

设 (A, m, e, i) 是环 R 上的 Hopf 代数, G 为 R 群概形. 又设 B 为 R 代数, 则 $G(B) = \mathrm{Hom}_{R代数}(A, B)$ 在下述的运算下构成群: 对于 $x, y \in G(B)$, 定义 $x \cdot y$ 为 $(x, y)m$. 这就是说, 对于 $a \in A$, 若 $m(a) = \sum a_i \otimes a_i'$, 则

$$(x \cdot y)(a) = \sum x(a_i) y(a_i').$$

1.3.4　闭子群概形

设 J 为 R Hopf 代数 (A, m, e, i) 的理想. 如果 J 满足以下条件

(1) $m(J) \subset J \otimes A + A \otimes J$,

(2) $i(J) \subset J$,

(3) $e(J) = 0$,

则 A 的 Hopf 代数结构诱导出 A/J 的 Hopf 代数结构. 于是 $\mathrm{Spec}(A/J)$ 是 G 的**闭子群概形** (closed subgroup scheme). 可以这样地理解条件 (1): 对于任意的 R 代数 B, 若 $x, y \in G(B)$ 使得 $x(a) = 0 = y(a)$ $(\forall\, a \in J)$, 则 $(x \cdot y)(a) = 0$ $(\forall\, a \in J)$.

1.3.5 有限平坦 R 群概形

设 R 是环, $G = \mathrm{Spec}(A)$ 是有限平坦 R 群概形, 则 Hopf 代数 A 是有限秩自由 R 模. 令 $A^* = \mathrm{Hom}_{R模}(A, R)$, 则 A 的 Hopf 代数的余乘法 m 给出 A^* 的 (不一定交换) 乘法:

$$m^*:\ A^* \otimes_R A^* \longrightarrow (A \otimes_R A)^* \longrightarrow A^*.$$

由于

$$G(R) = \mathrm{Hom}_{R代数}(A, R) \subset \mathrm{Hom}_{R模}(A, R) = A^*,$$

所以群 $G(R)$ 的乘法正是 A^* 的乘法, 并且 $G(R)$ 正是 A^* 的可逆元所组成的群.

现在取 R 代数 B. 由于

$$\mathrm{Hom}_{R模}(A, B) = \mathrm{Hom}_{B模}(A \otimes_R B, B) = \mathrm{Hom}_{R模}(A, R) \otimes_R B,$$

所以

$$G(B) = \mathrm{Hom}_{R代数}(A, B) \subset \mathrm{Hom}_{R模}(A, R) \otimes_R B.$$

于是可以把 $f \in A \otimes_R B$ 看作 $G(B)$ 的函数, 即对于 $x \in G(B)$, $f(x) = \langle x, f\rangle$, 这个 $\langle\,,\,\rangle$ 的含义是: 对于 $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(A, R)$ 和 $a \in A$, $\langle \varphi, a\rangle$ 是指值 $\varphi(a)$.

对于 $\lambda \in G(B)$, 定义**右平移** (right translation) $\tau_\lambda f$ 如下:

$$(\tau_\lambda f(x)) = f(x\lambda),$$

其中 $x\lambda$ 是在 $\mathrm{Hom}_R(A, R) \otimes_R B$ 内所作的乘法.

命题 1.3.1 设 $G = \mathrm{Spec}(A)$ 是有限平坦 R 群概形.

(1) 设 $\varphi:\ A \to A$ 为 R 线性映射, 则它的对偶 $\varphi^*:\ A^* \to A^*$ 满足以下的等式:

$$(\mathrm{id}_{A^*} \otimes \varphi)(\mathrm{id}) = (\mathrm{id}_A \otimes \varphi^*)(\mathrm{id}),$$

其中 id 为 $G(A) \subset A^* \otimes_R A$ 的单位元.

(2) 设 $\lambda \in G(R)$, 令 $\tau = \mathrm{id}_{A^*} \otimes \tau_\lambda$, 其中 $\tau_\lambda:\ A \to A$ 为右平移. 以 ρ 记 $\mathrm{id} \in G(A) \subset A^* \otimes_R A$ 在 $A^* \otimes_R A$ 上的右乘作用, 以 l 记 $\lambda \otimes 1$ 在 $A^* \otimes_R A$ 上的右乘作用, 则有左 A^* 模 $A^* \otimes_R A$ 的自同构的等式

$$\tau\rho\tau^{-1}\rho^{-1} = l.$$

证明　(1) 利用同构 $A^* \otimes_R A \cong \mathrm{End}_R(A) \cong \mathrm{End}_R(A^*)$ 证得.

(2) 在 (1) 中取 $\varphi = \tau_\lambda$, 则 $\tau(\mathrm{id}) = \mathrm{id} \cdot (\lambda \otimes 1)$. 因为 τ_λ 是环同态, 所以 τ 是环同态. 因此, 对于 $x \in A^* \otimes_R A$, 有

$$\tau\rho(x) = \tau(x \cdot \mathrm{id}) = \tau(x) \cdot \tau(\mathrm{id}) = \tau(x) \cdot \mathrm{id} \cdot (\lambda \otimes 1) = l\rho\tau(x). \qquad \square$$

命题 1.3.2　设 $G = \mathrm{Spec}(A)$ 是有限平坦交换 R 群概形, G 的阶为 $n = [G : R]$. 又设 B 为任一 R 代数, 则对于任一 $\lambda \in G(B)$, 有 $\lambda^n = 1$.

证明　左 A^* 模 $A^* \otimes_R A \approx \mathrm{End}_R(A^*)$ 是 n 秩自由模. 对于 $\lambda \in G(B) \subset A^* \otimes_R A$, 以 $\lambda \otimes 1$ 右乘所得到的 $A^* \otimes_R A$ 的自同构可以看作 $\lambda I_n \in \mathrm{GL}_n(A^*)$ (I_n 为 n 阶单位矩阵). 由于 G 是交换群概形, 故 A^* 是交换代数, 因此可以计算行列式. 由上面的命题知 λI_n 可以写成换位子 $\tau\rho\tau^{-1}\rho^{-1}$, 所以它的行列式等于 1. 另一方面, $\det(\lambda I_n) = \lambda^n$, 所以 $\lambda^n = 1$. 这对于 $\lambda \in G(B) \subset \mathrm{Hom}_R(A, R)_R \otimes_R B$ 也同样成立. $\square$

1.3.6　任意概形上的 Hopf 数

我们可以把仿射概形的基由 R (即 $\mathrm{Spec}\, R$) 推广为任意概形.

固定一个基概形 S. 则 S 上的仿射概形是 $\mathrm{Spec}\, \mathscr{A}$, 其中 $\mathscr{A}$ 是一个拟凝聚 $\mathscr{O}_S$ 代数层 (参见 [143] 1.3 节). 像前面一样可以定义 Hopf $\mathscr{O}_S$ 代数, 这就是说要给出余乘法 $m : \mathscr{A} \to \mathscr{A} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{A}$, **余单位** (co-unit) (亦称为**增广态射** (augmentation morphism)) $e : \mathscr{A} \to \mathscr{O}_S$ 以及**余逆元** (co-inverse) (亦称为**对映态射** (antipodal morphism)) $i : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ (这里的 m, e 和 i 均是 $\mathscr{O}_S$ 代数同态), 使得下面的五个图交换:

(1)
$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{A} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{A} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{A} & \xleftarrow{\mathrm{id}\otimes m} & \mathscr{A} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{A} \\
\uparrow{\scriptstyle m\otimes \mathrm{id}} & & \uparrow{\scriptstyle m} \\
\mathscr{A} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{A} & \xleftarrow{m} & \mathscr{A}
\end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{O}_S \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{A} & \xleftarrow{e\otimes \mathrm{id}} & \mathscr{A} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{A} \\
\uparrow{\scriptstyle \approx} & & \uparrow{\scriptstyle m} \\
\mathscr{A} & \xleftarrow{=} & \mathscr{A}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\mathscr{A} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_S & \xleftarrow{\mathrm{id}\otimes e} & \mathscr{A} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{A} \\
\uparrow{\scriptstyle \approx} & & \uparrow{\scriptstyle m} \\
\mathscr{A} & \xleftarrow{=} & \mathscr{A}
\end{array}$$

(3)
$$\begin{array}{ccccc}
\mathscr{A} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{A} & & \xleftarrow{i\times \mathrm{id}} & & \mathscr{A} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{A} \\
\downarrow{\scriptstyle p} & & & & \uparrow{\scriptstyle m} \\
\mathscr{A} & \xleftarrow{u} & \mathscr{O}_S & \xleftarrow{e} & \mathscr{A}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\mathscr{A}\otimes_{\mathscr{O}_S}\mathscr{A} & & \xleftarrow{\quad \mathrm{id}\times i \quad} & & \mathscr{A}\otimes_{\mathscr{O}_S}\mathscr{A} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle p} & & & & \Big\uparrow{\scriptstyle m} \\
\mathscr{A} & \xleftarrow{\ u\ } & \mathscr{O}_S & \xleftarrow{\ e\ } & \mathscr{A}
\end{array}$$

其中 $u:\ \mathscr{O}_S \to \mathscr{A}$ 是 $\mathscr{A}$ 作为 $\mathscr{O}_S$ 代数的结构态射, p 是 $\mathscr{A}$ 代数的乘积.

像以前一样, 显然 $G = \operatorname{Spec}\mathscr{A}$ 是 S 群概形.

1.4　例

1.4.1　群概形 $M_{\mathbb{Z}}$

设 M 为 (抽象) 有限交换群. 以 $\mathbb{Z}^M$ 记所有从 M 到 $\mathbb{Z}$ 的函数组成的环. 对于任一 $x \in M$, 定义 $\mathbb{Z}^M$ 中的元素

$$e_x(y) = \begin{cases} 0, & 若\ y \neq x, \\ 1, & 若\ y = x \end{cases} \quad (y \in M),$$

则 $\{e_x \mid x \in M\}$ 构成 $\mathbb{Z}^M$ 的基. 易见 $e_x^2 = e_x$, $e_x e_y = 0\ (y \neq x)$, $\sum e_x = 1$. 定义同态

$m:\ \mathbb{Z}^M \to \mathbb{Z}^M \otimes \mathbb{Z}^M$ 为 $m(e_z) = \sum_{z=xy} e_x \otimes e_y\ \ (z \in M)$,

$e:\ \mathbb{Z}^M \to \mathbb{Z}^M$ 为 $e(e_x) = 1$ (若 x 是 M 的单位元), $e(e_x) = 0$ (若 x 不是 M 的单位元),

$i:\ \mathbb{Z}^M \to \mathbb{Z}^M$ 为 $i(e_x) = e_{(x^{-1})}$,

则 $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}^M$ 构成仿射群概形. 我们用 $M_{\mathbb{Z}}$ 记此群概形. 对于任意概形 S, 我们以 M_S 记 $M_{\mathbb{Z}} \times_{\mathbb{Z}} S$ (换基). 称 M_S 为 M 所决定的**常值群概形** (constant group scheme).

事实上, 不假设 M 是有限群也可以定义常值 S 群概形. 此时可以取 M_S 为概形直和 $\coprod_{s\in S} M_s$, 其中的 M_s 与 M 等同. 详情见 [11] (1.4.3).

设 n 为大于 1 的整数. 依照以上所述立得 S 群概形 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_S$.

1.4.2　群概形 $D[M]$

设 M 为 (抽象) 交换群 (以乘法记群运算). M 在整数环上的群代数记为 $\mathbb{Z}[M]$. 以 $D[M]$ 记 $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[M]$, 则对于任一概形 T, 有

$$\begin{aligned} D(M)(T) &= \operatorname{Hom}_{\mathfrak{Sch}}(T, D(M)) = \operatorname{Hom}_{\mathrm{Alg}}(\mathbb{Z}[M], \Gamma(T, \mathscr{O}_T)) \\ &= \operatorname{Hom}_{\mathfrak{Gr}}(M, \Gamma(T, \mathscr{O}_T)^*), \end{aligned}$$

其中 $\Gamma(T,\mathscr{O}_T)^*$ 是 $\Gamma(T,\mathscr{O}_T)$ 的可逆元素乘法群, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Sch}}$ 是指概形态射集合, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}}$ 指代数同态集合, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Gr}}$ 指群同态集合. 容易验证在下面的同态下 $D[M]$ 构成 $\mathbb{Z}$ 上的群概形:

$$x \stackrel{m}{\longmapsto} x\otimes x,\quad x \stackrel{e}{\longmapsto} 1,\quad x \stackrel{i}{\longmapsto} x^{-1}\qquad (\forall\, x\in M).$$

又设 S 为任意概形. 作 $D[M]$ 与 S 的纤维积 (亦称 "换基")

$$\begin{array}{ccc} D[M]_S & \longrightarrow & D[M] \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \longleftarrow & \operatorname{Spec}\mathbb{Z} \end{array}$$

得到 S 上的群概形. 此时 $D[M]_S=\operatorname{Spec}\mathscr{O}_S[M]$, 其中 $\mathscr{O}_S[M]=\mathscr{O}_S\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[M]$ (参见 [143] 1.3 节). $D[M]$ 在 S 上是平坦的. $D[M]_S\to S$ 是光滑 (lisse) 态射的充分必要条件是 $\forall\, s\in S$, 不存在 $x\in M$ 使得 $x^p=1$ (p 为 S 在 s 处的剩余域 $\kappa(s)$ 的特征). $D[M]_S\to S$ 是有限 (finite) 态射当且仅当 M 是有限群 (参见 $[147]_{\mathrm{II}}$ VIII, Prop 2.1).

$D(M)$ 的第一个例子是 $D(\mathbb{Z})$. 因为群 $\mathbb{Z}$ 的运算要改写为乘法, 所以 $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$ 是 $\mathbb{Z}[T,T^{-1}]$, 其中 T 是变元. 我们以 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ 记 $D(M)$. 于是 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}=\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[T,T^{-1}]$. 对于任意概形 T, 有

$$\mathbb{G}_{\mathrm{m}}(T)=\mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}}(\mathbb{Z}[T,T^{-1}],\quad \Gamma(T,\mathscr{O}_T))=\Gamma(T,\mathscr{O}_T)^*.$$

以 μ_n 记 $D(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ (将 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 的运算写为乘法), 称之为 n 次单位根群. 我们有

$$\mu_n(T)=\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Gr}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\Gamma(T,\mathscr{O}_T)^*)=\{f\in\Gamma(T,\mathscr{O}_T)\mid f^n=1\}.$$

将 $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ 写成 $\mathbb{Z}[x]/(x^n-1)$, 则有 $\mu_{nS}=\operatorname{Spec}\mathscr{O}_S[x]/(x^n-1)$.

当 M 是有限群时, 利用 $\mathbb{Z}[M]=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^M,\mathbb{Z})$ 得到对偶

$$M_{\mathbb{Z}}(S)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\mathfrak{GrSch}/S}(D(M)_S,(G_{\mathrm{m}})_S),$$

其中 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{GrSch}/S}$ 表示 S 群概形态射集合 (参见 $[147]_{\mathrm{II}}$, VIII, Th. 1,2, Grothendieck 给出的证明没有假定 M 是有限的!).

设 $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}=\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[t]$. 对于任一概形 S, 有 S 群概形 $(\mathbb{G}_{\mathrm{a}})_S=\mathbb{G}_{\mathrm{a}}\times_{\mathbb{Z}}S=\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_S[t])$ (参见 [143] 1.3 节). 此时群结构由以下公式决定:

$$m(t)=t\otimes 1+1\otimes t,\qquad e(t)=0.$$

我们亦可以考虑如下定义的群函子:

$$\mathbb{G}_a : (\mathfrak{Sch})^{\circ} \longrightarrow \mathfrak{Gr}$$
$$T \longmapsto \Gamma(T, \mathscr{O}_T),$$

其中右边取环的加法群结构. 由于

$$\mathbb{G}_a(T) = \mathrm{Hom}(T, \mathbb{G}_a) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}}(\mathbb{Z}[t], \Gamma(T, \mathscr{O}_T)) \cong \Gamma(T, \mathscr{O}_T),$$

故知 $\mathbb{G}_a$ 为可表函子, 并且可以取 $\mathbb{G}_a = \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[t]$. 这样又得到群概形 $\mathbb{G}_a$.

设概形 S 的特征为 $p > 0$ (即 $\mathscr{O}_S$ 是 $\mathbb{F}_p$ 代数). 任意取定一个整数 $n > 0$. 对于任一 S 概形 T, 令

$$(\alpha_{p^n})_S(T) = \{x \in \Gamma(T, \mathscr{O}_T) \mid x^{p^n} = 0\}.$$

易见 $(\alpha_{p^n})_S = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_S[t]/t^{p^n})$ 是 S 群概形, 群结构由以下同态决定

$$m(t) = t \otimes 1 + 1 \otimes t, \qquad e(t) = 0.$$

1.4.3　可对角化群

定义 1.4.1　*设 S 是概形, G 是 S 群概形. 如果存在交换 (抽象) 群 M, 使得 G 与 $D(M)_S$ 同构, 则称 G 为***可对角化群** *(diagonalizable group).*

若对于 fpqc 拓扑 G 是局部可对角化的, 则称 G 为**乘性群** (multiplicative group). 这里的所谓 "局部可对角化" 的含义是: 对于任意的 $s \in S$, 存在 s 的开邻域 U 和拟紧忠实平坦态射 $S' \to U$, 使得关于 $S' \to U \to S$ 换基所得到的 $G \times_S S'$ 为可对角化 S' 群.

如果 $G \xrightarrow{\pi} S$ 是乘性 S 群, 则 π 是忠实平坦仿射态射 (参见 [145]$_2$ Prop(2.7.1)), 并且对于任意的 $s \in S$, 存在剩余域 $\kappa(s)$ 的扩域 k, 使得 $G \times_S \mathrm{Spec}(k)$ 是可对角化的 k 群. 于是, 对于 $G \to S$ 是乘性 S 群, G 是有限 S 群概形的充分必要条件是: 对于任意的 $s \in S$, 存在域扩张 $k \supset \kappa(s)$ 和有限交换群 M 以及 k 上的群同构 $G \times_S \mathrm{Spec}(k) \xrightarrow{\sim} D(M)_k$.

取定域 k, 设 $G = \mathrm{Spec}\,A$, A 是有限生成 k 代数. 如果 G 是可对角化的 k 群, 则不难看出 G 同构于有限个 $\mathbb{G}_m$ 和 μ_n 的直积. 事实上, 我们可以设 $A = k[M]$. 取 A (作为 k 代数) 的有限生成元集, 将此有限集的每个元素写成 M 的元素的线性组合, 即得到有限集 $U \subset M$, 使得 U 生成代数 $k[M]$. 设 M' 是由 U 生成的 M 的子群, 则显然有 $k[M'] = k[M]$, 所以 $M' = M$. 这就是说 M 是有限生成的交换群. 由于 $k[M_1 \oplus M_2] = k[M_1] \otimes k[M_2]$, 所以只要考虑 $M = \mathbb{Z}$ 和 $M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 的情形. 若 $M = \mathbb{Z}$, 我们可以取 $\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ 为 $k[\mathbb{Z}]$ 的基, 并且可以要求 $e_m \cdot e_n = e_{m+n}$. 令 $x = e_1$, 则得到 $k[\mathbb{Z}] = k[x, x^{-1}]$ 和 $\mathbb{G}_m = \mathrm{Spec}\,k[x, x^{-1}]$. 若 $M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, 则取基为 $1 = e_0, e_1, \cdots, e_{n-1} = e_1^{n-1}$ $(e_1^n = 1)$. 于是得到 $\mu_n = \mathrm{Spec}\,k[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}]$.

1.4.4　群概形 GL_n

设 R 是环, n 为正整数. 令 $A = R[x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{nn}, t]/(t\det(x_{ij}) - 1)$. 在 A 中引入 Hopf 代数运算:

$$\begin{aligned} m(x_{ij}) &= \sum_{k=1}^{n} x_{ik} \otimes x_{kj}, \\ e(x_{ij}) &= \delta_{ij}, \\ i(x_{ij}) &= (-1)^{i+j} t \det(x_{rs})_{r\neq j, s\neq i}. \end{aligned}$$

由 A 得到的 R 群概形 $\mathrm{Spec}\, A$, 记为 $(\mathrm{GL}_n)_R$.

设 B 为 (交换) R 代数. 以 $\mathrm{GL}_n(B)$ 记 B 上的 $n \times n$ 可逆矩阵乘法群. 则有双射:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{R\text{代数}}(A, B) &\longrightarrow \mathrm{GL}_n(B) \\ f &\longmapsto f(x_{ij}). \end{aligned}$$

所以 R 群概形 $(\mathrm{GL}_n)_R$ 的 B 点集合就是 $\mathrm{GL}_n(B)$.

1.4.5　幂幺群概形

设 k 是域. 在 $A = k[x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{nn}]$ 中定义余乘法

$$m(x_{ij}) = x_{ij} \otimes 1 + 1 \otimes x_{ij} + \sum_{i<k<j} x_{ik} \otimes x_{kj}.$$

以 U_n 记由此余乘法定义的 k 群概形 $\mathrm{Spec}\, A$. 则 $\mathrm{U}_n(k)$ 可以看作 k 上 $n \times n$ 上三角幂幺矩阵, 即对角线的元素皆为 1, 对角线下的元素皆为 0 的矩阵.

命题 1.4.1　设 $G = \mathrm{Spec}\, A$ 为 k 仿射群概形, 并且 A 为有限生成 k 代数. 如果 G 同构于 U_n 的某个闭子群, 则 Hopf 代数 (A, m) 内存在子空间 $C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset \cdots$, 使得 $C_0 = k$, $\bigcup C_l = A$ 以及 $m(C_l) \subseteq \sum_{r=0}^{l} C_r \otimes C_{l-r}$.

证明　设 G 所同构的 U_n 的闭子群来自 Hopf 代数 $A = B/I$. 如果 Hopf 代数 B 内有满足命题要求的子空间 C_r, 则 C_r 在 A 中的像亦满足同样的条件. 因此只需对于 U_n 证明本命题. 此时我们设 x_{ij} 的权为 $j - i$, 则单项式 $\prod x_{ij}^{n_{ij}}$ 的权是 $\sum n_{ij}(j - i)$. 令 C_l 为权不超过 l 的单项式所生成的子空间, 则 $C_0 = k$, $\bigcup C_l = A$, $C_i C_j \subseteq C_{i+j}$. 我们现在来证明

$$m(C_l) \subseteq \sum_{r=0}^{l} C_r \otimes C_{l-r}.$$

对于单项式中所含的变元个数作归纳法. 若 $x_{ij} \in C_l$, 则显然 $m(x_{ij}) \in \sum_{r=0}^{l} C_r \otimes C_{l-r}$. 设对于单项式 $P \in C_r$, $Q \in C_s$ 我们所要证明的结论已经成立, 则 $m(PQ) = m(P)m(Q)$ 属于

$$\Big(\sum_{i=0}^{r} C_i \otimes C_{r-i}\Big)\Big(\sum_{j=0}^{s} C_j \otimes C_{s-j}\Big) \subseteq \sum_{i,j} C_i C_j \otimes C_{r-i} C_{s-j}$$
$$\subseteq \sum_{i,j} C_{i+j} \otimes C_{r+s-i-j}. \qquad \square$$

设 k 是代数封闭域. 我们称 k 群概形 G 是**幂幺群** (unipotent group), 如果 G 有合成列, 其因子群同构于 $(\mathbb{G}_a)_k$. 即 G 有子群 G_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$, 满足条件: $G_0 = G$, $G_n = \{1\}$, G_{i+1} 是 G_i 的正规子群, 并且 $G_i/G_{i+1} \cong (\mathbb{G}_a)_k$ (参见 [147]$_2$ XVII, §1). 我们称 S 群概形 G 为**幂幺群**, 如果其几何纤维是幂幺群, 即, 设 Ω 代数封闭域, 则在 $\operatorname{Spec}\Omega \to G$ 下的拉回 G_Ω 为幂幺群.

设 k 为域, G 为交换仿射有限型 k 群概形, 则 G 包含一个极大乘性子群 M, 并存在交换仿射幂幺 k 群概形和正合序列

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow G \longrightarrow U \longrightarrow 0$$

(参见 [147] XVII, 7.2 节).

1.5　增广理想与微分模

1.5.1　增广理想

给定一个环 R. 以 S 记 $\operatorname{Spec} R$.

设 $G = \operatorname{Spec} A$ 是仿射 R 群概形. 则 A 为 Hopf R 代数. 设 $e: A \to R$ 为增广映射. 以 I 记 e 的核 (即增广理想). 由于图

$$A \underset{\rho}{\overset{e}{\rightleftarrows}} R$$

中的同态满足 $e \circ \rho = \mathrm{id}_R$ (其中 ρ 为 A 作为 R 代数的结构同态), 所以正合序列

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A \xrightarrow{e} R \longrightarrow 0$$

分裂. 于是有直和 $A = R \cdot 1 \oplus I$. 因此

$$A \otimes A = R \oplus (I \otimes 1) \oplus (1 \otimes I) \oplus (I \otimes I).$$

通过直接计算可知, 对于 $f \in I$, 有

$$m(f) - f \otimes 1 - 1 \otimes f \in \mathrm{Ker}(e \otimes \mathrm{id}) \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{id} \otimes e) = I \otimes A \cap A \otimes I = I \otimes I.$$

由此可见 I 决定 G 的闭子群概形 $\mathrm{Spec}(A/I)$. 另一方面, $e: A \to R$ 对应于单位态射 $\varepsilon: S \to G$, 而 $\mathrm{Spec}(A/I)$ 是 ε 的像, 所以 $\mathrm{Spec}(A/I)$ 是 G 的单位.

设 n 是整数. 我们利用 $G = \mathrm{Spec}\, A$ 的群的乘法来定义 $[n]: A \to A$ 如下: 对于 $f \in A$,

$$([n]f)(x) = f(x^n), \qquad x \in G(A).$$

1.5.2 环的特征为素数的情形

引理 1.5.1 设 $G = \mathrm{Spec}\, A$ 为有限自由 R 群概形. 又设有素数 p 使得 $pR = 0$. 则增广理想 I 满足条件 $[p]I \subset I^p$.

证明 设 $U = (u_{ij})$ 为 $n \times n$ 矩阵, 其中 u_{ij} 为独立变量. 取 $B = R[u_{ij}, 1/\det U]$. 则 $\mathrm{Spec}\, B$ 即是 $(\mathrm{GL}_n)_R$.

由于 $G = \mathrm{Spec}\, A$ 为有限自由 R 群概形, 这就是说 A 是有限秩的自由 R 模, 设 R 模 A 的秩是 n, 取 A 的 R 基 $\{f_1, \cdots, f_n\}$, 以 m 记 Hopf 代数的余乘法. 设

$$m(f_j) = \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes a_{ij}, \qquad a_{ij} \in A.$$

定义 R 代数同态

$$\varphi^\sharp: B \longrightarrow A$$

$$u_{ij} \longmapsto a_{ij}, \qquad (1 \leqslant i, j \leqslant n),$$

则 $\varphi^\sharp$ 是满同态. 于是 $\varphi^\sharp$ 决定了概形的浸入 $\varphi: G \to (\mathrm{GL}_n)_R$.

以 J 记 $(\mathrm{GL}_n)_R$ 的增广理想, 则 J 为 B 内由 v_{ij} 生成的理想, 其中 v_{ij} 为矩阵 $U - I_n$ 的分量, 即 $v_{ij} = u_{ij} - \delta_{ij}$ (δ_{ij} 为 Kronecker 符号).

由 $U^p = ([p](u_{ij}))$ 以及 $pR = 0$ 得到

$$([p](v_{ij})) = ([p](u_{ij})) - (\delta_{ij}) = U^p - I_n = (U - I_n)^p = (v_{ij})^p.$$

所以 $[p]J \subset J^p$. 于是我们有交换正合图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & J & \longrightarrow & B & \longrightarrow & R & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi^\sharp} & & \downarrow{\scriptstyle \|} & & \\ 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & A & \longrightarrow & R & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

故 $\varphi^\sharp(J) = I$. 由此立得 $[p]I \subset I^p$. □

1.5.3　微分模

设 A 为 Hopf R 代数. 对于 A 模 M, 以 $\mathrm{Der}_R(A,M)$ 记由所有 R 导子 (R-derivation) $D: A \to M$ 所组成的 A 模, 以 $\Omega^1_{A/R}$ 记由 A 的 R 微分 (R-differential) 所组成的 A 模. 则有泛 R 导子 $\mathrm{d}_{A/R}: A \to \Omega^1_{A/R}$, 并且有模同构:

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega^1_{A/R}, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_R(A,M)$$
$$f \longmapsto f \circ \mathrm{d}_{A/R}.$$

此时由于 A 是 Hopf R 代数, 我们可以用增广理想 I 来计算 R 微分 $\Omega^1_{A/R}$.

命题 1.5.2　设 A 为 Hopf R 代数, m 为 A 的余乘法, I 为 A 的增广理想. 令

$$\pi: A = R\cdot 1 + I \longrightarrow I/I^2$$
$$r1 + a \longmapsto a + I^2,$$

$\psi: M \otimes A \to M$ 为 M 作为 A 模的结构同态. 则

(1) 有同构

$$\mathrm{Hom}_{R模}(I/I^2, M) \longrightarrow \mathrm{Der}_R(A,M)$$
$$\lambda \longmapsto \psi \circ ((\lambda \circ \pi) \otimes \mathrm{id}) \circ m.$$

(2) R 微分模 $\Omega^1_{A/R} \cong (I/I^2) \otimes_R A$, 泛 R 导子 $\mathrm{d}_{A/R}: A \to \Omega^1_{A/R}$ 如下: 对于 $a \in A$, 如果 $m(a) = \sum b_j \otimes c_j$, 则 $\mathrm{d}_{A/R}(a) = \sum \pi(b_j) \otimes c_j$.

(3) 如果 R 是域, 则 $\Omega^1_{A/R}$ 是自由 A 模.

证明　我们先作一些背景计算.

第一步. 设 B 为 R 代数, N 为 B 模, $C = B \oplus N$. 定义 C 中的乘法为

$$(b,n)(b',n') = (bb', bn' + b'n),$$

则 C 构成 B 代数. 设 A 为 R 代数, 则有单同态

$$\mathrm{Hom}_R(A,C) \rightarrowtail \mathrm{Hom}_R(A,B) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,N)$$
$$\Phi \longmapsto (\varphi, D),$$

其中 φ 为 Φ 与 C 在 B 上的投射的复合, $D \in \mathrm{Der}_R(A, N_\varphi)$ (N_φ 表示 N 在 $\varphi: A \to B$ 下构成的 A 模).

第二步. 现在进一步设 A 是 Hopf R 代数. 通过计算可知: 由 A 所决定的 $\mathrm{Hom}_R(A,C)$ 的群运算为

$$(\varphi, D)(\varphi', D') = (\varphi\varphi', D_{\varphi'} + D'_{\varphi}),$$

其中 $\varphi\varphi'$ 的含义为：若 $a \in A$, $m(a) = \sum b_j \otimes c_j$, 则 $(\varphi\varphi')(a) = \sum \varphi(b_j)\varphi'(c_j)$, D'_φ 是下述三个映射的复合：

$$A \xrightarrow{m} A \times A \xrightarrow{D'\otimes\varphi} N \otimes B \xrightarrow{\rho} N$$

(这里的 ρ : $N \otimes B \to N$ 是 B 模 N 的结构同态), $D_{\varphi'}$ 的定义类似. 令

$$j: C = B \oplus N \longrightarrow B$$
$$(b, n) \longmapsto b,$$

则 j 诱导出群同态

$$j_*: \mathrm{Hom}_R(A, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A, B)$$
$$(\varphi, D) \longmapsto \varphi.$$

以 H 记 $\mathrm{Ker}\, j_*$. 由于图

$$C \underset{\iota}{\overset{j}{\rightleftarrows}} B$$

中的同态满足 $j \circ \iota = \mathrm{id}_B$ (其中 ι 为 $B \to C = B \oplus N$: $b \to (b, 0)$), 所以有半直积：

$$\mathrm{Hom}_R(A, C) = H \rtimes \mathrm{Hom}_R(A, B).$$

我们把 $\mathrm{Hom}(A, B)$ 的元素 φ 看作 $\mathrm{Hom}(A, C)$ 的元素 $(\varphi, 0)$. 注意到群 $\mathrm{Hom}(A, B)$ 的单位元为 $e_B = f \circ e$: $A \xrightarrow{e} R \xrightarrow{f} B$ (e 是增广映射, f 是 R 代数 B 的结构同态), 即知 $H = \{(e_B, D) \mid D \in \mathrm{Der}_R(A, N_{e_B})\}$. 容易验证

$$\mathrm{Der}_R(A, N_{e_B}) \longrightarrow H$$
$$D \longmapsto (e_B, D)$$

是群同构. 另一方面, 对于 $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(A, B)$, 由 $(\varphi, 0)(e_B, D) = (\varphi, D_\varphi)$ 知陪集 $H(\varphi, 0) = \{(\varphi, D_\varphi) \mid D_\varphi \in \mathrm{Der}_R(A, N_\varphi\}$. 于是有双射

$$\mathrm{Der}_R(A, N_{e_B}) \longrightarrow \mathrm{Der}_R(A, N_\varphi)$$
$$D \longmapsto D_\varphi\,.$$

第三步. 设 β : $A \to R$ 是 R 代数同态, $J = \mathrm{Ker}\,\beta$, N_β 为 N 在 β 下构成的 A 模, 我们断言：同态

$$\pi: A = R \cdot 1 + J \longrightarrow J/J^2$$
$$r1 \oplus a \longmapsto a + I^2$$

诱导出同构

$$\mathrm{Der}_R(A, N_\beta) \cong \mathrm{Hom}_R(J/J^2, N).$$

事实上, 对于 $D \in \mathrm{Der}_R(A, N_\beta)$, $a, b \in J = \mathrm{Ker}\,\beta$, 有 $D(ab) = \beta(a)D(b) + \beta(b)D(a) = 0$, 故 $D(J^2) = \{0\}$. 所以 D 定义了 R 线性映射 $J/J^2 \to N$. 反过来, 若 $\lambda \in \mathrm{Hom}_R(J/J^2, N)$, 则 $\lambda \circ \pi \in \mathrm{Der}_R(A, N_\beta)$. 这就证明了我们的断言.

现在回到我们的命题的证明. 在第三步中取 $B = A$, $\beta = e$ (A 的增广映射), $\varphi = \mathrm{id}$, $N = M$ (则 $N_\varphi = M_{\mathrm{id}} = M$), 就有同构

$$\mathrm{Hom}_R(I/I^2, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_R(A, M_e) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_R(A, M),$$

在此同构下 $\lambda \in \mathrm{Hom}_R(I/I^2, M)$ 映为 $\psi \circ ((\lambda \circ \pi) \otimes \mathrm{id}) = m$. 这就证明了结论 (1). 由于 $\lambda \mapsto \psi \circ (\lambda \otimes \mathrm{id})$ 给出双射

$$\mathrm{Hom}_R(I/I^2, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A((I/I^2) \otimes_R A, M),$$

并且 R 微分模 $\Omega^1_{A/R}$ 代表函子 $M \mapsto \mathrm{Der}_R(A, M)$, 所以结论 (2) 成立. 结论 (3) 是结论 (2) 的直接推论. □

我们继续使用命题 1.5.2 的证明中的记号. 设 $D \in \mathrm{Der}_R(A, A)$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(A, B)$, 则 $\varphi \circ D \in \mathrm{Der}_R(A, B_\varphi)$. 根据命题 1.5.2, 有

命题 1.5.3 设 A 为 Hopf R 代数, 对于 $D \in \mathrm{Der}_R(A, A)$, 以下五个条件等价:

(1) 对于任意的 R 代数 B 以及任意的 $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_R(A, B)$, 有 $(\varphi \cdot \psi) \circ D = (\varphi \circ D)_\psi$ (这里 $\varphi \cdot \psi$ 是由 Hopf 代数 A 所决定的群 $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ 中的乘法);

(2) 对于任意的 R 代数 B 以及任意的 $\psi \in \mathrm{Hom}_R(A, B)$, 有 $\psi \circ D = (e_B \circ D)_\psi$;

(3) 对于任意的 R 代数 B 以及任意的 $\psi \in \mathrm{Hom}_R(A, B)$, 有 $D = (e_A \circ D)_\psi$, 即 $D = \psi \circ ((e_A \circ D) \otimes \mathrm{id}) \circ m$;

(4) 对于任意的 R 代数 B 以及任意的 $\psi \in \mathrm{Hom}_R(A, B)$, 如果 $D = \psi \circ ((\lambda \circ \pi) \otimes \mathrm{id}) \circ m$, $\lambda \in \mathrm{Hom}(I/I^2, A)$, 则 $\lambda \circ \pi = e_A \circ D$;

(5) 对于任意的 R 代数 B 以及任意的 $\psi \in \mathrm{Hom}_R(A, B)$, 如果 $D = \psi \circ ((\lambda \circ \pi) \otimes \mathrm{id}) \circ m$, $\lambda :\ I/I^2 \to A$ 是 R 线性的, 则 $\lambda(I/I^2) \subset R \cdot 1 \subset A = R \cdot 1 + I$.

定义 1.5.1 满足命题 1.5.3 的 D 称为 A 的**右不变导子** (right invariant derivation).

1.5.4　域上的 Hopf 代数

设 R 为域 k, A 为有限 Hopf k 代数, I 为 A 的增广理想. 则 $A/I \cong k$, I/I^2 是有限维 k 向量空间. 取 I 的元素 $x_1, \cdots, x_r$ 使得它们在 I/I^2 内的像 $\{\overline{x}_1, \cdots, \overline{x}_r\}$ 为 k 向量空间 I/I^2 的基.

令 $\pi: A = R \cdot 1 + I \to I/I^2$ 如前. 对于 $i = 1, \cdots, r$, 定义映射

$$\lambda_i: I/I^2 \longrightarrow k \subset k \cdot 1 + I$$

$$\overline{x}_j \longmapsto \delta_{ij} \qquad (j = 1, \cdots, r).$$

考虑导子 $D_i = \psi \circ ((\lambda_i \circ \pi) \otimes \mathrm{id}) \circ m$. 按定义, 若 $a \in A$, $m(a) = \sum b_j \otimes c_j$, 则 $D_i(a) = \sum(\lambda_i \pi(b_j))c_j$. 于是

$$eD_i(a) = \sum(\lambda_i \pi(b_j))e(c_j) = \lambda_i \pi\left(\sum(b_j)e(c_j)\right) = \lambda_i \pi(a),$$

即有 $eD_i(x_j) = \delta_{ij}$, 或者说 $D_i(x_j) \equiv \delta_{ij} \pmod{I}$.

任何导子 D 都满足条件 $D(ab) = D(a)b + aD(b)$, 所以 $D(I^m) \subset I^{m-1}$. 这样, 在分次环

$$\mathrm{gr}_I(A) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} I^m / I^{m=1} = k[\overline{x}_1, \cdots, \overline{x}_r]$$

上 D_i 诱导出次数为 -1 的导子 $\overline{D}_i$. 这里请注意: 因为 $k = A/I$ 是域, 故 I 是 A 的极大理想. I 作为 $G = \mathrm{Spec}\, A$ 的点是 G 的单位 ε, $\mathrm{Spec}(\mathrm{gr}_I(A))$ 正是闭点 ε 的切锥. G 在 ε 正则的充要条件是此切锥等于 G 在 ε 的切空间.

1.5.5　与多项式环的关系

设 k 是域, A 为有限 Hopf k 代数, I 为 A 的增广理想, $\overline{x}_i$ 同上. 设 $X_1, \cdots, X_r$ 为独立变量. 以 $k[X]$ 记 $k[X_1, \cdots, X_r]$. 定义 k 代数同态

$$\varphi: k[X] \longrightarrow \mathrm{gr}_I(A)$$

$$X_i \longmapsto \overline{x}_i.$$

设 $P(X) = P(X_1, \cdots, X_r)$ 是 n 次齐次多项式, 则 $\varphi(P(X)) \in I^n/I^{n+1}$. 另一方面,

$$D_i(P(x)) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial P}{\partial X_j}(x) D_i(x_j),$$

其中 $x = (x_1, \cdots, x_r)$. 若 $\frac{\partial P}{\partial X_j} \neq 0$, 则 $\frac{\partial P}{\partial X_j}$ 是 $n-1$ 次齐次多项式, 所以 $\frac{\partial P}{\partial X_j}(x) \in I^{n-1}$. 又有 $D_i(x_j) \equiv \delta_{ij} \pmod{I}$, 故 $D_i P(x) \equiv \frac{\partial P}{\partial X_i}(x) \pmod{I^n}$. 于是有 $D_i \circ \varphi = \varphi \circ \frac{\partial}{\partial X_i}$. 这说明 $\frac{\partial}{\partial X_i}(\mathrm{Ker}\, \varphi) \subset \mathrm{Ker}\, \varphi$.

引理 1.5.4　如果 k 是特征 0 的域, 则 φ 是同构; 如果 k 是特征 $p>0$ 的域, 则 φ 是诱导出同构

$$k[X_1,\cdots,X_r]/(X_1^p,\cdots,X_r^p)\xrightarrow{\sim}\mathrm{gr}_I(A)/(\overline{x}_i^p,\cdots,\overline{x}_r^p).$$

证明　若 k 的特征为 0, 令 $J=\mathrm{Ker}\,\varphi$; 若 k 的特征为 $p>0$, 令 $J=\varphi^{-1}(\overline{x}_i^p,\cdots,\overline{x}_r^p)$. 则 J 为 $k[X]$ 的齐次理想, 且 $J\neq k[X]$, $\frac{\partial}{\partial X_i}J\subset J$.

设 $P=\sum c_{m_1\cdots m_r}X_1^{m_1}\cdots X_r^{m_r}\in J$, 则 $(\frac{\partial}{\partial X_1})^{m_1}\cdots(\frac{\partial}{\partial X_r})^{m_r}P\in J$. 由于 J 是齐次理想, 所以 J 含有此多项式的 0 次项

$$\Big((\frac{\partial}{\partial X_1})^{m_1}\cdots(\frac{\partial}{\partial X_r})^{m_r}P\Big)(0,\cdots,0)=m_1!\cdots m_r!c_{m_1\cdots m_r}.$$

现在设 k 的特征为 0, 则所有的 $m_1!\cdots m_r!$ 都不等于 0, 于是 $c_{m_1\cdots m_r}\in J$. 但是 $1\notin J$, 所以 $c_{m_1\cdots m_r}=0$. 这说明 $J=0$, 即 φ 是同构.

现在考虑 k 的特征 $p>0$ 的情形. 此时只有当 $m_j<p$ 时 $m_j!\neq 0$. 所以当 $m_j<p$ ($\forall\ j=1,\cdots,r$) 时同样可得 $c_{m_1\cdots m_r}=0$. 但是此时 J 包含 $(X_1^p,\cdots,X_r^p)$, 故 $J=(X_1^p,\cdots,X_r^p)$. □

1.5.6　域上的有限维 Hopf 代数

命题 1.5.5　设特征 0 的域 k 上的 Hopf 代数 A 是有限维局部 k 代数, 则 $A=k$.

证明　A 的增广理想 I 为 A 的极大理想. 由于 A 是有限维局部 k 代数, 故 A 是 Artin 环, 所以 I 是幂零理想. 于是 $\mathrm{gr}_I(A)$ 是有限维 k 代数. 但 $\varphi: k[X]\to\mathrm{gr}_I(A)$ 是同构, 所以 $k[X]$ 是有限维 k 代数, 而这只能当 $r=0$ 时才成立. 于是 $I=I^2$. 因为 I 幂零, 故存在正整数 n 使得 $I^n=0$. 于是 $I^{n-1}\subseteq I^{n-2}\cdot I=I^{n-2}\cdot I^2\subseteq I^n=0$. 归纳下去即得 $I=0$. □

1.6　Cartier 对偶

1.6.1　对偶群

设 R 为环, $G=\mathrm{Spec}\,A$ 为交换有限平坦 R 群概形. 令 $A^*=\mathrm{Hom}_{R模}(A,R)$, 则 Hopf R 代数 A 的余乘法决定 A^* 的乘法. 因为 G 是交换的, 所以 A^* 是交换环.

代数 A 的乘法决定 A^* 的余乘法, R 代数 A 的结构态射 $R\to A$ ($r\mapsto r\cdot 1_A$) 给出 A^* 的余单位, A 的余逆的对偶就是 A^* 的余逆. 这样 A^* 就成为一个 Hopf 代数. 于是可以定义交换 R 群概形 $G^*=\mathrm{Spec}(A^*)$.

定义 1.6.1 称上述的 G^* 为 G 的 **Cartier 对偶群** (Cartier dual group).

固定基概形 S. 设 $G = \operatorname{Spec}\mathscr{A}$ 是 S 群概形, 即 $\mathscr{A}$ 是 Hopf $\mathscr{O}_S$ 代数. 与群 G 的乘法 $\mu: G\times G \to G$, 单位元 $\varepsilon: S \to G$, 逆元 $\iota: G \to G$ 相对应的是 $\mathscr{A}$ 的 Hopf 代数运算是: 余乘法 $m: \mathscr{A} \to \mathscr{A}\otimes\mathscr{A}$, 余单位 $e: \mathscr{A} \to \mathscr{O}_S$, 余逆元 $i: \mathscr{A} \to \mathscr{A}$. 我们假设 $G = \operatorname{Spec} A$ 是交换群, 这就等价于 $\mathscr{A}$ 是 "余交换" 的, 即是说 $\sigma\circ m = m$, 其中 σ 是换位映射 $\sigma(a\otimes b) = b\otimes a$.

我们增加假设 $\mathscr{A}$ 作为 $\mathscr{O}_S$ 模是局部自由有限秩 $\mathscr{O}_S$ 模. 引入

$$\mathscr{A}^* = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_S\text{ 模}}(\mathscr{A}, \mathscr{O}_S).$$

则自然同态 $\mathscr{A} \to (\mathscr{A}^*)^*$ 和 $\mathscr{A}^*\otimes_{\mathscr{O}_S}\mathscr{A}^* \to (\mathscr{A}\otimes_{\mathscr{O}_S}\mathscr{A})^*$ 为同构.

利用 $\mathscr{A}_S$ 的 Hopf 代数结构引入

$$p_{\mathscr{A}^*}: \mathscr{A}^*\otimes_{\mathscr{O}_S}\mathscr{A}^* \longrightarrow (\mathscr{A}\otimes_{\mathscr{O}_S}\mathscr{A})^* \xrightarrow{m^*} \mathscr{A}^*,$$

则 $p_{\mathscr{A}^*}$ 和 $e^*: \mathscr{O}_S \to \mathscr{A}^*$ 在 $\mathscr{A}^*$ 上决定 (交换) $\mathscr{O}_S$ 代数结构, 并且利用

$$\begin{aligned} m_{\mathscr{A}^*} &: \mathscr{A}^* \xrightarrow{m^*} (\mathscr{A}\otimes_{\mathscr{O}_S}\mathscr{A})^* \longrightarrow \mathscr{A}^*\otimes_{\mathscr{O}_S}\mathscr{A}^*, \\ e_{\mathscr{A}^*} &: \mathscr{A}^* \xrightarrow{u^*} \mathscr{O}_S, \\ i_{\mathscr{A}^*} &: \mathscr{A}^* \xrightarrow{i^*} \mathscr{A}^*, \end{aligned}$$

便得知 $m_{\mathscr{A}^*}, e_{\mathscr{A}^*}, i_{\mathscr{A}^*}$ 决定 Hopf $\mathscr{O}_S$ 代数 $\mathscr{A}^*$. 留意当我们说 m, e 是 $\mathscr{O}_S$ 代数同态时, 意味着 m, e 把 $\mathscr{O}_S$ 代数的乘法单位元映为单位元, 亦即要求下图交换

$$\begin{array}{ccccc}
\mathscr{O}_S\otimes\mathscr{O}_S & \xleftarrow{e\otimes e} & \mathscr{A}\otimes\mathscr{A} & \xrightarrow{m\otimes m} & (\mathscr{A}\otimes\mathscr{A})\otimes(\mathscr{A}\otimes\mathscr{A}) \\
 & & & & \downarrow\uparrow\tau \\
 & & & & (\mathscr{A}\otimes\mathscr{A})\otimes(\mathscr{A}\otimes\mathscr{A}) \\
\downarrow & & \downarrow p & & \downarrow p\otimes p \\
\mathscr{O}_S & \xleftarrow{e} & \mathscr{A} & \xrightarrow{m} & \mathscr{A}\otimes\mathscr{A} \\
\| \uparrow & & \uparrow u & & \uparrow \\
\mathscr{O}_S & \xleftarrow{=} & \mathscr{O}_S & \longrightarrow & \mathscr{O}_S\otimes\mathscr{O}_S
\end{array}$$

其中 $\tau(a_1\otimes a_2\otimes a_3\otimes a_4) = a_1\otimes a_3\otimes a_2\otimes a_4$. p 是 $\mathscr{A}$ 作为代数的乘法, u 是 $\mathscr{A}$ 作为 $\mathscr{O}_S$ 代数的结构态射. 如果我们将此图中的 $\mathscr{A}$ 换成 $\mathscr{A}^*$ 并将箭头反向, 便知同样条件在 $\mathscr{A}^*$ 中成立.

我们知道：概形态射 $\operatorname{Spec}\mathscr{A} \to S$ (假设 S 是局部 Noether 概形) 是有限平坦的当且仅当 $\mathscr{A}$ 是局部自由有限秩 $\mathscr{O}_S$ 模. 所以我们从交换有限平坦仿射群概形 $\operatorname{Spec}\mathscr{A}$ 出发, 得到的 $\operatorname{Spec}\mathscr{A}^*$ 也是交换有限平坦仿射群概形. $\operatorname{Spec}\mathscr{A}^*$ 称为 $\operatorname{Spec}\mathscr{A}$ 的 **Cartier 对偶** (Cartier dual).

1.6.2　特征标群概形

设 G 为 S 群概形. 我们称 S 群概形同态 $\chi: G \to (\mathbb{G}_m)_S$ 为 G 的**特征标** (character). G 的特征标组成 $(\mathbb{G}_m)_S$ 的 G 点 $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{Sch}/S}(G, (\mathbb{G}_m)_S) = \mathbb{G}_m(G)$ 的子群 $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{Gr}/S}(G, (\mathbb{G}_m)_S)$.

如果 $S = \operatorname{Spec} R$, $G = \operatorname{Spec} A$, 按照同态的要求, G 的特征标对应于同态 $R \to A$. 于是 χ 决定了 A 的一个满足下述条件的可逆元 x: $m(x) = (x \otimes 1)(1 \otimes x) = x \otimes x$.

考虑函子

$$\mathfrak{Sch}/S \longrightarrow \mathfrak{Ab}$$

$$T \longmapsto \operatorname{Hom}_{\mathfrak{Gr}/T}(G_T, (\mathbb{G}_m)_T).$$

如果存在交换 S 群概形 G' 表示这个函子, 则称 G' 为 G 的**特征标群概形** (character group scheme). 若 G' 为 G 的特征标群概形, 则有同态

$$G'(T) = \operatorname{Hom}_{\mathfrak{Gr}/T}(G_T, (\mathbb{G}_m)_T) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathfrak{Gr}}(G(T), \mathbb{G}_m(T)),$$

由此得到配对 $G'(T) \times G(T) \to \mathbb{G}_m(T)$. 它定义了一个函子 $G' \times G \to \mathbb{G}_m$.

设有 R 代数 A 使得 $G = \operatorname{Spec} A$ 为交换有限平坦 R 群概形. 像以前一样, 令 $A^* = \operatorname{Hom}_{R模}(A, R)$, 则 $G^* = \operatorname{Spec} A^*$ 是交换有限平坦群概形, G^* 是 G 的 Cartier 对偶. 由于对偶 Hopf 代数的构作与换基可交换, 即对于任一 R 代数 B, 有

$$\operatorname{Hom}_{R模}(A, R) \otimes_R B = \operatorname{Hom}_{B模}(A \otimes_R B, B),$$

所以 $G(B)$ 等于 B Hopf 代数 $A_B^* := A^* \otimes_R B$ 内满足条件 $m(x) = x \otimes x$ 的可逆元所组成的群. 这就是说 G 表示函子

$$B \longmapsto \operatorname{Hom}_{\mathfrak{Gr}/B}(G_B^*, (\mathbb{G}_m)_B).$$

也就是说 G 是 G^* 的特征标 R 群概形. 同样可见 G^* 是 G 的特征标 R 群概形. 由 B 线性配对

$$A_B^* \times A_B \longrightarrow B$$

得到 Cartier 配对

$$G(B) \times G^*(B) \longrightarrow \mathbb{G}_m(B) = B^\times.$$

作为一个练习，我们把以上的讨论推广到概形 S 上.

设 G 为交换有限平坦 S 群概形. 把 G 写为 $\operatorname{Spec}\mathscr{O}_G$，其中 $\mathscr{O}_G$ 为局部自由 $\mathscr{O}_S$ 代数. 令

$$\mathscr{O}_G^* = \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_S\text{模}}(\mathscr{O}_G, \mathscr{O}_S),$$

则 $\mathscr{O}_G^*$ 是 $\mathscr{O}_S$ 模，且 $G^* = \operatorname{Spec}\mathscr{O}_S^*$ 是交换有限平坦 S 群概形. G^* 是 G 的 Cartier 对偶，并且 $(G^*)^* \cong G$. 另外，从 “层 –Hom” 的观点来看，由

$$\mathscr{H}om_S(A,B)(T) = \operatorname{Hom}_T(A\times_S T, B\times_S T)$$

可见

$$G^* = \mathscr{H}om_{\mathrm{Gr}/S}(G, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}),$$

G^* 是 G 的特征标群概形. 即是说：对任意的 $T\in\mathfrak{Sch}/S$，我们有

$$\operatorname{Hom}_{\mathfrak{Gr}/T}(G\times_S T, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}\times_S T) = \operatorname{Hom}_S(T, G^*).$$

此公式又称作 Cartier 特征标群公式.

像上面一样我们可以定义 Cartier 配对 $G\times G^*\to\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ 如下：取 S 的开覆盖 $\{U\}$ 使得局部自由层 $\mathscr{O}_G$ 在每一个开集 U 上的限制都同构于 $(\mathscr{O}_S|_U)^n$. 设 $e_1,\cdots,e_n$ 为 $\mathscr{O}_G|_U$ 的 $\mathscr{O}_S|_U$ 基，$e_1^*,\cdots,e_n^*$ 为 $\mathscr{O}_G^*|_U$ 中的对偶基. 我们把 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ 看作 $\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_S[X,X^{-1}])$. 这样，根据对偶的定义即知 Cartier 配对由以下的映射决定：

$$\begin{aligned}\mathscr{O}_S[X,X^{-1}]|_U &\longrightarrow \mathscr{O}_G|_U\otimes_{\mathscr{O}_S|_U}\mathscr{O}_G|_U,\\ X &\longmapsto \sum_{i=1}^n e_i\otimes e_i^*.\end{aligned}\tag{$*$}$$

注意：在同构 $\mathscr{O}_{G^*}\otimes_{\mathscr{O}_S}\mathscr{O}_G \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{O}_G,\mathscr{O}_G)$ 下 $\sum e_i\otimes e_i^*$ 映为 $\mathscr{O}_S$ 模的恒等映射 $\mathscr{O}_G\to\mathscr{O}_G$ (因为映射 $(*)$ 与 e_i 的选择无关).

1.6.3 例子

(1) 设 M 为 (抽象) 有限交换群，$\mathbb{Z}^M$ 为从 M 到 $\mathbb{Z}$ 的函数组成的环，$\mathbb{Z}[M]$ 为 M 的群代数. 常值群概形 $\underline{M}$ 是 $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}^M$. 对角群概形 $D(M)$ 是 $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[M]$. 由于有同构 $\mathbb{Z}[M]\cong\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}\text{模}}(\mathbb{Z}^M,\mathbb{Z})$，所以常值群概形 $\underline{M}$ 的 Cartier 对偶是对角群概形 $D(M)$. 利用换基即知：对于任一概形 S，$\underline{M}_S$ 的 Cartier 对偶是对角群概形 $D(M)_S$.

(2) 设 N 为正整数，N 次单位根群概形 μ_N 是 $D(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$. 由上面的例 (1) 知：对于任一概形 S，常值群概形 $(\underline{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}})_S$ 的 Cartier 对偶是 $(\mu_N)_S$.

(3) 在例 (2) 中假设 $\mathscr{O}_S$ 的特征为 $p>0$, $N=p$, 我们来计算 Cartier 配对. 任一函数 $f:\ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ 等同于一组整数 $(f(0),f(1),\cdots,f(p-1))$. 因此可以把 f 看作 $f(0)X^0+f(1)X^1+\cdots+f(p-1)X^{p-1}$ (X 是变元). 于是

$$(\underline{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}})_S=\operatorname{Spec}\mathscr{O}_S[X]/(X^p-X).$$

我们又把 $\mathbb{Z}$ 的加法运算改写为乘法, 即把群代数 $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$ 写为 $\mathbb{Z}[T,T^{-1}]$ (T 为变元). 这样就有

$$(\mu_p)_S=\operatorname{Spec}\mathscr{O}_S[Y]/(Y^p-1).$$

显然 $1,X,\cdots,X^{p-1}$ 是 $\operatorname{Spec}\mathscr{O}_S[X]/(X^p-X)$ 作为 $\mathscr{O}_S$ 模的基. 设这组基的对偶基为 $f_0,f_1,\cdots,f_{p-1}$ $(\in\operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_S\text{模}}(\mathscr{O}_S[X]/(X^p-X),\mathscr{O}_S))$.

在下面的讨论中我们取 $\mathscr{O}_S$ 为 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. 把 f_1 看作 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}$, 则 $f_i=\frac{1}{i!}f_1^i$ $(i=0,1,\cdots,p-1)$. 引入**截尾指数** (truncated exponential)

$$\exp^-(t)=1+t+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^{p-1}}{(p-1)!}.$$

则 $\exp^-(f_1)(X^j)=(X+1)^j$ $(0\leqslant j\leqslant p-1)$. 直接验算可知 $(\exp^-(f_1))^2(X^j)=(X+2)^j,\cdots$. 因为 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 的特征为 p, 所以 $(\exp^-(f_1))^p=\mathrm{id}$. 故 $Y=\exp^-(f_1)$. 综上所述, Cartier 配对

$$\underline{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}\times\mu_p\longrightarrow\operatorname{Spec}((\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})[T,T^{-1}]$$

由环同态

$$T\longmapsto\sum_{j=0}^{p-1}X^j\otimes f_j$$

所决定. 因为 $Y=\exp^-(f_1)$, 故 f_1 可以写为 $f_1=\log^-(Y)$ (**截尾对数** (truncated logarithm)). 于是

$$\sum_{j=0}^{p-1}X^j\otimes f_j=\sum_{j=0}^{p-1}X^j\otimes\frac{f_1^j}{j!}=\exp^-(X\otimes f_1).$$

所以 Cartier 配对是 $T\mapsto\exp^-(X\otimes\log^-(Y))$.

1.7 Frobenius 与 Verschiebung

给定一个范畴 $\mathfrak{C}$. 以 $\mathfrak{C}^0$ 记 $\mathfrak{C}$ 的反范畴, 以 $\mathfrak{C}^\wedge$ 记函子范畴 $\mathrm{Funct}(\mathfrak{C}^0,\mathfrak{Sets})$. 像通常一样, 用 Yoneda 引理, 我们可以通过态射 $X\mapsto\operatorname{Hom}(\bullet,X)=h_X$ 把 $\mathfrak{C}$ 看作 $\mathfrak{C}^\wedge$ 的全忠实子范畴.

设有 $\mathfrak{C}^\wedge$ 内的态射 $F \xrightarrow{p} E$ 和 $G \xrightarrow{q} E$. 我们称 $\mathfrak{C}^\wedge$ 内的交换图

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{p_2} & G \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ F & \xrightarrow{p} & E \end{array}$$

为 p 与 q 的**纤维积** (fibre product), 如果对于任一态射 $H \to E$, 都有双射

$$\mathrm{Hom}_E(H, P) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_E(H, F) \times \mathrm{Hom}_E(H, G)$$

$$h \longmapsto (p_1 h, p_2 h).$$

p 与 q 的纤维积记为 $F \times_E G$ 或 $F \times_{p,q} G$.

在本节中我们固定一个素数 p. 以 p 个元素的有限域 $\mathbb{F}_p$ 的素谱 $\mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_p$ 为基概形的概形范畴记为 $\mathfrak{Sch}/\mathbb{F}_p$. 在 $\mathfrak{Sch}/\mathbb{F}_p$ 中的概形 S 的结构态射 $S \to \mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_p$ 与环同态 $\mathbb{F}_p \to \Gamma(S, \mathscr{O}_S)$ 是等同的. 这样的 S 称为特征 p 的概形.

设 S 为特征 p 的概形 (即是说 $\mathscr{O}_S$ 是 $\mathbb{F}_p$ 代数). 定义概形态射 $f = f(S)$: $S \to S$ 如下：对于 $s \in S$, 令 $f(s) = s$; 对于 S 的开子集 U, 令同态 $\Gamma(U, \mathscr{O}_S) \leftarrow \Gamma(U, \mathscr{O}_S)$ 把 x 映为 x^p. 称 f 为**绝对 Frobenius** (absolute Frobenius).

设 q : $X \to S$ 为 $\mathfrak{Sch}/\mathbb{F}_p$ 的任一态射. 以 $X^{(p/S)}$ 记纤维积 $S \times_{f,q} X$, 以 $\pi(X/S)$ 记 p_2 : $X^{(p/S)} \to X$. 于是由交换图

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f(X)} & X \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ S & \xrightarrow{f(S)} & S \end{array}$$

得到 S 态射 $F(X/S)$: $X \to X^{(p/S)}$ 使得 $f(X) = \pi(X/S) \circ F(X/S)$ (见下图).

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & \\ & \overset{F(X/S)}{\searrow} & & \overset{f(X)}{\searrow} & \\ & & X^{(p/S)} & \xrightarrow{\pi(X/S)} & X \\ & {\scriptstyle q}\searrow & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ & & S & \xrightarrow{f(S)} & S \end{array}$$

称 $F(X/S)$ 为**相对 Frobenius** (relative Frobenius), 又称为**几何 Frobenius** (geometric Frobenius), 而 $\pi(X/S)$ 称为**算术 Frobenius** (arithmetic Frobenius).

我们先讨论以上构造过程的函子性质 (functoriality).

首先我们指出函子 $p_s: X \mapsto X^{(p/S)}$ 是通过用绝对 Frobenius $f: S \to S$ 换基得到的. 而换基与直和及反向极限可交换, 所以 $X^{(p/S)}$ 保持 X 的代数结构 (如 X 是群, 则 $X^{(p/S)}$ 也是群), 同时也保持在换基下不变的性质.

由态射 $X \xrightarrow{g} Y$ 可得交换图

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f(X)} & X \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ Y & \xrightarrow{f(Y)} & Y \end{array}$$

这就是说有函子态射 $f:\ \mathrm{id} \to \mathrm{id}$ (这里的 id 是指范畴上的恒等函子 (identity functor)).

关于映射 $X \mapsto F(X/S)$ 有交换图

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F(X/S)} & X^{(p/S)} \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g^{(p/S)}} \\ Y & \xrightarrow{F(Y/S)} & Y^{(p/S)} \end{array}$$

这就是说我们有函子态射 $F(\bullet/S):\ \mathrm{id} \to p_s$. 又有以下的交换图, 其中的三个方形皆为卡氏图 (cartesian square):

$$\begin{array}{ccccccc} X & & & & & & \\ & \searrow^{F(X/Y)} & & \searrow^{F(X/S)} & & & \\ & & X^{(p/Y)} & \longrightarrow & X^{(p/S)} & \xrightarrow{\pi(X/S)} & X \\ & {\scriptstyle g}\searrow & \downarrow{\scriptstyle g^{(p/Y)}} & & \downarrow{\scriptstyle g^{(p/S)}} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ & & Y & \xrightarrow{F(Y/S)} & Y^{(p/S)} & \xrightarrow{\pi(Y/S)} & Y \\ & & & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & S & \xrightarrow{f(S)} & S \end{array}$$

以下设 k 是特征 $p > 0$ 的域. 令 f_k 为 k 的 Frobenius 映射:

$$\begin{aligned} f_k:\ k &\longrightarrow k \\ a &\longmapsto a^p. \end{aligned}$$

设 A 是 k 代数. 定义

$$\begin{aligned} f_A:\ A &\longrightarrow A \\ x &\longmapsto x^p. \end{aligned}$$

用 k 的 Frobenius 映射 f_k 将 A 换基, 得到

$$A^{(p)} = k \otimes_k A.$$

在这里张量积 $k\otimes_k$ 是用 $f_k : k \to k$ 把 k 看作 k 代数, 即 $A^{(p)}$ 的元素满足 $a \otimes by = ab^p \otimes y$ $(a, b \in k,\ x \in A)$. 令 $X = \operatorname{Spec} A$, $X^{(p)} = \operatorname{Spec} A^{(p)}$.

设 B 是任一 k 代数. 利用 $f_k : k \to k$ 更改 B 的 k 代数结构如下：对于 $x \in B$, $a \in k$, 定义 $a \cdot x$ 为原来 B 中的 $a^p x$. 这样得到的 k 代数记为 $B_{(p)}$. 这样,

$$\begin{aligned} f(B) : B &\longrightarrow B_{(p)} \\ x &\longmapsto x^p \end{aligned}$$

就成为 k 线性映射. 于是有

$$\operatorname{Hom}_{k\text{代数}}(A^{(p)}, B) = \operatorname{Hom}_{k\text{代数}}(A, B_{(p)}),$$

即 $X^{(p)}(B) = X(B_{(p)})$. 另一方面, $f(B)$ 诱导出态射 $F_X(B) : X(B) \to X(B_{(p)})$, 即 $F_X(B) : X(B) \to X^{(p)}(B)$. 这样得到的态射 $F_X : X \to X^{(p)}$ 称为**相对 Frobenius 态射** (relative Frobenius morphism) (此映射把一点的坐标映为它的 p 次方).

现在设 G 是 k 群概形. 函子 $G \mapsto G^{(p)}$ 以及态射 $F_G : G \to G^{(p)}$ 均与乘积可交换. 所以 $G^{(p)}$ 也是群概形, 并且 F_G 是群同态.

下面我们给出一个例子.

命题 1.7.1　设 k 是特征 $p > 0$ 的域, $G = \operatorname{Spec}(k[x_1, \cdots, x_r])$ 是有限平坦 k 群概形. 又设群 G 的单位态射 $\varepsilon : \operatorname{Spec} k \to G$ 由代数同态 $e : k[x_1, \cdots, x_r] \to k$ 给出. 令 $I = \operatorname{Ker} e$. 如果 $I = (x_1, \cdots, x_r)$, 则 Frobenius 态射的核 $\operatorname{Ker} F_G$ 是 $\operatorname{Spec}(k[x_1, \cdots, x_r]/(x_1^p, \cdots, x_r^p))$ (它是 G 的有限平坦闭正规子群概形).

取定一个特征 $p > 0$ 的概形 S. 设 X 为 S 概形. 令

$$\mathscr{U}^p(X) = \bigcup \underbrace{U \times_S U \times_S \cdots \times_S U}_{p\text{次}},$$

其中的 U 取遍 X 的所有仿射开子概形. 现在我们在 X 中取这样的仿射开子概形 U: U 在 S 中的像为 S 的仿射开子概形 W. 设 $W = \operatorname{Spec} k$, $U = \operatorname{Spec} A$. 以 $\otimes_k^p A$ 记 A 的 p 次张量积. $\otimes_k^p A$ 中的对称张量子代数记为 $\Sigma^p A$. 用所有这样的 U 和 W 构造

$$\mathscr{V}^p(X) = \bigcup \operatorname{Spec}(\Sigma^p A).$$

以 $q(X)$ 记自然态射 $\mathscr{U}^p(X) \to \mathscr{V}^p(X)$. 设 $\mathfrak{S}$ 为对称化算子:

$$\mathfrak{S}:\ \otimes_k^p A \longrightarrow \otimes_k^p A$$

$$a_1 \otimes \cdots \otimes a_p \longmapsto \sum_\sigma a_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes a_{\sigma(p)},$$

其中 σ 取遍 p 个文字的对称群的所有元素. 令

$$X^{[p/S]} = \bigcup \operatorname{Spec}(\Sigma^p A/\mathfrak{S}(\otimes_k^p A))$$

(以上诸概形均以粘合的方法得以构造). 以 δ 记对角态射:

$$\delta : X \longrightarrow \mathscr{U}^p(X).$$

δ 在 U 上的限制由 k 代数同态 η 所决定, 其中

$$\eta:\ \otimes_k^p A \longrightarrow A$$

$$a_1 \otimes \cdots \otimes a_p \longmapsto a_1 a_2 \cdots a_p.$$

由于 $\eta(\mathfrak{S}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_p)) = p! a_1 a_2 \cdots a_p = 0$, 所以 $q(X) \circ \delta(X)$ 有如下图所示的分解:

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{U}^p(X) & \xleftarrow{\ \delta(X)\ } & X \\
{\scriptstyle q(X)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F'(X/S)} \\
\mathscr{V}^p(X) & \xleftarrow{\ i(x)\ } & X^{[p/S]}
\end{array}$$

仍然取 $W = \operatorname{Spec} k \subset S$, $U = \operatorname{Spec} A \subset X$ 如上. 以 π 记 k 的自同态 $x \mapsto x^p$. 则 $U^{(p/S)} = \operatorname{Spec}(k \otimes_\pi A)$ (其中的 k 的 k 代数结构由 π 给出). 考虑 k 代数同态交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
\otimes_k^p A & \xrightarrow{\ \eta\ } & A & & & & \\
{\scriptstyle \text{incl}}\uparrow & & \uparrow & \nwarrow & & \overset{g_1}{\nwarrow} & \\
\Sigma^p A & \xrightarrow{\ \text{proj}\ } & \Sigma^p A/\mathfrak{S}(\otimes_k^p A) & \xleftarrow{\ g_3\ } & k \otimes_\pi A & \xleftarrow{\ g_2\ } & A
\end{array}$$

其中 g_1 是 $a \mapsto a^p$, g_2 是 $a \mapsto 1 \otimes a$, g_3 是 $\lambda \otimes a \mapsto \lambda a \otimes a \cdots \otimes a \mod \mathfrak{S}(\otimes_k^p A)$. 由同态 g_3 通过黏合所得到的态射记为

$$\varphi(X):\ X^{[p/S]} \longrightarrow X^{(p/S)}.$$

则上图中部给出以下分解:

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ {\scriptstyle F'(X/S)}\downarrow & \searrow^{F(X/S)} & \\ X^{[p/S]} & \xrightarrow{\varphi(X)} & X^{(p/S)} \end{array}$$

设 M 是自由 k 模. 则同态

$$k\otimes_\pi M \longrightarrow \Sigma^p M/\mathfrak{S}(\otimes_k^p M)$$

$$\lambda\otimes m \longmapsto \lambda m\otimes\cdots\otimes m$$

为双射. 如果只假定 M 是 k 平坦的, 则此结果仍然成立, 其原因是: 平坦模是自由模的正向极限. 所以, 当 X 是平坦 S 概形时, $\varphi(X)$ 是同构.

现在设 M 是平坦 S 交换群概形. 利用群 G 的乘法可以定义态射:

$$\mu(G):\ \mathscr{U}^p(G)\xrightarrow{\text{incl}}\overbrace{G\times_S G\times_S\cdots\times_S G}^{p\text{个}}\longrightarrow G.$$

于是存在态射 $\gamma(G):\ \mathscr{V}^p(G)\to G$ 使得 $\mu(G)$ 分解为 $\mu(G)=\gamma(G)\circ q(G)$. 另一方面, 对于任一 S 概形 T, 映射

$$G(T)\xrightarrow{\delta(G)(T)}\mathscr{U}^p(G)(T)\xrightarrow{\mu(G)(T)}G(T)$$

把 $x\in G(T)$ 映为 $p\cdot x$ (注意: 这里把群运算写作加法). 即是说 $\mu(G)\circ\delta(G)=p\cdot \mathrm{id}_G$. 由于 G 是 S 平坦的, 所以 $\varphi(G)$ 是同构. 于是可以定义态射 $V(G/S)$: $G^{(p/S)}\to G$ 为

$$V(G/S)=\gamma(G)\circ i(G)\circ\varphi(G)^{-1}.$$

我们称 $V(G/S)$ 为**Verschiebung**. 由定义立得

$$V(G/S)\circ F(G/S)=p\cdot\mathrm{id}_G.$$

可以验证 $V(G/S)$ 和 $F(G/S)$ 都是群同态. 为此应当留意 $G\to V(G/S)$ 和 $G\to F(G/S)$ 都是函子态射.

为了一目了然, 我们作下图:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathscr{U}^p(G) & \xleftarrow{\delta(G)} & & & G & & \\
\downarrow{\scriptstyle q(G)} & & & & \downarrow{\scriptstyle F'(G/S)} & & \\
\mathscr{V}^p(G) & \xleftarrow{i(G)} & & & G^{[p/S]} & & \\
 & & & & & \searrow{\scriptstyle \varphi(G)} & \\
G & & \xleftarrow{V(G/S)} & & & G^{(p/S)} & \xrightarrow{\pi(G/S)} G
\end{array}$$

（图中另有箭头: $\mu(G):\mathscr{U}^p(G)\to G$, $\gamma(G):\mathscr{V}^p(G)\to G$, $p\cdot\mathrm{id}_G: G\to G$, $F(G/S): G\to G^{(p/S)}$, $f(G): G\to G$.）

考虑下图:

$$\begin{array}{ccc} G^{(p/S)} & \xrightarrow{\mathscr{V}(G/S)} & G \\ {\scriptstyle F(G/S)^{(p/S)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(G/S)} \\ (G^{(p/S)})^{(p/S)} & \xleftarrow[V(G^{(p/S)}/S)]{} & G^{(p/S)} \end{array}$$

因为 $F(G/S)^{(p/S)}$ 可以看作是由 $F(G/S)$ 通过 $S \xrightarrow{f(S)} S$ 得出的, 所以 $F(G/S)^{(p/S)} = F(G^{(p/S)}/S)$. 于是有

$$F(G/S) \circ V(G/S) = V(G^{(p/S)}/S) \circ F(G^{(p/S)}/S) = p \cdot \mathrm{id}_{G^{(p/S)}}.$$

1.8 群 函 子

1.8.1 群对象

设 $\mathfrak{C}$ 为范畴. 以 Obj $\mathfrak{C}$ 记 $\mathfrak{C}$ 的全部对象. 如果 X 是 $\mathfrak{C}$ 的对象, 则记为 $X \in \mathrm{Obj}\ \mathfrak{C}$.

设范畴 $\mathfrak{C}$ 内存在有限积, 这就是说, 对于任意的 $A_1, \cdots, A_n \in \mathrm{Obj}\ \mathfrak{C}$, 都存在相应的 $X \in \mathrm{Obj}\ \mathfrak{C}$ 以及态射 $\mathrm{pr}_i : X \to A_i$ $(i = 1, \cdots, n)$, 使得对于任意一组态射 $\{f_i : Y \to A_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$, 都存在唯一的态射 $f : Y \to X$ 满足条件: $\mathrm{pr}_i \circ f = f_i$ $(\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n)$. 我们常以 $A_1 \times \cdots \times A_n$ 记以上的 X. 以 S 记空积 (empty product). $\mathfrak{C}$ 的一个对象 S 称为**终对象** (terminal object), 如果对于任一 $T \in \mathrm{Obj}\ \mathfrak{C}$, 都存在唯一的态射 $0_T : T \to S$.

定义 1.8.1 设有 $G \in \mathrm{Obj}\ \mathfrak{C}$ 以及态射 $\mu : G \times G \to G$, $\varepsilon : S \to G$, $\iota : G \to G$. 我们说 $(G, \mu, \varepsilon, \iota)$ (简记为 (G, μ) 或 G) 是 $\mathfrak{C}$ 的**群对象** (group object), 如果下面的三个图交换:

(1) 结合律.

$$\begin{array}{ccccc} G \times G \times G & \xrightarrow{=} & G \times (G \times G) & \xrightarrow{\mathrm{id}_G \times \mu} & G \times_S G \\ \| \downarrow & & & & \\ (G \times G) \times G & & & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ {\scriptstyle \mu \times \mathrm{id}_G}\downarrow & & & & \\ G \times_S G & & \xrightarrow{\mu} & & G \end{array}$$

(2) 左单位律.

$$
\begin{array}{ccccc}
G\times G & \xrightarrow{(0_G,\mathrm{id})} & S\times G & \xrightarrow{\varepsilon\times\mathrm{id}} & G\times G \\
 & \searrow^{id} & & & \downarrow{\scriptstyle\mu} \\
 & & & & G
\end{array}
$$

(3) 左逆律.

$$
\begin{array}{ccc}
G & \xrightarrow{(\iota,\mathrm{id})} & G\times G \\
{\scriptstyle 0_G}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mu} \\
S & \xrightarrow{\varepsilon} & G
\end{array}
$$

若群对象 (G,μ) 又满足以下的交换图, 则称之为**交换群对象** (commutative group object):

$$
\begin{array}{ccc}
G\times G & \xrightarrow{(\mathrm{pr}_2,\mathrm{pr}_1)} & G\times G \\
 & {\scriptstyle\mu}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\mu} & \\
 & G &
\end{array}
$$

$\mathfrak{C}$ 的群对象又称为 $\mathfrak{C}$ 群 ($\mathfrak{C}$-group).

定义 1.8.2 设 (G,μ) 和 (G',μ') 是 $\mathfrak{C}$ 群. 称 $\mathfrak{C}$ 中的态射 $\varphi: G\to G'$ 为 **$\mathfrak{C}$ 群同态** (homomorphism), 如果下面的图交换:

$$
\begin{array}{ccc}
G\times G & \xrightarrow{\varphi\times\varphi} & G'\times G' \\
{\scriptstyle\mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mu'} \\
G & \xrightarrow{\varphi} & G'
\end{array}
$$

对于 $X,T\in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{C}$, 按代数几何的习惯, 我们常称 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(T,X)$ 的元素为 X 的 T 点, 并以 $X(T)$ 记集合 $h_X(T)=\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(T,X)$.

1.8.2 群函子

以 $\mathfrak{Gr}$ 记群范畴. 这就是说: 任一 $G\in\mathrm{Obj}\,\mathfrak{Gr}$ 为群; 对于 $G,G'\in\mathrm{Obj}\,\mathfrak{Gr}$, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Gr}}(G,G')$ 的元素是 G 到 G' 的群同态.

设范畴 $\mathfrak{C}$ 内存在有限乘积. 由 $\mathfrak{C}$ 到 $\mathfrak{Gr}$ 的反变函子 $\mathscr{G}:\ \mathfrak{C}\to\mathfrak{Gr}$ 称为 **$\mathfrak{C}$ 群函子** (group functor). 这就是说, 对于 $T\in\mathrm{Obj}\,\mathfrak{C}$, $\mathscr{G}(T)$ 是群 (即有群运算 $\mu_T:\mathscr{G}(T)\times\mathscr{G}(T)\to\mathscr{G}(T)$), 并且若 $u: T'\to T$ 是 $\mathfrak{C}$ 内的态射, 则

$\mathscr{G}(u) : \mathscr{G}(T) \to \mathscr{G}(T')$ 是群同态, 即下面的图交换:

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{G}(T) \times \mathscr{G}(T) & \xrightarrow{\mu_T} & \mathscr{G}(T) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathscr{G}(u)\times\mathscr{G}(u)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathscr{G}(u)} \\ \mathscr{G}(T') \times \mathscr{G}(T') & \xrightarrow{\mu_{T'}} & \mathscr{G}(T') \end{array}$$

所谓 $\mathfrak{C}$ 群函子同态是指函子态射 $\varphi : \mathscr{G} \to \mathscr{G}'$. 这就是说: 对于每一个 $T \in \operatorname{Obj}\mathfrak{C}$, 都给定一个群同态 $\varphi_T : \mathscr{G}(T) \to \mathscr{G}'(T)$, 使得对于任一 $\mathfrak{C}$ 态射 $u : T' \to T$, 下面的图都交换:

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{G}(T) & \xrightarrow{\varphi_T} & \mathscr{G}'(T) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathscr{G}(u)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathscr{G}(u)} \\ \mathscr{G}(T') & \xrightarrow{\varphi_{T'}} & \mathscr{G}'(T') \end{array}$$

φ_T 又常记为 φ_*.

1.8.3　可表群函子

像前面一样, 我们将 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(T, G)$ 记为 $h_G(T)$. 以 $\mathfrak{Sets}$ 记集合范畴.

命题 1.8.1　*设范畴 $\mathfrak{C}$ 内存在有限乘积.*

(1) 若 G 是 $\mathfrak{C}$ 的群对象, 则 $h_G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{Sets}$ 有分解:

$$\begin{array}{cccc} h_G : & \mathfrak{C} & \longrightarrow & \mathfrak{Sets} \\ & & \searrow \quad \swarrow & \\ & & \mathfrak{Gr} & \end{array}$$

即 h_G 是群函子.

(2) 若 $G \in \mathfrak{C}$ 使得有 (1) 中所示的分解, 则 G 是 $\mathfrak{C}$ 的群对象.

注　这就是说 "可表群函子" 与 "群对象" 一一对应.

证明　(1) 设 (G, μ) 是 $\mathfrak{C}$ 的群对象. 对于任一 $T \in \operatorname{Obj}\mathfrak{C}$ 以及 $g_1, g_2 \in G(T)$, 根据纤维积的定义, g_1, g_2 对映于唯一的 $g_0 \in (G \times G)(T)$. 令 $\mu_T(g_1, g_2) = \mu(g_0)$. 这就定义了 $\mu_T : G(T) \times G(T) \to G(T)$. 由群对象定义中的交换图即知 $G(T)$ 是群.

对于 $\mathfrak{C}$ 中的态射 $u : T \to T'$, 有

$$\begin{aligned} h_G(u) :\ G(T) &\longrightarrow G(T'), \\ g &\longmapsto g \circ u. \end{aligned}$$

由交换图

$$\begin{array}{ccccc} G(T)\times G(T) & \rightleftarrows & (G\times G)(T) & \xrightarrow{\mu_T} & G(T) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow h_G(u) \\ G(T')\times G(T') & \rightleftarrows & (G\times G)(T') & \xrightarrow{\mu_{T'}} & G(T') \end{array}$$

即知 $h_G(u)$ 是群同态.

(2) 设 h_G 为群函子. 则对应于 $T\in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{C}$ 有群运算 $\mu_T: G(T)\times G(T)\to G(T)$. 于是我们可以定义 G 的乘律

$$\mu=\mu_{G\times G}(\mathrm{pr}_1,\mathrm{pr}_2): G\times G\longrightarrow G.$$

以 S 记 $\mathfrak{C}$ 的空积, 以 ε 记群 $G(S)$ 的单位元. 对于任一 $T\in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{C}$, 群 $G(T)$ 的取逆运算定义了态射 $G(T)\to G(T)$ $(g\mapsto g^{-1})$, 即决定了一个函子态射 $h_G\to h_G$. 由于 h 是全忠实的, 所以此函子态射决定了 $\mathfrak{C}$ 内的态射 $\iota: G\to G$. 读者自行证明 $(G,\mu,\varepsilon,\iota)$ 是 $\mathfrak{C}$ 的群对象. □

1.8.4 可表群层

设 $G\xrightarrow{\pi}S$ 为群概形, $T\xrightarrow{t}S$ 为 S 概形. 则对于任意的 $g_1,g_2\in G(T)$, 有 $\pi\circ g_i=t$ $(i=1,2)$. 根据纤维积的定义, (g_1,g_2) 决定唯一的 $g_0: T\to G\times_S G$ 使得下图交换:

$$\begin{array}{ccccc} T & & & & \\ & \overset{g_0}{\searrow} & & \overset{g_2}{\searrow} & \\ & & G\times_S G & \longrightarrow & G \\ & {\scriptstyle g_1}\searrow & \downarrow & & \downarrow \pi \\ & & G & \xrightarrow{\pi} & S \end{array}$$

我们定义 $\mu_T(g_1,g_2)$ 为 $\mu\circ g_0$, 其中 μ 为 G 的乘律. 前面已经证明 $(G(T),\mu_t)$ 是群. 反之, 如果 S 概形 X 使得函子 $T\to \mathrm{Hom}_S(T,X)$ 把 S 概形范畴 $\mathfrak{Sch}/S$ 映到群范畴 $\mathfrak{Gr}$, 则 X 是 S 上的群概形. 另一方面, $\mathrm{Hom}_S(\bullet,X)$ 是 $\mathfrak{Sch}/S$ 上的一个 fpqc 层 (所以也是 fppf 层). 因此我们就不必区分一个 S 群概形、一个 S 概形上的可表群函子、一个 S 概形上的可表群层了! 这也说明了 S 群层是 S 群概形的推广. 为了便于使用同调代数, 我们希望所考虑的范畴是 Abel 范畴. 不幸的是, 除了基概形是域的情形外, 交换群概形范畴一般不是 Abel 范畴. 但是, 对于任意给定的 Grothendieck 拓扑, 交换层范畴是 Abel 范畴, 并且有足够的内射对象. 给定基概形 S, 在 S 上取 fppf 拓扑, 以 $\mathfrak{Ab}_S$ 记 S 上的交换层所组成的 Abel 范畴. 此

时交换 S 群概形范畴是 $\mathfrak{Ab}_S$ 的全子范畴 (full subcategory). 这就是的我们能够应用同调代数了. 例如, 我们可以利用导出函子定义两个交换 S 群概形 F,G 的 $\mathscr{E}xt^i(F,G)$.

1.8.5 核

在同调代数中经常要考虑态射的核 (kernel) 和余核 (cokernel). 我们先用群函子定义核.

设范畴 $\mathfrak{C}$ 内存在有限乘积和纤维积. 设 G 和 G' 为 $\mathfrak{C}$ 群函子, $\varphi: G \to G'$ 为群函子同态. 如果存在 $\mathfrak{C}$ 群函子 H 和群同态 $\alpha: H \to G$, 使得对于 $\mathfrak{C}$ 内的任一对象 T, 序列

$$0 \longrightarrow H(T) \xrightarrow{\alpha_*} G(T) \xrightarrow{\varphi_*} G'(T)$$

都正合, 则我们称 $\alpha: H \to G$ 为 φ 的**核** (kernel).

命题 1.8.2 (1) 群同态必有核.

(2) 核在同构意义下是唯一的.

(3) 如果 $\alpha: H \to G$ 是 $\varphi: G \to G'$ 的核, 则对于 $\mathfrak{C}$ 内任一群函子 H', 下面的序列必正合:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(H',H) \xrightarrow{\alpha_*} \mathrm{Hom}(H',G) \xrightarrow{\varphi_*} \mathrm{Hom}(H',G').$$

证明 取纤维积

$$\begin{array}{ccc} H = G \times_{G'} S & \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} & S \\ {\scriptstyle \alpha=\mathrm{pr}_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon'} \\ G & \xrightarrow{\varphi} & G' \end{array}$$

因为 $S(T)$ 只有一个元素 $\pi_T: T \to S$ (结构态射), 并且 $\varepsilon' \circ \pi_T = \varepsilon_T$ 是 $G'(T)$ 的单位元, 所以上图意味着集合 $H(T)$ 等同于核 $\mathrm{Ker}(G(T) \to G'(T))$. 其余证明从略. □

群同态的余核 (cokernel) 的概念将要在下一节予以介绍 (见 1.9.1). 在这里我们只是告诉读者一个不幸的事实: 函子 $T \mapsto \mathrm{Coker}(\varphi_T) = G'(T)/\varphi(G(T))$ 经常是不可表示的 (就如同交换群层同态余核预层不一定是层一样).

我们可以把有关余核的问题纳入所谓 "群作用" 的较大的框架内. 在群论中, 我们说一个群 G 作用在集合 X 上, 即是说有映射 $\varphi: G \times X \to X$, 满足条件: (1) $\varphi(1,x) = x$, (2) $\varphi(g_1,\varphi(g_2,x)) = \varphi(g_1g_2,x)$. 对于给定的 $x \in X$, 我们称集合 $\{\varphi(g,x) \mid g \in G\}$ 为 x 的轨道. 以 $G\backslash X$ 记所有轨道组成的集合. 我们说 $x,y \in X$ 是等价的, 如果存在 $g \in G$ 使得 $y = \varphi(g,x)$. 这样, x 的轨道就是 x 所

在的等价类, 而 $G\backslash X$ 就是等价类的集合. 若 H 是 G 的子群, 则 H 在 G 上的 (左) 乘作用的轨道就是 H 在 G 中的 (右) 陪集. 如果 H 是 G 的正规子群, 则陪集的集合 $H\backslash G$ 就是含入同态 $H \hookrightarrow G$ 的余核. 现在假设 G 和 X 都是 S 概形, φ 是 S 概形态射. 在下一节我们将引入 "轨道" $Y = G\backslash X$ 的概念 (见 1.9.1). 一个自然的问题是: 在 $Y = G\backslash X$ 上是否存在 S 概形结构, 使得自然投射 $\pi: X \to Y$ 是 S 概形满射, 并且在结构层上由 π 所决定的环同态 $\mathscr{O}_Y \to \pi_*\mathscr{O}_X$ 给出同构 $\mathscr{O}_Y \to (\pi_*\mathscr{O}_X)^G$, 其中 $(\pi_*\mathscr{O}_X)^G$ 是 $\pi_*\mathscr{O}_X$ 中的 G 不变元组成的子层. 当 S 是代数封闭域 k 时, 这个问题可以用初等线性代数解决. 但是对于一般的概形 S, 此问题不一定有解 (参见 [259] §3). 因此, 如果我们希望把代数封闭域 k 上的代数群理论推广到一般概形上就会遇到困难. 例如, 在 k 上定义幂幺代数群 (参见 $[147]_{\text{II}}$ XVII.1) 就会用到 "商群" 这个概念了! 下面我们将把群概形看作层, 然后解决求商的问题.

1.9 商 概 形

1.9.1 群作用与余核

设群概形 G 作用在概形 X 上. 我们要考虑的问题是: 何时轨道集合 $G\backslash X$ 有概形结构. 也可以把问题说成: 何时商层 $G\backslash X$ 是可表的.

以下我们总是设基概形 S 是局部 Noether 的.

设有 S 群概形 $(G,\mu,\varepsilon,\iota)$ (μ 为乘律, ε 为单位律, ι 为逆律) 及 S 概形 X. 我们说 G **作用** (act) 在 X 上, 如果有 S 概形态射 $u: G\times_S X \to X$, 使得以下两图交换:

$$\begin{array}{ccc} G\times_S G\times_S X & \xrightarrow{\mu\times \mathrm{id}_X} & G\times_S X \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_G\times u} & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ G\times_S X & \xrightarrow{u} & X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} S\times_S X & \xrightarrow{\approx} & X \\ \downarrow{\scriptstyle \varepsilon\times \mathrm{id}_X} & \nearrow{\scriptstyle u} & \\ G\times_S X & & \end{array}$$

我们说 G 在 X 上的作用是**自由的** (free), 如果对于任一 S 概形 T, 由 (u,pr_2) 所决定的映射 $(G\times_S X)(T) \to (X\times_S X)(T)$ 是单射, 这里 pr_2 是纤维积 $G\times_S X$ 到 X 的投射 (这对应于通常的条件: $g\cdot x = x \Rightarrow g = e$). 进一步地, 如果这个单射是闭浸入, 则我们称此作用为**严格自由作用** (strictly free action).

设有如上的 G 作用在 X 上, 则 $u((\mathrm{pr}_2)^{-1}(x))$ 称为 $x\in X$ 的**轨道** (orbit).

我们说 S 概形态射 $p: X \to Y$ 是 (u,pr_2) 的**余核** (cokernel), 又称为作用 $u: G\times_S X \to X$ 的 **范畴商** (categorical quotient), 并以 $G\backslash X$ 记 Y, 又称 $G\backslash X$ 为**商概形** (quotient scheme), 如果

(1) $p \circ u = p \circ \mathrm{pr}_2$ (我们把这个条件说成: p 在每个轨迹上取常值),

(2) 对任意的 S 概形 T, 若有 S 概形态射 $f: X \to T$ 在每个轨迹上取常值, 则存在唯一的 S 概形态射 $h: Y \to T$ 使 $f = h \circ p$.

1.9.2 有限群求商定理

定理 1.9.1 设 S 是局部 Noether 概形, G 为 S 群概形, X 为 S 概形, S 概形态射 $u: G \times_S X \to X$ 定义了 G 在 X 上的作用. 假设

(1) G 是局部自由有限 S 群概形,

(2) 对任意的 $x \in X$, 有 X 内开仿射子集包含 $u((\mathrm{pr}_2)^{-1}(x))$.

则

1) 在 $\mathfrak{Sch}/S$ 内存在 (u, pr_2) 的余核 (Y, p) (我们常把 Y 记作 $G \setminus X$).

2) p 是整态射, 并且如果 X 是仿射概形, 则 Y 是仿射概形.

3) $(u, \mathrm{pr}_2): G \times_S X \to X \times_Y X$ 是满射.

4) 若 G 在 X 上的作用是自由的, 则 3) 中的态射 (u, pr_2) 是同构, 并且 $p: X \to Y$ 是局部自由有限态射.

5) 若 G 是有限平坦 S 概形, X/S 是有限型, G 在 X 上的作用是严格自由的, 则

(i) $p: X \to Y$ 是有限平坦的.

(ii) 对于任一 S 概形 T, $G(T) \backslash X(T) \to Y(T)$ 是单射.

(iii) 如果 $S = \mathrm{Spec}\, R$, $G = \mathrm{Spec}\, B$, $X = \mathrm{Spec}\, A$, $\mathrm{pr}_2^\sharp$, $u^\sharp: A \to B \otimes_R A$, $A_0 = \{a \in A \mid \mathrm{pr}_2^\sharp(a) = u^\sharp(a)\}$, 则 $Y = \mathrm{Spec}(A_0)$.

本章余下部分的目的之一是证明这个定理. 我们将从 Grothendieck 的 "有限关系求商" 定理 (theorem on quotient by finite relation) 推出这个定理. 此定理原见 [140], Th.5.3. 当 S 是域时, 在 [264], §12 中证明了此定理.

1.9.3 商群

以下是前面定理的一个重要的特殊情形.

设 G 是 S 群概形, H 是 G 的有限平坦子群概形. 同样可以把群运算 $\mu: G \times_S G \to G$ 限制到 $G \times_S H$ 上, 得到 H 在概形 G 上的作用 $u: G \times_S H \to G$. 按 "有限群求商" 定理, 得到的余核记作 $p: G \to G/H$. 称 G/H 为 (H 在 G 中的) **左陪集概形** (left coset scheme).

阶函数满足等式 $[G : G/H] = [H : S]$. 若 $[H : S]$ 取常值, 则 $G \to S$ 是有限平坦的当且仅当 $G/H \to S$ 是有限平坦的. 并且此时有等式

$$[G : S] = [G : (G/H)][(G/H) : S].$$

我们以 $[G:H]$ 记 $[(G/H):S]$, 则以上的等式就成为

$$[G:S]=[G:H][H:S].$$

我们可以定义 G 在 G/H 上的作用

$$\begin{aligned} L:\ G\times(G/H) &\longrightarrow G/H \\ (x,p(y)) &\longmapsto p\mu(x,y), \end{aligned}$$

则有交换图

$$\begin{array}{ccc} G\times G & \xrightarrow{\mathrm{id}\times p} & G\times(G/H) \\ {\scriptstyle\mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle L} \\ G & \xrightarrow{p} & G/H \end{array}$$

如果 H 为 G 的正规子群, 即 H 在 G/H 上的作用平凡 (即 $L(h,p(y))=p(y),\ \forall\, h\in H,\ y\in G$), 则在图

$$(G\times_S H)\times_S(G/H) \overset{u\times\mathrm{id}}{\underset{\mathrm{pr}_1\times\mathrm{id}}{\rightrightarrows}} G\times_S(G/H) \xrightarrow{L} G/H$$

中有 $L\circ(u\times\mathrm{id})=L\circ(\mathrm{pr}_1\times\mathrm{id})$. 另一方面, 在图

$$(G\times_S H)\times_S(G/H) \overset{u\times\mathrm{id}}{\underset{\mathrm{pr}_1\times\mathrm{id}}{\rightrightarrows}} G\times_S(G/H) \xrightarrow{p\times\mathrm{id}} (G/H)\times_S(G/H)$$

中有 $(p\times\mathrm{id})\circ(u\times\mathrm{id})=(p\times\mathrm{id})\circ(\mathrm{pr}_1\times\mathrm{id})$. 于是有态射 $(G/H)\times_S(G/H)\xrightarrow{m}G/H$ 使得下图交换:

$$\begin{array}{ccccc} (G\times_S H)\times_S(G/H) & \overset{u\times\mathrm{id}}{\underset{\mathrm{pr}_1\times\mathrm{id}}{\rightrightarrows}} & G\times_S(G/H) & \xrightarrow{p\times\mathrm{id}} & (G/H)\times_S(G/H) \\ & & & {\scriptstyle L}\searrow & \downarrow{\scriptstyle m} \\ & & & & G/H \end{array}$$

命题 1.9.2 在上面的交换图中,

(1) m 使 G/H 成为 S 群概形.

(2) $p:\ G\to G/H$ 为 S 群同态.

(3) $H=\mathrm{Ker}\,p$, p 是有限忠实平坦态射.

(4) S 概形态射序列 $0\to H\to G\to G/H$ 是正合的.

1.9.4　群胚

假设范畴 $\mathfrak{C}$ 内有乘积及纤维积.

我们说 $\mathfrak{C}$ 内的态射图

$$X_1 \underset{d_0}{\overset{d_1}{\rightrightarrows}} X_0 \xrightarrow{\quad p \quad} Y$$

是**正合的** (exact), 如果

(1) $p \circ d_0 = p \circ d_1$,

(2) 对于任意的 $T \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{C}$, 有集合映射的正合图

$$T(X_1) \leftleftarrows T(X_0) \xleftarrow{T(p)} T(Y),$$

在这里, $T(Z) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Z, T)$, "正合" 是指 $T(p)$ 决定双射

$$\{f \in T(x_0) \mid f \circ d_0 = f \circ d_1\} \xleftarrow{T(p)} T(Y).$$

在这种情形下, 我们亦说 (Y, p) 是 (d_0, d_1) 的**余核** (cokernel), 并且记为

$$(Y, p) = \mathrm{Coker}(d_0, d_1).$$

若一个范畴内的任一态射均为同构, 则称此范畴为一个**群胚** (groupoid).

设有 $\mathfrak{C}$ 内的态射图

$$X_2 \xrightarrow{\quad d_1' \quad} X_1 \underset{d_0}{\overset{d_1}{\rightrightarrows}} X_0.$$

对于 $\mathfrak{C}$ 内的任一对象 T, 有

$$X_1(T) \underset{d_0(T)}{\overset{d_1(T)}{\rightrightarrows}} X_0(T).$$

此时我们可以把 $X_1(T)$ 看作一个范畴 $X_*(T)$ 的所有态射组成的类. 如果把态射称为箭, 则对于 $f \in X_1(T)$, 我们以 $d_1(T)(f)$ 作为箭头, $d_0(T)(f)$ 作为箭尾. 在 $\mathfrak{C}$ 内有纤维积 $(X_1, d_1) \times_{X_0} (X_1, d_0)$, 并且有双射

$$((X_1, d_1) \times_{X_0} (X_1, d_0))(T) \xrightarrow{\sim} (X_1(T), d_1(T)) \times_{X_0(T)} (X_1(T), d_0(T)).$$

此双射的值域中的元素 (g, f) 满足条件 $d_0 f = d_1 g$, 这正好是考虑合成 $g \circ f$ 的条件. 为此我们假设已给态射

$$d_1' : (X_1, d_1) \times_{X_0} (X_1, d_0) \longrightarrow X_1,$$

并定义 (g,f) 的合成为 $d_1'(T)(g,f)$. 此时自然地取范畴 $X_*(T)$ 的对象类为 $X_0(T)$.

我们称图形

$$(X_1,d_1)\times_{X_0}(X_1,d_0)\xrightarrow{d_1'}X_1\underset{d_0}{\overset{d_1}{\rightrightarrows}}X_0$$

为$\mathfrak{C}$ **群胚** ($\mathfrak{C}$-groupoid), 如果对于任一 $T\in\operatorname{Obj}\mathfrak{C}$, 上面定义的 $X_*(T)$ 都是群胚, 并且当我们把 T 看作变元时 X_* 是一个函子 (或说 X_* 关于 T 有函子性质).

我们略微推广上面的定义. 称图形

$$X_2\overset{d_0',d_1',d_2'}{\Rrightarrow}X_1\overset{d_0,d_1}{\rightrightarrows}X_0$$

为一个$\mathfrak{C}$ **群胚**, 如果

(1) 存在 $s:\ X_0\to X_1$ 满足 $d_1\circ s=\mathrm{id}_{x_0}$, $d_0\circ s=\mathrm{id}_{x_0}$,

(2) 以下三个图为卡氏图:

$$\begin{array}{ccc}X_2&\xrightarrow{d_0'}&X_1\\ {\scriptstyle d_2'}\downarrow&&\downarrow{\scriptstyle d_1}\\ X_1&\xrightarrow{d_0}&X_0\end{array}\qquad\begin{array}{ccc}X_2&\xrightarrow{d_1'}&X_1\\ {\scriptstyle d_0'}\downarrow&&\downarrow{\scriptstyle d_0}\\ X_1&\xrightarrow{d_0}&X_0\end{array}\qquad\begin{array}{ccc}X_2&\xrightarrow{d_1'}&X_1\\ {\scriptstyle d_2'}\downarrow&&\downarrow{\scriptstyle d_1}\\ X_1&\xrightarrow{d_1}&X_0\end{array}$$

(3) 下图交换:

$$\begin{array}{ccc}X_1\times_{d_1,d_0}X_1\times_{d_1,d_0}X_1&\xrightarrow{d_1'\times X_1}&X_1\times_{d_1,d_0}X_1\\ {\scriptstyle X_1\times d_1'}\downarrow&&\downarrow{\scriptstyle d_1'}\\ X_1\times_{d_1,d_0}X_1&\xrightarrow{d_1'}&X_1\end{array}$$

可以证明: 对于 $T\in\operatorname{Obj}\mathfrak{C}$, 令 $\operatorname{Obj}X_*(T)=X_0(T)$, $\operatorname{Mor}X_*(T)=X_1(T)$. 若 $f,g\in X_1(T)$ 使得 $d_0\circ f=d_1\circ g$, 则根据第一个卡氏图, g 和 f 决定一个 $h\in X_2(T)$. 令 $g\circ f$ 为 $d_1'(h)$, 则 $X_*(T)$ 成为一个群胚.

我们给出群胚的一个例子. 设 $\mathfrak{S}$ 是一个范畴, $\mathfrak{C}$ 为 $\mathfrak{S}$ 到集合范畴 $\mathfrak{Sets}$ 的所有函子组成的函子范畴 $\mathfrak{C}=[\mathfrak{S},\mathfrak{Sets}]$. 取 $X_0\in\operatorname{Obj}\mathfrak{C}$. 设有 $X_0\times X_0$ 的子函子 X_1, 使得对于任一 $T\in\mathfrak{C}$, $X_0(T)\times X_0(T)$ 的子集 $X_1(T)$ 在 $X_0(T)$ 上给出一个等价关系 "$\equiv$" (即是说: 对于 $x,y\in X_0(T)$, $x\equiv y$ 当且仅当 $(x,y)\in X_1(T)$). 接下去我们定义 $X_0\times X_0\times X_0$ 的子函子 X_2 如下:

$$X_2(T)=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in X_0(T),(x,y),(y,z)\in X_1(T)\}.$$

又定义 $d'_0(x,y,z)=(x,y)$, $d'_1(x,y,z)=(x,z)$, $d'_2(x,y,z)=(y,z)$, $d_0(x,y)=x$, $d_1(x,y)=y$. 不难验证我们得到的结构是一个群胚.

另一个例子：设在 $\mathfrak{C}$ 的所有对象都是集合 (设 $\mathfrak{C}$ 的纤维积是集合的纤维积), 设有 $\mathfrak{C}$ 群胚

$$X_2 \overset{d'_0,d'_1,d'_2}{\Rrightarrow} X_1 \underset{s}{\overset{d_0,d_1}{\rightleftarrows}} X_0.$$

我们在集合 X_0 上定义一个关系 "≡" 如下：对于 $x,y\in X_0$, $x\equiv y$ 当且仅当存在 $f\in X_1$ 使得 $d_1f=x$ 且 $d_0f=y$. 可以证明 "≡" 是一个等价关系. 即

(1) 若 $x\equiv y$, $y\equiv z$, 则 $x\equiv z$ (事实上, 由假设有 $f,g\in X_0$ 使得 $d_1f=x$, $d_0f=y=d_1g$, $z=d_0g$. 由第一个卡氏图得到 $e\in X_2$ 使得 $d'_0e=g$ 及 $d'_2e=f$. 于是 $d_1(d'_1e)=d_1d'_2e=d_1f=x$, $d_0(d'_1e)=d_0d'_0e=d_0g=z$. 故 $x\equiv z$).

(2) $x\equiv x$ (由 $d_1(sx)=x$, $d_0(sx)=x$ 立得).

(3) 若 $x\equiv y$, 则 $y\equiv x$ (这等价于说 "X_* 的态射 $x\xrightarrow{f}y$ 是同构", 即存在逆 $y\xrightarrow{f^{-1}}x$. 事实上, 由第二个卡氏图知有唯一的 h 使得 $f\circ h=s\circ d_0\circ f$ (看作 1_y). 由第三个卡氏图知有唯一的 g 使得 $g\circ f=s\circ d_1\circ f$ (看作 1_x)).

这就说明了 "≡" 是等价关系.

再引入一个术语. 我们说两个态射 $d_0,d_1: X_1\to X_0$ 是一个**等价对** (equivalence couple), 如果对于所有的对象 T,

$$(d_0\boxtimes d_1)(T):\ X_1(T)\longrightarrow X_0(T)\times X_0(T)$$

是单射并且 $(d_0\boxtimes d_1)(T)(X_1(T))$ 决定 $X_0(T)$ 的一个等价关系, 这里

$$(d_0\boxtimes d_1)(T)(x)=(d_1(T)(x),d_0(T)(x)).$$

1.10 有限关系求商

1.10.1 Grothendieck 的有限关系求商定理

定理 1.10.1(有限关系求商) 设有 $\mathfrak{Sch}/S$ 群胚

$$X_2 \overset{d'_0,d'_1,d'_2}{\Rrightarrow} X_1 \overset{d_0,d_1}{\rightrightarrows} X_0.$$

假设 (1) d_1 是有限局部自由态射,

(2) 对于任一 $x\in X_0$, 存在 X_0 的仿射开子集包含 $d_1(d_0^{-1}(x))$.

则

(1) 在 $\mathfrak{Sch}/S$ 内存在 (d_0,d_1) 的余核 (Y,p), 而且 (Y,p) 是 (d_0,d_1) 在赋环空间范畴内的余核.

(2) p 是整态射. 如果 X_0 是仿射概形, 则 Y 是仿射概形.

(3) $X_1 \to X_0 \times_Y X_0$: $x_1 \mapsto (d_0x_1, d_1x_1)$ 是满射.

(4) 若 (d_0,d_1) 是一个等价对, 则 (3) 中的态射 $X_1 \to X_0 \times_Y X_0$ 是同构, 并且 $p\colon X_0 \to Y$ 是局部自由有限态射.

1.10.2　群胚的构作

推论 1.10.2　在有限关系求商定理的条件下, 设局部自由有限 S 群概形 G 作用在 S 概形 X 上. 则我们可以构造一个 S 群胚如下: 取 X_0 为 X, X_1 为 $G \times X_0$, X_2 为 $G \times G \times X_0$. 对于任一 S 概形 T, 若 $x \in X_0(T)$, $g,h \in G(T)$, 则令

$$
\begin{aligned}
d_0(g,x) &= gx,\\
d_1(g,x) &= x,\\
d_0'(h,g,x) &= (h,gx),\\
d_1'(h,g,x) &= (hg,x),\\
d_2'(h,g,x) &= (g,x)
\end{aligned}
$$

即可.

在下面两小节我们给出有限关系求商定理的证明.

1.10.3　归结为仿射的情形

第一步. 设 $U^{(n)}$ 是 X_0 的最大开子集使得 d_1 在 $U^{(n)}$ 上是有限局部自由 n 秩的. 根据 $\mathfrak{C}$ 群胚定义中的第一、三个卡氏图可知, $d_0^{-1}(U^{(n)})$ 和 $d_1^{-1}(U^{(n)})$ 都是 X_1 的最大开子集 (记为 $U_1^{(n)}$) 使得 d_2' 在 $U_1^{(n)}$ 上是有限局部自由 n 秩的. 用 $(U^{(n)},U_1^{(n)})$ 构造出来的群胚记为 $X_*^{(n)}$. 因为 X 是这样的 $U^{(n)}$ 的直和 ($U^{(n)}$ 在 X 中既开又闭), 所以群胚 X_* 也是 $X_*^{(n)}$ 的直和. 这样, 我们在假设 "d_1 是局部自由 n 秩" 下证明定理即可.

第二步. 我们现在作这样的假设: 若 d_1 是局部自由 n 秩及 X_0 是仿射概形, 则定理成立.

首先证明定理 1.10.1 结论中的 (1).

在 X_0 上定义一个关系 "$\sim$": 对于 $x,y \in X_0$, $x \sim y$ 当且仅当存在 $z \in X_1$ 使得 $d_1z = y$ 且 $d_0z = x$. 则 $\sim$ 是一个等价关系. 令 $Y = X_0/\sim$ 并赋予商拓扑, 则有正合序列

$$
\mathscr{O}_Y \longrightarrow p_*(\mathscr{O}_{X_0}) \rightrightarrows p_*(d_{0*}\mathscr{O}_{X_1}) = p_*(d_{1*}\mathscr{O}_{X_1})
$$

(其中 $p: X_0 \to Y$ 为自然投射), 即 (Y,p) 是 (d_0,d_1) 在赋环空间范畴中的余核.

为了证明结论 (1), 我们只要证明 Y 是概形以及 $p: X_0 \to Y$ 是概形态射. 这是局部的问题. 对于任一 $y \in Y$, 设 $x \in X_0$ 使得 $p(x) = y$. 取 X_0 内的仿射开子集 $V \supseteq d_1(d_0^{-1}(x))$. 令 $F = X_0 \setminus V$. 因为 d_1 是整态射, 所以 $d_1(d_0^{-1}(F))$ 是闭集. 令 $V' = X_0 \setminus d_1(d_0^{-1}(F))$, 则 V' 是 V 内最大的饱和开集 ("饱和" 是指: 若 $x \in V'$, $y \in X_0$, $x \sim y$, 则 $y \in V'$). 因为 V' 是有限集 $d_1(d_0^{-1}(x))$ 的邻域, 故在结构层 $\mathscr{O}_V(V)$ 内存在 f, 使得 f 在 $V \setminus V'$ 上等于 0 并且 $d_1(d_0^{-1}(x))$ 含于开集 $V_f = \{x \in V \mid f(x) \neq 0\}$ (参见 [60] II §1, Prop.2). 令 $Z(f) = V' \setminus V_f$, 则 $d_0^{-1}(Z(f)) = \{x \in d_0^{-1}(V') = d_1^{-1}(V') \mid d_0^*(f)(x) = 0\}$. 另一方面, d_1 所决定的态射 $d_0^{-1}(V') = d_1^{-1}(V') \to V'$ 是局部自由 n 秩的, 故可以定义范数 $\mathrm{N}_{d_1}: \mathscr{O}(d_1^{-1}(V')) \to \mathscr{O}(V')$. 此时有 $d_1(d_0^{-1}(Z(f))) = \{x \in Z(f) \mid \mathrm{N}_{d_1}(d_0^*(f))(x) = 0\}$ (比如用后面证明的第 II 部分之 (2)). 设 $(V_f)'$ 是 V_f 内最大的饱和开集, 则 $(V_f)' = \{x \in V_f \mid \mathrm{N}_{d_1}(x) \neq 0\}$, 所以 $(V_f)'$ 是仿射子集.

取 $U = (V_f)'$, 则 U 是点 x 的饱和仿射开邻域. 按假设, 定理在 X_0 是仿射概形时成立, 即知 $p(U)$ 为 Y 的开仿射子集以及 $p \mid U$ 为概形态射. 这就证明了 (1).

其余各条结论证明类似.

1.10.4 仿射情形的证明

设 X_0 是仿射概形, d_1 是局部自由 n 秩态射.

设 $X_i = \operatorname{Spec} A_i$ $(i = 0,1,2)$, $d_i = \operatorname{Spec} \delta_i$, $d_i' = \operatorname{Spec} \delta_i'$, $\sigma = \operatorname{Spec} s$.

由群胚的定义, 有图

$$A_2 \overset{\delta_0',\delta_1',\delta_2'}{\Longleftarrow} A_1 \underset{\sigma}{\overset{\delta_0,\delta_1}{\leftrightarrows}} A_0,$$

其中各映射满足相应的余卡氏图 (cocartesian square).

设 $B = \{a \in A_0 \mid \delta_0 a = \delta_1 a\}$. 则 B 为 A_0 的子环.

第一步. **断言** A_0 是 B 的整扩张. 证明如下:

任取 $a \in A_0$, 则 $\delta_0 a \in A_1$. 在 δ_1 下 A_1 是 n 秩的自由代数. 故 $\delta_0 a$ 有特征多项式 (即线性映射 $u: A_1 \to A_1$, $u(x) = (\delta_0 a)x$ 的特征多项式):

$$P_{\delta_1}(T, \delta_0 a) = T^n - c_1 T^{n-1} + \cdots + (-1)^n c_n.$$

由 $\mathfrak{C}$ 群胚定义中的第一个卡氏图我们有相应的余卡氏图

$$\begin{array}{ccc} A_2 & \xleftarrow{\delta_0'} & A_1 \\ \uparrow{\scriptstyle \delta_2'} & & \uparrow{\scriptstyle \delta_1} \\ A_1 & \xleftarrow{\delta_0} & A_0 \end{array}$$

这就是说 $A_2=(A_1,\delta_1)\otimes_{A_0}(A_1,\delta_0)$. 用同态 $A_1\xleftarrow{\delta_0}A_0$ 换基, 由映射 u 就得到同态 $\tilde{u}: A_2\to A_2$ (此时 A_2 通过 $A_1\xrightarrow{\delta_2'}A_2$ 看作 A_1 代数): 对于 $y\in A_2$, $\tilde{u}(y)=(\widetilde{\delta_0 a})y$, 其中 $\widetilde{\delta_0 a}$ 是 $\delta_0 a$ 在 A_2 中的像, 即 $\widetilde{\delta_0 a}=\delta_0'(\delta_0 a)$. 从以上讨论我们得出

$$\delta_0(P_{\delta_1}(T,\delta_0 a))=P_{\delta_2'}(T,(\delta_0'\delta_0)a).$$

同样, 第三个卡氏图有相应的余卡氏图

$$\begin{array}{ccc} A_2 & \xleftarrow{\delta_1'} & A_1 \\ {\scriptstyle\delta_2'}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\delta_1} \\ A_1 & \xleftarrow{\delta_1} & A_0 \end{array}$$

与上面相同的讨论得到

$$\delta_1(P_{\delta_1}(T,\delta_0 a))=P_{\delta_2'}(T,(\delta_1'\delta_0)a).$$

第二个卡氏图相应的余卡氏图为

$$\begin{array}{ccc} A_2 & \xleftarrow{\delta_1'} & A_1 \\ {\scriptstyle\delta_0'}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\delta_0} \\ A_1 & \xleftarrow{\delta_0} & A_0 \end{array}$$

即有 $\delta_0'\delta_0=\delta_1'\delta_0$. 于是

$$\delta_0(P_{\delta_1}(T,\delta_0 a))=\delta_1(P_{\delta_1}(T,\delta_0 a)).$$

这就是说上述特征多项式的系数 c_i $(0\leqslant i<n)$ 满足 $\delta_0 c_i=\delta_1 c_i$.

根据 Cayley-Hamilton 定理, 我们有

$$\delta_0(a)^n-\delta_1(c_1)\delta_0(a)^{n-1}+\cdots+(-1)^n\delta_1(c_n)=0.$$

因为 $\delta_1 c_i=\delta_0 c_i$, 所以

$$\delta_0(a)^n-\delta_0(c_1)\delta_0(a)^{n-1}+\cdots+(-1)^n\delta_0(c_n)=0.$$

由 $\mathfrak{C}$ 群胚的定义知 $\sigma\circ\delta_0=\mathrm{id}_{A_0}$, 故 $\delta_0: A_0\to A_1$ 是单同态. 于是我们得到

$$a^n-c_1a^{n-1}+\cdots+(-1)^nc_n=0.$$

这说明 a 是 B 上的整元素. 由 $a \in A_0$ 的任意性即知 A_0 是 B 上的整扩张. 这就证明了第一步的断言.

第二步. **断言**. 设 x, y 为 A_0 的素理想. 如果 $x \cap B = y \cap B$, 则存在 A_1 的素理想 z 使得 $x = \delta_0^{-1}z$, $y = \delta_1^{-1}z$. 证明如下:

由 B 的定义, 有正合图

$$A_1 \overset{\delta_0}{\underset{\delta_1}{\leftleftarrows}} A_0 \xleftarrow{\quad i \quad} B,$$

其中 i 为包含同态. 我们用反证法. 假设结论不成立, 即: 若 z 为 A_1 的素理想, $y = \delta_1^{-1}z$, 则 $x \neq \delta_0^{-1}z$. 这样, 由于 δ_0 和 δ_1 限制在 B 上相等, 所以 $(\delta_0^{-1}z) \cap B = (\delta_1^{-1}z) \cap B$, 即 $x \cap B = y \cap B$. 又已证 A_0 是 B 上的整扩张, 所以 $x \not\subseteq \delta_0^{-1}z$ (用 Cohen-Seidenberg 定理, 见 [60] V §2, Prop.1, Cor.1). 故存在 $a \in x$ 但 $\delta_0 a \notin z$. 设 n 为 A_1 作为 (A_0, δ_1) 模的秩, 则满足 $\delta_1^{-1}z = y$ 的 (A_1 的) 素理想 z 的个数不超过 n (见 [60] II §1, Prop.2). 所以 $a \in x$ 并且对于任一满足 $\delta_1^{-1}z = y$ 的 (A_1 的) 素理想 z 皆有 $\delta_0 a \notin z$. 根据将要在下面证明的引理即知范数 $\mathrm{N}_{\delta_1}(\delta_0 a) \notin y$. 注意 $\mathrm{N}_{\delta_1}(\delta_0 a)$ 就是第一步的断言中的 c_n, 并且已经证明了 $c_n \in B$. 因为 $a \in x$, 所以 $\mathrm{N}_{\delta_1}(\delta_0 a) \in B \cap x = B \cap y$. 这与 $\mathrm{N}_{\delta_1}(\delta_0 a) \notin y$ 矛盾. 这就证明了第二步的断言.

引理 1.10.3 设 $i: A \to A'$ 为环同态, 使得 A' 成为秩 n 的投射 A 模. 对于 $b \in A'$, 以 N 记 b 的范数 $\mathrm{N}_{A'/A}(b)$, 以 $V(b)$ 记 $\{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A' \mid b \in \mathfrak{q}\}$, 以 $V(\mathrm{N})$ 记 $\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathrm{N} \in \mathfrak{p}\}$. 则在 i 决定的态射 $\operatorname{Spec}(i): \operatorname{Spec} A' \to \operatorname{Spec} A$ 下, $\operatorname{Spec}(i)(V(b)) = V(\mathrm{N})$.

证明 对于 A 的素理想 $\mathfrak{p}$, 以 $\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_n$ 记 A' 中满足条件 $i^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$ 的所有素理想. 以 $\mathrm{N}_\mathfrak{p}$ 记 N 在 $A_\mathfrak{p}$ 内的像, 以 $b_\mathfrak{p}$ 记 b 在 $A'_\mathfrak{p}$ 内的像. 由于 N (或 $\mathrm{N}_\mathfrak{p}$) 是自同态 $A' \to A' : x \mapsto xb$ (或 $A'_\mathfrak{p} \to A'_\mathfrak{p} : x \mapsto xb_\mathfrak{p}$) 的行列式, 所以有以下等价条件:

$$\mathfrak{p} \notin V(\mathrm{N}) \Leftrightarrow \mathrm{N}_\mathfrak{p}\text{可逆} \Leftrightarrow b_\mathfrak{p}\text{可逆} \Leftrightarrow b \notin \mathfrak{q}_i\ (\forall\, i) \Leftrightarrow \mathfrak{q}_i \notin V(b)\ (\forall\, i).$$

这就完成了引理 1.10.3 的证明.

第三步. **定理中结论 (1) 的证明**. 设 $Y = \operatorname{Spec} B$, $p = \operatorname{Spec} i$. 我们先证明 $(Y, p) = \operatorname{Coker}(d_0, d_1)$ 在赋环空间范畴中成立.

由第二步的断言知

$$\operatorname{Spec} B = \{x \cap B = y \cap B \mid x, y \in X_0, \text{且存在 } z \in X_1 \text{ 使得 } d_1 z = y, d_0 z = x\}.$$

因为 A_0 是 B 的整扩张，故 p 是闭满射 (Cohen-Seidenberg 定理)，所以 Y 的拓扑是 X_0 在 p 下的商拓扑. 又由于 p, d_0 和 d_1 均为仿射态射，故下面的环层序列正合：

$$\mathscr{O}_Y \longrightarrow p_*(\mathscr{O}_{X_0}) \rightrightarrows p_*((d_0)_*\mathscr{O}_{X_1}) \xrightarrow{\sim} p_*((d_1)_*\mathscr{O}_{X_1}),$$

即 $(Y,p) = \mathrm{Coker}(d_0, d_1)$.

下一步我们证明 $(Y,p) = \mathrm{Coker}(d_0, d_1)$ 在概形范畴中成立. 为此，设有概形态射 $f:\ X_0 \to T$ 满足 $f \circ d_0 = f \circ d_1$. 根据上面证明的结果，有赋环空间态射 $r:\ Y \to T$ 使得 $f = r \circ p$. 只要证明 r 是概形态射. 这就需要证明：对于任一 $y \in Y$, r 诱导的同态 $\mathscr{O}_{r(y)} \to \mathscr{O}_y$ 是局部同态. 事实上，由于 p 是满射，故存在 $x \in X_0$ 使得 $y = p(x)$, 并且 $\mathscr{O}_{f(x)} \to \mathscr{O}_x$ 和 $\mathscr{O}_y \to \mathscr{O}_x$ 都是局部同态. 这就完成了定理中结论 (1) 的证明.

第四步. 由第一步和第三步立得定理中的结论 (2).

第五步. **定理中结论 (3) 的证明**. 我们以

$$d_0 \boxtimes d_1 : X_1 \longrightarrow X_0 \times_Y X_0$$

记以 d_0、d_1 为分量的态射. 暂时使用以下的记号：如果 $p:\ P \to Q$ 是概形态射，当我们只把它看作集合映射时 (即把 P 的概形结构忘掉)，记作 $\underline{p}:\ \underline{P} \to \underline{Q}$. 这样，我们就有集合映射的分解：

$$\begin{array}{ccc}
\underline{X_1} & \xrightarrow{\underline{d_0 \boxtimes d_1}} & \underline{X_0 \times_Y X_0} \\
 & \searrow^{\underline{d_0} \boxtimes \underline{d_1}} & \downarrow q \\
 & & \underline{X_0} \times_{\underline{Y}} \underline{X_0}
\end{array}$$

由第二步知 $\underline{d_0} \boxtimes \underline{d_1}$ 是满射. 又易见：若 $\{v\} = q^{-1}(q(v))$, $v \in \underline{X_0 \times_Y X_0}$, 则 $v \in \underline{d_0 \boxtimes d_1}(\underline{X_1})$. 事实上，考虑条件

(*)　　　　如果 $v \in \underline{X_0 \times_Y X_0}$, $w = pv$, 则剩余域 $\kappa(w) = \kappa(v)$.

如果 (*) 成立，则 $\{v\} = q^{-1}(q(v))$, 所以 $v \in \underline{d_0 \boxtimes d_1}(\underline{X_1})$. 如果 (*) 不成立，则存在局部环 $(C, \mathfrak{m})$ 与平坦局部同态 $f:\ \mathscr{O}_w \to C$ 使得有 $\kappa(w)$ 代数同构 $C/\mathfrak{m} \cong \kappa(v)$. 设 $Y' = \mathrm{Spec}\, C$, 态射 $\pi:\ Y' \to Y$ 由 f 所诱导. 若投射 $(X_0 \times_Y X_0) \times_Y Y' \to X_0 \times_Y X_0$ 把 v' 映到 v, 则 $\kappa(v') = \kappa(v)$. 将 $(X_0 \times_Y X_0) \times_Y Y'$ 与 $(X_0 \times_Y Y') \times_{Y'} (X_0 \times_Y Y')$ 等同起来，用 $\pi:\ Y' \to Y$ 换基后，$X_0 \times_Y Y'$ 记为 $\widetilde{X}_0$, $d_0 \boxtimes d_1$ 记为 $\tilde{d}_0 \boxtimes \tilde{d}_1$, 则存在 $u' \in \widetilde{X}_1 = X_1 \times_Y Y'$ 使得 $\tilde{d}_0 \boxtimes \tilde{d}_1(u') = v'$. 令 u 为 u' 在 X_1 中的像，则 $v = d_0 \boxtimes d_1(u)$.

第六步. **定理中结论 (4) 的证明**. 只要证明：对于 B 的任一素理想 $\mathfrak{q}$, $A_{0\mathfrak{q}}$ 是秩 n 的自由 $B_\mathfrak{q}$ 模, 并且有双射

$$\begin{aligned} A_{0\mathfrak{q}} \otimes_{B_\mathfrak{q}} A_{0\mathfrak{q}} &\longrightarrow A_{1\mathfrak{q}} \\ a \otimes a' &\longmapsto (\delta_{0\mathfrak{q}} a) \otimes (\delta_{1\mathfrak{q}} a'). \end{aligned}$$

事实上, 若此结果成立, 则 $A_0 \otimes_B A_0 \to A_1$ 为双射. 又已知 $B \to A_0$ 是忠实平坦的, 而 (A_1, δ_1) 是 n 秩自由 A_0 模, 所以 A_0 是 n 秩自由 B 模 ([60], I 3.6 节, Prop.12).

这样, 只要用 $A_{i\mathfrak{q}}$ 代替 A_i, 就可以假设 B 是局部环. 此时 A_0 是半局部环, 其原因如下：设 $\mathfrak{m}$ 是 A_0 的一个极大理想. 由第二步知 A_0 的所有极大理想是 $\delta_0^{-1}(\mathfrak{n})$, 其中 $\mathfrak{n}$ 取遍 A_1 中满足 $\delta_1^{-1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$ 的素理想. 而这样的素理想 $\mathfrak{n}$ 的个数不超过 $n = [A_1 : A_0]$, 所以 A_0 只有有限多个极大理想.

用第五步中同样的方法, 在忠实平坦换基后可以假设 B 的剩余域是无限域.

引理 1.10.4　*设 B 为局部环, 其极大理想为 $\mathfrak{m}$, $B/\mathfrak{m}$ 为无限域. 设 A 为半局部环, A 的根记为 $\mathfrak{r}$. 设 i : $B \to A$ 为环同态, 满足 $i(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{r}$. 又设 M 为秩 n 的自由 A 模, N 为 M 的 B 子模. 如果 $AN = M$, 则在 N 内存在 M 的 A 基.*

证明　对于 $m \in M$, 以 $\overline{m}$ 记 m 在同态 $M \to M/\mathfrak{r}M$ 下的像. 则 $m_1, \cdots, m_t \in M$ 是 M 在 A 上的基当且仅当 $\overline{m}_1, \cdots, \overline{m}_t$ 是 $M/\mathfrak{r}M$ 在 $A/\mathfrak{r}$ 上的基. 因此可以将 M, N, A, B 分别用 $M/\mathfrak{r}M$, $N/(N \cap \mathfrak{r}M)$, $A/\mathfrak{r}$, $B/\mathfrak{m}$ 代替. 即无妨假定 B 是无限域, A 的根为 0. 于是可设 $A = k_1 \times \cdots \times k_l$, 其中 k_i/B 都是域扩张. 对 M 的 A 秩 n 作归纳法. $n = 0$ 时结论显然成立 (此时 $M = \{0\}$). 现在设结论对于 $n-1$ 成立. $M = k_1^n \times \cdots \times k_l^n$. 由于 $AN = M$, 故存在 $x_j \in N$ 使得 x_j 在 $M = k_1^n \times \cdots \times k_l^n$ 的第 j 个分量非零 $(j = 1, \cdots, l)$. 由于 B 为无限域, 故存在 x_j $(1 \leqslant j \leqslant l)$ 的 B 线性组合 x 使得 x 在 $M = k_1^n \times \cdots \times k_l^n$ 的所有分量均非零. 对 M/Ax 用归纳假设即可. 引理证毕.

现在回到第六步. 在引理 1.10.4 中取 B 为 B, A 为 A_0, M 为 A_1 在 δ_1 : $A_0 \to A_1$ 下构成的 A_0 模, $N = \delta_0(A_0)$ (注意 N 符合引理 1.10.4 的条件. 这因为 $d_0 \boxtimes d_1$: $X_1 \to x_0 \times_Y X_0$ 是单态射, 所以 $A_0 \otimes_B A_0 \to A_1$: $a \otimes a' \mapsto \delta_1 a \otimes \delta_0 a'$ 是满射, 于是 $N = \delta_0(A_0)$ 生成 A_0 模 A_1). 由引理 1.10.4 知存在 $c_1, \cdots, c_n \in A_0$ 使得 $\delta_0(c_1), \cdots, \delta_0(c_n)$ 构成 A_0 模 A_1 的基. 如果能够证明 $c_1, \cdots, c_n$ 是 B 模 A_0 的基, 则同态 $A_0 \otimes_B A_0 \to A_1$ 把 $\{1 \otimes c_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ 映为基 $\{\delta_0(c_i)\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$, 于是便知此同态为双射, 即完成了第六步.

为了证明 $c_1, \cdots, c_n$ 是 B 模 A_0 的基, 我们以 e_i $(j = 1, \cdots, n)$ 记 B^n $(= B \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Z}^n)$ 的自然基. 考虑交换图

$$\begin{array}{ccccc} A_2 & \overset{\delta_1'}{\underset{\delta_0'}{\Longleftarrow}} & A_1 & \xleftarrow{\delta_0} & A_0 \\ \uparrow{\scriptstyle u_2} & & \uparrow{\scriptstyle u_1} & & \uparrow{\scriptstyle u_0} \\ A_1^n & \overset{\delta_1^n}{\underset{\delta_0^n}{\Longleftarrow}} & A_0^n & \xleftarrow{i^n} & B^n \end{array}$$

其中

$$u_0\left(\sum e_j b_j\right) = \sum c_j b_i, \quad b_j \in B,$$
$$u_1\left(\sum e_j a_j^0\right) = \sum \delta_0(c_j)\delta_1(a_j^0), \quad a_j^0 \in A_0,$$
$$u_2\left(\sum e_j a_j^1\right) = \sum \delta_0'\delta_0(c_j)\delta_2'(a_j^1), \quad a_j^1 \in A_1.$$

由于 $\{\delta_0(c_j)\}_{1\leqslant j\leqslant n}$ 是 A_0 模 A_1 的基, 所以 u_1 是双射. 根据 $\mathfrak{C}$ 群胚定义中的第一个余卡氏图

$$\begin{array}{ccc} A_2 & \xleftarrow{\delta_0'} & A_1 \\ \uparrow{\scriptstyle \delta_2'} & & \uparrow{\scriptstyle \delta_1} \\ A_1 & \xleftarrow{\delta_0} & A_0 \end{array}$$

A_2 等于张量积 $A_1 \otimes_{A_0} A_1$. 由于 u_2 是由 u_1 通过换基 $A_1 \xleftarrow{\delta_0} A_0$ 得到的, 所以 u_2 也是双射. 最后, 在上面含有 u_0, u_1, u_2 的交换图中的行是正合的, 所以 u_1、u_2 是双射蕴含着 u_0 是双射. 这就证明了定理中的 (4). 从而完成了定理 1.10.1 的全部证明. □

现在我们来证明 "有限群求商" 定理, 即定理 1.9.1.

设有 S 群概形作用 $u: G\times_S X \to X$. 以 $\mu: G\times_S G \to G$ 记群运算, $\mathrm{pr}_{2,3}: G\times_S (G\times_S X)$ 为对第二个因子投影.

现更换符号如下: $X_0 = X$, $X_1 = G\times_S X$, $X_2 = G\times_S G\times_S X$, $d_0 = u$, $d_1 = \mathrm{pr}_2: S\times_S X \to X$, $d_0' = \mathrm{pr}_{2,3}$, $d_1' = \mu\times \mathrm{id}_X$, $d_2' = \mathrm{id}_G \times u$. 则容易验证

$$X_2 \overset{d_0', d_1', d_2'}{\Rrightarrow} X_1 \overset{d_0, d_1}{\rightrightarrows} X_0$$

是一个 $\mathfrak{Sch}/S$ 群胚. 此时, 若作用 u 是自由的, 则 (d_0, d_1) 是等价对. 显然, 我们想要证明的 "有限群求商" 定理不过是 "有限关系求商" 定理的特例.

再看一个特殊情形: 设 $S = \operatorname{Spec} R$, $G = \operatorname{Spec} A$, $X = \operatorname{Spec} B$ 是仿射概形. 作用 u 由环同态 $\tilde{u}: B \to A\otimes_R B$ 给出. 令 $B_0 = \{b\in B \mid \tilde{u}(b) = 1\otimes b\}$. 则 $Y = \operatorname{Spec} B_0$.

第二章　ETALE 群概形

2.1　ETALE 态射

2.1.1　étale 态射的定义

定义 2.1.1　设 $f: Y \to X$ 为概形的有限展示态射，则关于 f 的以下三个性质等价. 如果 f 满足这三条性质, 我们就称 f 为概形的 étale **态射** (étale morphism).

(1) 设

$$0 \longrightarrow \varepsilon \longrightarrow A \longrightarrow A_0 \longrightarrow 0$$

为任一环正合序列 (其中理想 ε 是幂零的), $\operatorname{Spec} A \to X$ 为概形态射. 则任一 X 态射 $\operatorname{Spec} A_0 \to Y$ 可以唯一地扩充为态射 $\operatorname{Spec} A \to Y$ (见下图):

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} A_0 & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow f \\ \operatorname{Spec} A & \longrightarrow & X \end{array}$$

(2) f 是平坦的并且微分层 $\Omega^1_{Y/X} = 0$;

(3) 对于任一 $y \in Y$, 存在 $f(y)$ 的邻域 $\operatorname{Spec} A$, y 的邻域 $\operatorname{Spec} B$, 使得 $B = A[t_1, \cdots, t_n]/(f_1, \cdots, f_n)$, 其中 Jacobi 行列式 $\det \frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(t_1,\cdots,t_n)}$ 在 B 中可逆.

关于此三条件等价性的证明见 $[145]_4$ 17.6.2; [252] Chap.I §3; [194] Chap.I §1.

2.1.2　étale 态射的剩余域

定义 2.1.1 中关于微分层的条件 (2) 有如下解释. 设 $f: Y \to X$ 为有限型概形态射. 则 $\Omega^1_{Y/X} = 0$ 当且仅当对于任一 $y \in Y$, $\mathscr{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_{f(y)}\mathscr{O}_{Y,y}$ 是剩余域 $\kappa(f(y))$ 的有限可分域扩张. 在仿射概形的情形下, 这就是说: 设 $\varphi: A \to B$ 是有限型环同态, 则 $\Omega_{B/A} = 0$ 当且仅当对于任一 $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$, $\mathfrak{p} = f^{-1}(\mathfrak{q})$ 生成 $B_{\mathfrak{q}}$ 的极大理想, 并且剩余域 $\kappa(\mathfrak{q})$ 是 $\kappa(\mathfrak{p})$ 的有限可分扩张. 更特殊的情形是: 当 k 是域, 而环 B 是有限生成 k 模时, 我们说 B 是可分 k 代数 (separable k-algebra), 如果 B 同构于直积 $\prod_{i=1}^n K_i$, 其中每一个 K_i/k 都是有限可分域扩张. 这样, 设 $k \to B$ 是有限 k 代数, 则 $\Omega_{B/k} = 0$ 当且仅当 B 是可分 k 代数.

2.1.3 有限 étale 态射

作为 étale 态射的一个重要情形, 我们有

定义 2.1.2 概形态射 $f: Y \to X$ 称为**有限 étale 态射** (finite étale morphism), 如果 f 是有限平坦态射并且 $\Omega^1_{Y/X} = 0$.

若 $f: Y \to X$ 有限 étale 态射, 则对于任一 $x \in X$, 纤维 $Y_x := Y \times_X \{x\}$ 可以写作 $\mathrm{Spec}\, B$, 其中 B 为剩余域 $\kappa(x)$ 上的可分代数. 这也等于说 B 不含幂零元并且对于任一 $y \in Y$, 剩余域 $\kappa(y)/\kappa(x)$ 是可分扩张. 我们以 S_{red} 记概形 S 的约化概形 (reduced scheme), 以 $[K:k]_{\mathrm{sep}}$ 记域扩张的可分次数. 则此时下面的不等号皆为等号:

$$
\begin{aligned}
(x) &:= [Y_x : \{x\}] \\
&\geqslant [(Y_x)_{\mathrm{red}} : \{x\}] \\
&= \sum_{y \in Y_x} [\kappa(y) : \kappa(x)] \\
&\geqslant \sum_{y \in Y_x} [\kappa(y) : \kappa(x)]_{\mathrm{sep}}.
\end{aligned}
$$

设 Ω 为代数封闭域. 对于 $s \in S$, 每一个域嵌入 $\alpha^\sharp: \kappa(s) \to \Omega$ 决定在 s **的几何点** (geometric point of S centered at s) $\alpha: \mathrm{Spec}\,\Omega \to S$. 对于 S 概形 $X \xrightarrow{f} S$, X 在 α 上的几何点所组成的集合记为

$$X(\alpha) := \{\mathrm{Spec}\,\Omega \xrightarrow{\beta} X \mid f \circ \beta = \alpha\}.$$

可以证明此集合的元素个数为

$$\# X(\alpha) = \sum_{x \in X_s} [\kappa(x) : \kappa(s)]_{\mathrm{sep}}.$$

所以, 如果 X 是有限平坦 S 概形, α 是在 $s \in S$ 的几何点, 则

$$\# X(\alpha) \leqslant [X : S](s).$$

此时 X 在 S 上 étale 的充要条件是这个不等式是等式.

2.1.4 étale 群概形

定义 2.1.3 如果概形 étale 态射 $G \to S$ 是 S 群概形, 则我们称 G 为 **étale S 群概形** (étale S-group scheme).

设 G/S 是有限平坦 S 群概形, 则 $G = \operatorname{Spec}\mathscr{A}$, 其中 $\mathscr{A}$ 是交换 Hopf $\mathscr{O}_S$ 代数层并且 $\mathscr{A}$ 作为 $\mathscr{O}_S$ 模是局部自由有限秩的. 设 $e: \mathscr{A} \to \mathscr{O}_S$ 是 Hopf 代数的增广映射, $\mathscr{I} = \operatorname{Ker} e$ 为增广理想, 则单位截面 $\varepsilon(S) = \operatorname{Spec}(\mathscr{A}/\mathscr{I})$.

一个有限平坦 S 群概形是 étale 群概形当且仅当 $\Omega^1_{G/S} = 0$. 由增广理想与微分模的关系 (见命题 1.5.2) 知: $\Omega^1_{G/S} = 0$ 等价于 $\mathscr{I} = \mathscr{I}^2$. 此时对于 $x \in \operatorname{Spec}(\mathscr{A}/\mathscr{I})$, 有 $(\mathscr{A}_x/\mathscr{I}_x) \otimes_{\mathscr{A}_x} \mathscr{I}_x = (\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)_x = 0$. 由 Nakayama 引理得 $\mathscr{I}_x = 0$. 所以 $G \setminus \varepsilon(S)$ 是 $\mathscr{I}$ 的支集. 因为 $\mathscr{I}$ 的支集是闭集, 所以 $\varepsilon(S)$ 是开集. 由此易知下面的结论:

引理 2.1.1 设 G/S 是有限平坦群概形, 则 G 是 étale 群概形当且仅当单位截面 $\varepsilon(S)$ 是开集.

设 k 是域. 易见: 有限 k 群概形 $G = \operatorname{Spec} A$ 是 étale 群概形的充要条件是 A 是可分 k 代数.

有限交换 k 群概形是乘性的当且仅当 G 的 Cartier 对偶 G^* 是 étale. 这是因为我们可以先换基到代数封闭域后, 再利用 μ_n 的 Cartier 对偶是 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

2.2 基 本 群

2.2.1 范畴 $(\mathfrak{FEt}/S)$

固定一个概形 S. 我们假设 S 非空并且是连通的. 以 $(\mathfrak{FEt}/S)$ 记有限 étale S 概形范畴. $(\mathfrak{FEt}/S)$ 的对象是有限 étale 概形态射 $X \xrightarrow{f} S$; 若又有 $(\mathfrak{FEt}/S)$ 的对象 $X' \xrightarrow{f'} S$, 则在 $(\mathfrak{FEt}/S)$ 中由第一个对象到由第二个对象的态射是满足 $f' \circ u = f$ 的概形态射 $u: X \to X'$.

在 S 内取定一个点 s. 以 $\kappa(s)$ 记 s 的剩余域. 取定 $\kappa(s)$ 的一个代数闭包 Ω. 设 $\alpha: \operatorname{Spec}\Omega \to S$ 为到 s 的几何点, 即有交换图

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec}\Omega & & \\ \downarrow & \searrow^{\alpha} & \\ \operatorname{Spec}\kappa(s) & \longrightarrow & S \end{array}$$

若 $X \in (\mathfrak{FEt}/S)$, 以 $X(\alpha)$ 记所有在 α 上的 X 的几何点 $\operatorname{Spec}\Omega \xrightarrow{\beta} X$ 组成的有限集, 即 $X(\alpha)$ 的元素为使得下图交换的 S 态射 $\operatorname{Spec}\Omega \xrightarrow{\beta} X$:

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec}\Omega & \xrightarrow{\beta} & X \\ \downarrow & \searrow^{\alpha} & \downarrow f \\ \operatorname{Spec}\kappa(s) & \longrightarrow & S \end{array}$$

我们也可以说 $X(\alpha)$ 的元素是指 $f^{-1}(s)$ 的一个点 x 加上一个 $\kappa(s)$ 单同态 $\kappa(s) \to \Omega$. 显然 $X \to X(\alpha)$ 决定了一个从 $(\mathfrak{F}\mathfrak{Et}/S)$ 到集合范畴 $\mathfrak{Sets}$ 的一个函子 F.

2.2.2 基本群

定义 2.2.1 概形 S 在几何点 α 的**基本群** (fundamental group) $\pi = \pi_1(S, \alpha)$ 定义为函子

$$F:\ (\mathfrak{F}\mathfrak{Et}/S) \longrightarrow \mathfrak{Sets}$$
$$X \longmapsto X(\alpha)$$

的自同构群.

这里所说的"函子 F 的自同构"是指自然变换 $\sigma:\ F \to F$, 即对于每个 $X \in (\mathfrak{F}\mathfrak{Et}/S)$, 给出集合的双射 $X(\alpha) \xrightarrow{\sigma_X} X(\alpha)$, 使得对于任一 $(\mathfrak{F}\mathfrak{Et}/S)$ 态射 $X \xrightarrow{u} X'$ 都有交换图

$$\begin{array}{ccc} X(\alpha) & \xrightarrow{\sigma_X} & X(\alpha) \\ {\scriptstyle u(\alpha)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u(\alpha)} \\ X'(\alpha) & \xrightarrow{\sigma_{X'}} & X'(\alpha) \end{array}$$

其中 $F(u)$ 定义为: 对于 $\beta \in X(\alpha)$, $u(\alpha)(\beta) = u \circ \beta$. 以 ω_X 记子群 $\{\sigma \in \pi \mid \sigma_X = \mathrm{id}_{X(\alpha)}\}$. 以 $\{\omega_X \mid X \in (\mathfrak{F}\mathfrak{Et}/S)\}$ 作为 π 基本邻域系来定义 π 上的拓扑, 则 π 成为投射有限群 (参见 [146] V, p.19).

我们说 π 连续地作用在有限集 Y 上, 如果对于任一 $y \in Y$, $\{\sigma \in \pi \mid \sigma y = y\}$ 皆为开集. 具有连续 π 作用的有限集组成的范畴记作 (F-π-$\mathfrak{Sets}$). 根据定义, 对于 $X \in (\mathfrak{F}\mathfrak{Et}/S)$, 有 $X(\alpha) \in$ (F-π-$\mathfrak{Sets}$).

定理 2.2.1(Grothendieck) 函子

$$(\mathfrak{F}\mathfrak{Et}/S) \longrightarrow (\text{F-}\pi\text{-}\mathfrak{Sets})$$
$$X \longmapsto X(\alpha)$$

为范畴等价.

证明 见 [146] V, §4, Th.4.1.

2.2.3 函子 $(\mathfrak{F}\mathfrak{Et}/S) \to$ (F-π-$\mathfrak{Sets}$) 的性质

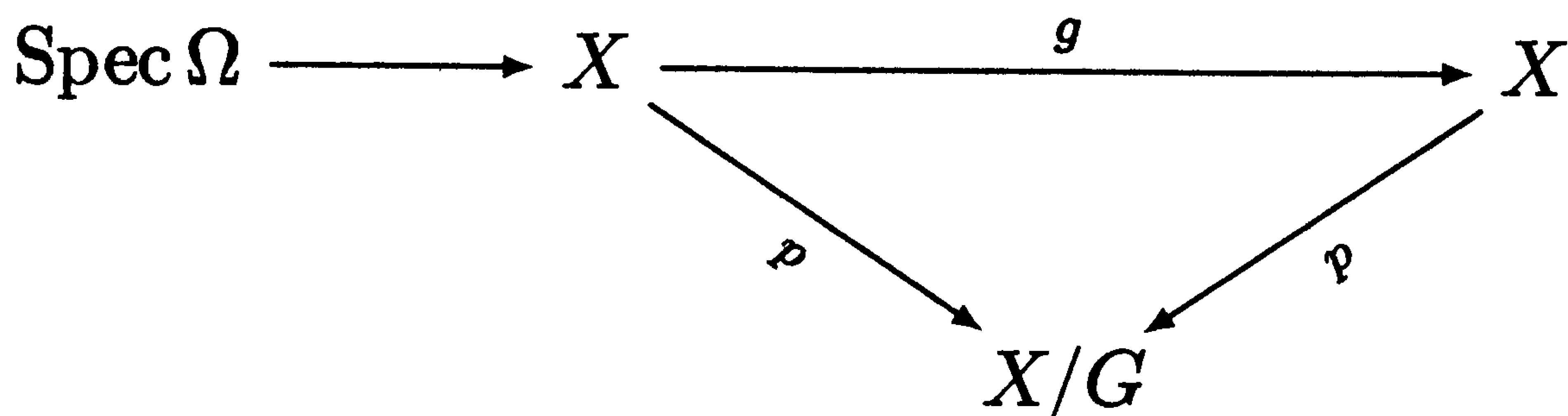
以上定义的函子 $X \mapsto X(\alpha)$ 有以下性质:

(1) $F(X) = \emptyset$ 当且仅当 $X = \emptyset$, 集合 $F(S)$ 只有一个元素.

(2) 对于 $X, Y, Z \in (\mathfrak{F}\mathfrak{Et}/S)$, 有 $F(X \times_Z Y) = F(X) \times_{F(Z)} F(Y)$.

(3) $F(X\coprod Y)=F(X)\coprod F(Y)$, 把 $X\in(\mathfrak{F}\mathfrak{Et}/S)$ 写成它的连通分支的无交并, 则相应的 $F(X)$ 便可看作在 π 作用下的轨道的并集.

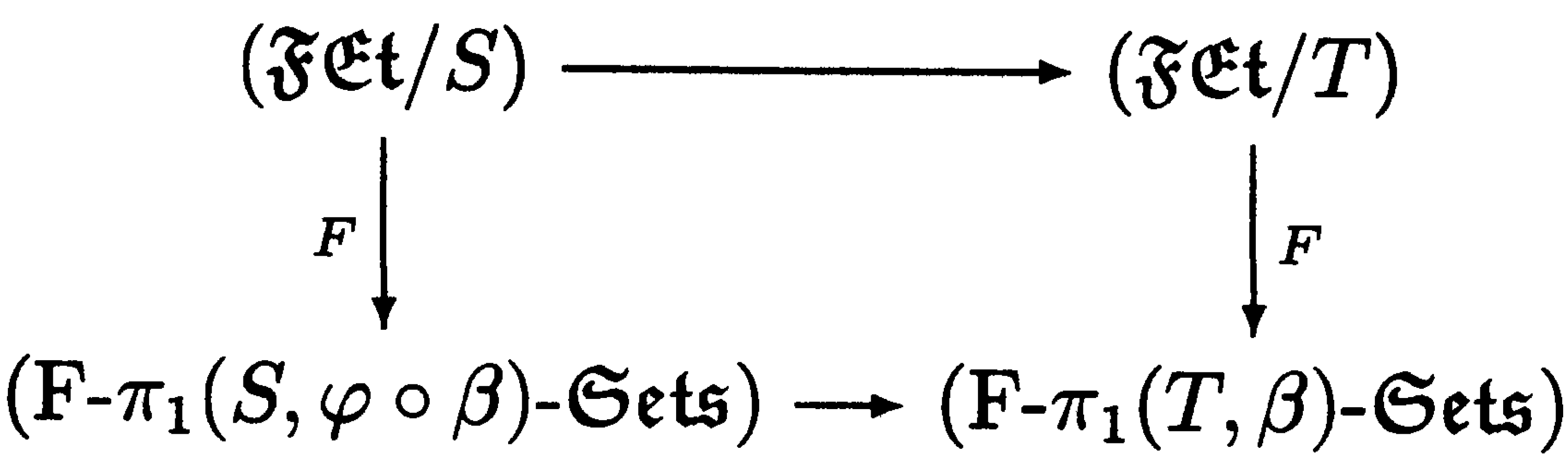
(4) 设 $X\in(\mathfrak{F}\mathfrak{Et}/S)$, 又设 G 为有限群, G 的元素为 X 的 S 自同构. 则存在商概形 X/G 使得 $X/G\in(\mathfrak{F}\mathfrak{Et}/S)$, 并且自然态射 $X\xrightarrow{p}X/G$ 为有限 étale 概形满射. 同时 G 通过 $\operatorname{Spec}\Omega\to X\xrightarrow{g}X$ $(g\in G)$ 作用在 $F(X)$ 上, 并且有交换图



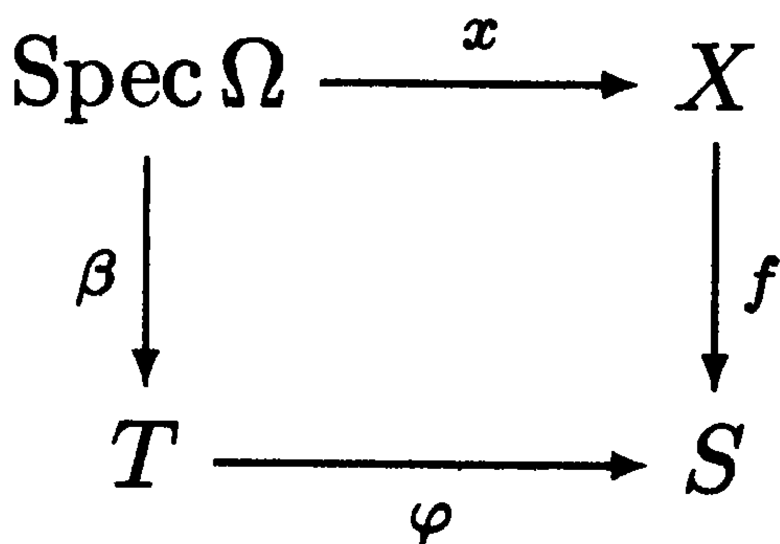
从 p 得出的 $F(p):F(X)\to F(X/G)$ 所决定的映射 $\tilde{p}:F(X)/G\to F(X/G)$ 是双射.

(5) 如果 $(\mathfrak{F}\mathfrak{Et}/S)$ 态射 $u:X\to Y$ 使得 $F(u):F(X)\to F(Y)$ 为双射, 则 u 是 S 同构.

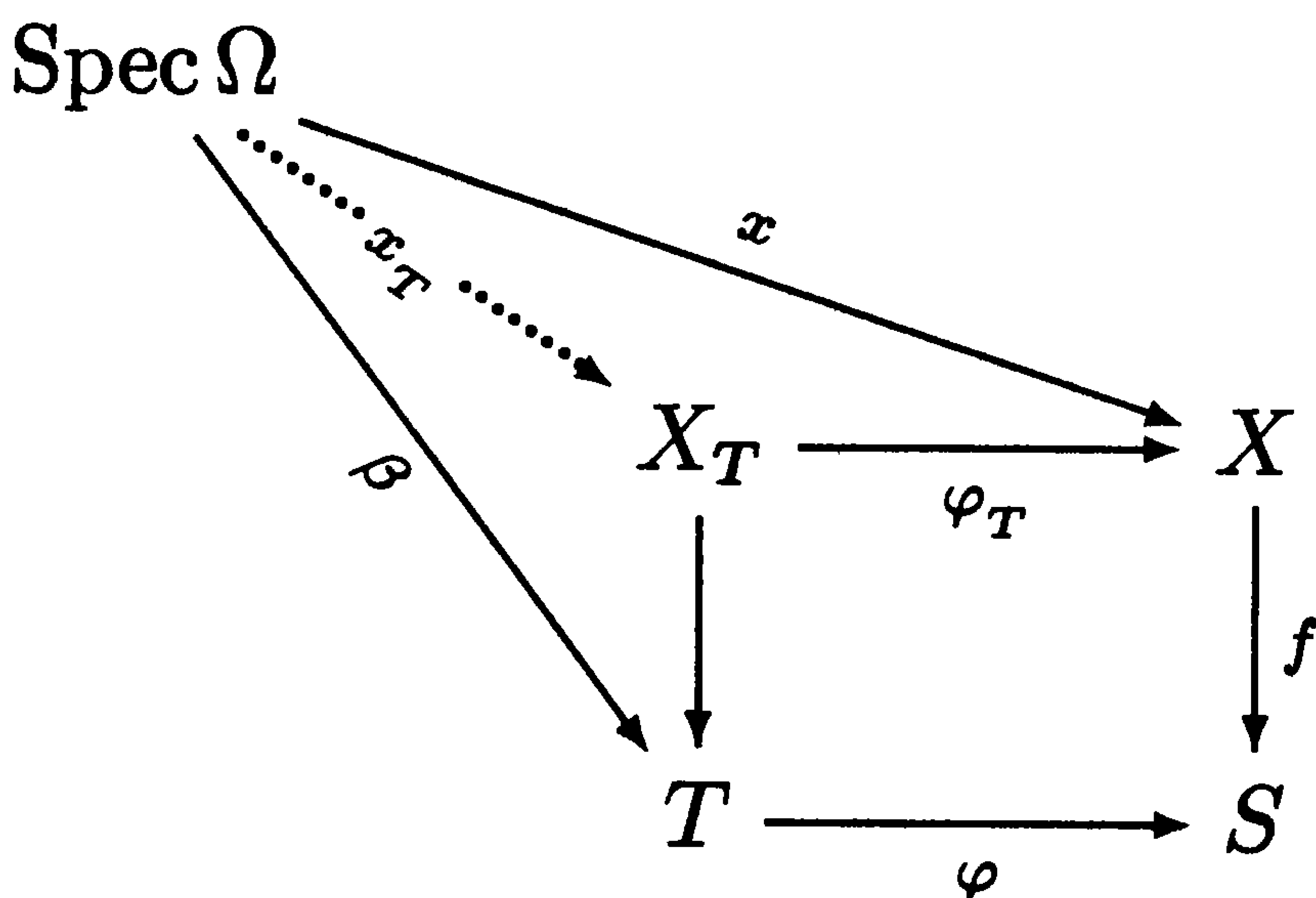
(6) 设 $\varphi:T\to S$ 为概形态射, 则有换基函子 $(\mathfrak{F}\mathfrak{Et}/S)\to(\mathfrak{F}\mathfrak{Et}/T):X\mapsto X_T=X\times_S T$. 由此可得同态 $\varphi_*:\pi_1(T,\beta)\to\pi_1(S,\varphi\circ\beta)$. 利用同态 φ_*, 可以把 $\pi_1(S,\varphi\circ\beta)$ 看作 $\pi_1(T,\beta)$ 集, 即下图交换



上面的 φ_* 的定义如下：对于 $\sigma\in\pi_1(T,\beta)$, 我们要定义函子同构 $f_*\sigma\in\pi_1(S,\varphi\circ\beta)$. 即是说对于 $X\in(\mathfrak{F}\mathfrak{Et}/S)$, 要定义 $(f_*\sigma)_X:X(\varphi\circ\beta)\to X(\varphi\circ\beta)$. 设 $x\in X(\varphi\circ\beta)$, 即有



进行换基



就得到几何点 $x_T \in X_T(\beta)$. 在 σ 下便得到 $\sigma_{X_T}(x_T) \in X_T(\beta)$, 即有

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{Spec}\Omega & \xrightarrow{\sigma_{X_T}(x_T)} & X_T & \xrightarrow{\varphi_T} & X \\ & \searrow^{\beta} & \downarrow & & \downarrow f \\ & & T & \xrightarrow{\varphi} & S \end{array}$$

我们就定义 $(f_*\sigma)_X(x)$ 为 $\varphi_T \circ (\sigma_{X_T}(x_T))$.

(7) 设有 S 的几何点 α, α', 则函子 $X \to X(\alpha)$ 和 $X \to X(\alpha')$ 等价, 并且有同构

$$\pi_1(S,\alpha) \xrightarrow{\sim} \pi_1(S,\alpha').$$

(8) 设 R 为 Hensel 局部环, $S = \operatorname{Spec} R$, $\mathfrak{m}$ 为 R 的极大理想, $k = R/\mathfrak{m}$, $s = \operatorname{Spec} k$ 为 S 的闭点, Ω 为 k 的代数闭包, $\alpha: \operatorname{Spec}\Omega \to S$ 为 s 上的几何点. 则由包含态射 $\{s\} \hookrightarrow S$ 所诱导的同态 $\pi_1(\{s\},\alpha) \to \pi_1(S,\alpha)$ 为同构.

2.2.4　例子

我们来看一些例子.

设 k 是域. 取定 k 的一个代数闭包 Ω. 以 k_s 记 k 在 Ω 内的可分闭包.

(1) 如前, 设 S 为取定的基概形, $s \in \operatorname{Spec} S$. 设 $k = \kappa(s)$, 则几何点 α 由 $\overline{\alpha}: k \hookrightarrow \Omega$ 所决定. 此时自同构群 $\operatorname{Aut}_k(\Omega)$ 左作用在 Ω 上, 于是右作用在 $\operatorname{Spec}\Omega$ 上. 对于 $X \in (\mathfrak{FEt}/S)$, $\operatorname{Aut}_k(\Omega)$ 左作用在 $X(\alpha) = \operatorname{Hom}_{\mathfrak{Sch}/S}(\operatorname{Spec}\Omega, X)$ 上. 这就是说, 对于每一个 $X \in (\mathfrak{FEt}/S)$ 和 $a \in \operatorname{Aut}_k(\Omega)$, 我们有双射 $a_X: X(\alpha) \to X(\alpha)$. 这样便得到同态 $\operatorname{Aut}_k(\Omega) \to \pi_1(S,\alpha)$.

现在假设 $S = \{s\} = \operatorname{Spec} k$. 则 $(\mathfrak{FEt}/S)$ 中的连通有限 étale S 概形为 $X = \operatorname{Spec} K$, 其中 K/k 为有限可分域扩张. 此时 $X(\alpha) = \operatorname{Hom}_k(K, \Omega_s)$. 于是同态 $\operatorname{Aut}_k(\Omega) \to \pi_1(S,\alpha)$ 分解为

$$\operatorname{Aut}_k(\Omega) \twoheadrightarrow \operatorname{Gal}(k_s/k) \longrightarrow \pi_1(S,\alpha).$$

设 $\{K_i/k \mid i \in I\}$ 为 k_s 内的所有有限 Galois 扩张, 则有 $\operatorname{Gal}(k_s/k) = \varprojlim \operatorname{Gal}(K_i/k)$. 另一方面, $F(\operatorname{Spec} K_i) \cong \operatorname{Hom}_k(K, k_s) = \operatorname{Gal}(K_i/K)$, 所以上面的同态 $\operatorname{Gal}(k_s/k) \to \pi_1(S,\alpha)$ 是同构的. 若 X 是具有连续的 $\pi = \operatorname{Gal}(k_s/k)$ 作用的有限集, 则我们以 $M_\pi(X, k_s)$ 记所有与 π 交换的映射 $X \to k_s$ 所组成的 k 代数. 在现在的假设下, 前面 Grothendieck 所证明的范畴等价 (见定理 2.2.1) $(\mathfrak{FEt}/S) \to (\text{F-}\pi\text{-}\mathfrak{Sets})$: $X \mapsto X(\alpha)$ 的逆函子是 $X \mapsto \operatorname{Spec}(M_\pi(X, k_s))$.

(2) 设 k 为特征零的代数封闭域. 令 $K = k((t))$ 为以 t 为变元的形式幂级数环的分式域, 即 $K = \{\sum_{n\geqslant n_0} a_n t^n \mid n_0 \in \mathbb{Z}, a_i \in k\}$. 则 K 是完备离散赋值域. 对于整数 $n \geqslant 1$, 令 $K_n = k((t^{\frac{1}{n}}))$, 则 K 的代数闭包是 $\bigcup K_n$ (见 [333] IV. Prop.8), 并且有群同构

$$\begin{aligned}\mathrm{Gal}(K_n/K) &\longrightarrow \mu_n\\ \sigma &\longmapsto \sigma(t^{\frac{1}{n}})/t^{\frac{1}{n}}.\end{aligned}$$

于是, 令 $X = \mathrm{Spec}\, K$, 就有

$$\pi_1(X,\alpha) = \varprojlim \mathrm{Gal}(K_n/K) = \varprojlim \mu_n \cong \hat{\mathbb{Z}}.$$

我们把这个 $X = \mathrm{Spec}\, K$ 比喻为通常拓扑学中平面上的有孔的圆盘 $\{(x,y) \mid 0 < x^2+y^2 < 1\}$.

2.2.5　有限étale 群概形

我们把等价 $(\mathfrak{FEt}/S) \to (\text{F-}\pi\text{-}\mathfrak{Sets})$, $\pi = \pi_1(S,\alpha)$ 应用到 étale 群概形的情形. 设 S 是 Noether 概形. 则函子 $G \mapsto S(\alpha)$ 决定一个从有限 étale S 群概形范畴到具有连续 $\pi_1(S,\alpha)$ 作用的有限群范畴的范畴等价. 利用这个等价立即得出

命题 2.2.2　如果有限 étale S 群 G 的阶 $[G:S] = n$, T 为任一 S 概形. 则任一 $x \in G(T)$ 均满足 $x^n = 1$.

设 k 是域. 则有限 étale k 群概形对应于具有 $\mathscr{G} = \mathrm{Gal}(k_s/k)$ 连续作用的交换有限群. 特别的情形是: 在有限交换群 M 上取平凡的 $\mathscr{G}$ 作用, 即知常值群概形是 étale. 其特例是 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_k$.

这里的 "连续" 的含义来自 $\mathscr{G}$ 的拓扑: $\mathscr{G}$ 可以写作 $\mathscr{G} = \varprojlim(\mathrm{Gal}(L/k))$, 其中 L 取遍 k 上的有限 Galois 扩张. $\mathscr{G}$ 在集合 X 上的作用是连续的是指存在子集的集合 $\{X_\alpha\}$ 使得 $X = \bigcup X_\alpha$, 并且存在有限 Galois 扩张 L_α/k 使得子群 $\mathrm{Gal}(\Omega_S/L_\alpha)$ 在 X_α 上的作用是平凡的.

2.2.6　Hensel 环

设 $(A,\mathfrak{m})$ 为局部环, 以 k 记剩余域 $A/\mathfrak{m}$. 同态 $A \to k$: $a \mapsto \overline{a}$ 决定多项式环的同态

$$\begin{aligned}A[T] &\longrightarrow k[T]\\ f(T) &\longmapsto \overline{f}[T],\end{aligned}$$

其中, 若 $f[T] = a_nT^n + \cdots + a_n$, 则 $\overline{f}[T] = \overline{a}_nT^n + \cdots + \overline{a}_n$.

我们称局部环 $(A,\mathfrak{m})$ 为 **Hensel 局部环** (henselian local ring), 如果以下条件成立: 对于任一 $f[T] = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_1T + a_0 \in A[T]$, 若 $\overline{f} = g_0h_0$,

其中 $g_0 = T^m + b_{m-1}T^{m-1} + \cdots + b_0 \in k[T]$, $g_0 = T^l + c_{l-1}T^{l-1} + \cdots + c_0 \in k[T]$, 则存在 g, $h \in A[T]$ 使得 $\overline{g} = g_0$, $\overline{h} = h_0$ 并且 $f = gh$.

域和完备离散赋值环都是 Hensel 局部环的例子.

我们称局部环 Hensel 局部环为**严格 Hensel 局部环** (strict henselian local ring), 如果其剩余域 $k = k_s$ (k_s 表示的 k 的可分闭包).

2.2.7　分歧群

设 R 为离散赋值环 (简记为 DVR), R 的特征为零, 其剩余域的特征为 $p > 0$. 设 K 为 R 的分式域, K_s 为 K 的可分闭包. 如果 R 为严格 Hensel 局部环, 则 $\mathrm{Gal}(K_s/K)$ 等于 K 的**惯性群** (inertia group) I.

强分歧群 (wildly ramified group) I_p 是 I 的投射 p 子群 (pro-p-subgroup). 有投射有限群 (profinite group) 的正合序列:

$$0 \longrightarrow I_p \longrightarrow \mathrm{Gal}(K_s/K) \longrightarrow I_t \longrightarrow 0.$$

I_t 称为**弱分歧群** (tamely ramified group), 其元素的阶与 p 互素.

我们解释一下这个正合序列. 对于每个与 p 互素的正整数 n, 在 K_s 内存在 K 的唯一的 n 次 Galois 扩张 K_n, 并且有同构

$$i_n : \mathrm{Gal}(K_n/K) \xrightarrow{\sim} \mu_n(K),$$

使得

$$\sigma(x') = x'(i_n(\sigma))^{v'(x')}(1 + u'), \qquad \forall\, x' \in K_n,\ \sigma \in \mathrm{Gal}(K_n/K),$$

其中 v' 为 K_n 上的正规化赋值, $u' \in K_n$ 满足 $v'(u') \geqslant 1$. 如果 $m \mid n$, 则有交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Gal}(K_n/K) & \xrightarrow{i_n} & \mu_n(K) & & \omega \\
\downarrow{\scriptstyle c} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{n,m}} & & \downarrow \\
\mathrm{Gal}(K_m/K) & \xrightarrow{i_m} & \mu_m(K) & & \omega^{n/m}
\end{array}$$

其中 c 为限制映射. 上面所说的 I_t 就对应于 $\varprojlim \mu_n(K)$.

以 k_q 记 k 内由 $q = p^n$ 个元素组成的子域, 则 $k_q^{\times} = \mu_{q-1}(k)$. 故可以把 I_t 与 $\varprojlim\limits_{q=p^n} k_q$ 等同. 这里的反向极限时关于范数映射 $\mathrm{Norm}_{k_{q'}/k_q} : k_{q'} \to k_q$ ($q' = q^{r'}$) 所取的: 对于 $x' \in k_{q'}$,

$$\mathrm{Norm}_{k_{q'}/k_q}(x') = x'^{(1+q+\cdots+q^{r'-1})} = x'^{(q^{r'}-1)/(q-1)} = x'^{(q'-1)/(q-1)}.$$

设 G 是交换 étale K 群概形. 设乘 p 是 G 的零映射. 则 G 的 K_s 点 $G(K_s)$ 是素域 $\mathbb{F}_p$ 上的有限维向量空间 V, 并且 Galois 群 $\mathrm{Gal}(K_s/K)$ 线性作用在 V 上. 反过来, 设 V 为 $\mathbb{F}_p$ 上有限维向量空间, 并且有表示 $\rho: \mathrm{Gal}(K_s/K) \to \mathrm{Aut}\ V$, 则存在满足以上条件的 G 使得 V 是 $G(K_s)$.

设 G 是 K 上的单群概形, 使得 ρ 是不可约表示. 因为 V 是 $\mathbb{F}_p$ 上的非零向量空间, 所以投射 p 子群 I_p 在 V 内的不变向量子空间 $V^{I_p} \neq \{0\}$ (见 [333] p.146), 并且 $\rho(V^{I_p}) \subseteq V^{I_p}$. 因为 ρ 不可约, 所以 $V = V^{I_p}$, 即 I_p 在 V 上的作用是平凡的. 也就是说 ρ 是弱分歧的.

我们应用 R 是严格 Hensel 环的假设, 则在表示 $\rho: I_t \to \mathrm{Aut}\ V$ 下 $\{\sigma \in \mathrm{Aut}\ V \mid \sigma\rho(\tau) = \rho(\tau)\sigma, \forall\, \tau \in I_t\}$ 是一个有限域 F. 因为 I_t 是交换群, 故必有 $\rho(I_t) \subset F$. 而 ρ 不可约, 故 V 是 F 上的一维向量空间.

现在 G 设交换有限 étale K 群概形, 并且存在正整数 m 使得乘 p^m 为的零映射. 设 G_i 为 G 的 Jordan-Hölder 合成列的因子. 则对每一个 i, 存在特征 p 的有限域 F_i, 使得对于 K 群概形 G_i, 有环同态 $F_i \to \mathrm{End}(G_i)$.

2.3 连通分支

2.3.1 基本概念

一个概形 X 的连通分支 U 是指: 当我们把 X 看作拓扑空间时, U 是 X 的连通分支.

称交换环 A 的元素 a 为幂等元, 如果 $a^2 = a$. 以 I 记 A 内的幂等元所组成的集合. $\mathrm{Spec}\,A$ 内所有既开又闭的子集组成的集合记为 C. 可以证明 $I \to C$: $a \mapsto \{\mathfrak{p} \mid a \in \mathfrak{p}\}$ 为双射. 于是知: $\mathrm{Spec}\,A$ 为连通的充要条件是 $I = \{0, 1\}$.

设 G 为域 k 上的群概形. 以 e 记单位态射 $\varepsilon: \mathrm{Spec}\,k \to C$ 的像中的唯一元素. 定义 G 的单位元连通分支 G^0 为概形 G 内包含单位元 e 的连通分支. 则 G^0 为的正规子群概形.

现在设 A 为局部 Artin 环, G 为 A 群概形. 假设 G 在 A 上是局部有限的. 像前面一样, G 的单位元 e 是指单位态射 $\varepsilon: \mathrm{Spec}\,k \to C$ 的像中的唯一元素. 以 G^0 记概形 G 内包含单位元 e 的连通分支. 则 G^0 为 G 的开子集. 在 G^0 上具有 G 所诱导的概形结构, 在此结构下 G^0 为 G 的开正规子群概形 (参见 $[147]_{\mathrm{I}}$ $\mathrm{VI_A}$, (2.3)).

像前面一样, 由群所组成的范畴记为 $\mathfrak{Gr}$. 设 S 为概形, G 为局部有限展示 S 群概形. 对于 $s \in S$, 以 $\kappa(s)$ 记 s 的剩余域, 以 G_s 记 $G \otimes_S \kappa(s)$, 即 G 在 s 上的

纤维 (这里的 $\otimes\kappa(s)$ 是指以 $\operatorname{Spec}\kappa(s)\to S$ 换基). 则 G_s 为域 $\kappa(s)$ 上的群概形. 因此可以定义 G_s 的单位元连通分支 G_s^0. 我们引进 S 群函子

$$G^0:\mathfrak{Sch}/S\longrightarrow\mathfrak{Gr}$$

如下：若有概形态射 $T\to S$, 则取

$$G^0(T)=\{u\in\operatorname{Hom}_S(T,G)\mid\forall\, s\in S, u_s(T_s)\subset G_s^0\}.$$

问题是：G^0 是否可表为群概形. 如果对任一 g 属于单位态射的像 $\varepsilon(S)$, G 在点 g 光滑 (lisse), 则函子 G^0 可以由的开正规子 S 群概形来表示 (参见 [147]$_{\mathrm{I}}$ $\mathrm{VI_B}$, (4.4)).

2.3.2 与 Hensel 局部环相关的连通分支

设 $(R,\mathfrak{m})$ 是 Hensel 局部环, 以 S 记 $\operatorname{Spec}R$. 设 A 是有限 R 代数, 则 $A=\prod_{i=1}^r A_i$, 其中 A_i 是 Hensel 局部 R 代数. 以 T 记 $\operatorname{Spec}A$, T_i 记 $\operatorname{Spec}A_i$, 则 $T=\coprod_{i=1}^r T_i$ (无交并), T_i 为 T 的开子概形. 因为 T_i 是连通的, 所以 T_i 是 T 的连通分支.

以 k 记剩余域 $R/\mathfrak{m}$, $s=\operatorname{Spec}(k)$ 为 $S=\operatorname{Spec}R$ 的闭点. 以 $\overline{k}$ 记 k 的一个代数闭包. 设 $\pi=\operatorname{Aut}_k(\overline{k})=\operatorname{Gal}(k_s/k)$ (k_s 是 k 的可分闭包). π 在 $\overline{k}$ 上的作用诱导出 π 在以下集合上的作用：

$$T(\alpha)=\operatorname{Hom}_{R\text{代数}}(A,\overline{k})=\coprod_i\operatorname{Hom}_k(k_i,\overline{k}),$$

其中 $k_i=\kappa(t_i)$, t_i 是 T_i 的闭点.

从有限 S 概形 T 到有限 π 集合的函子与取积及取无交并运算交换.

2.3.3 轨道与连通分支

命题 2.3.1 在以上的记号下有

(1) π 在 $T(\alpha)$ 上的作用的轨道是 $T_i(\alpha)$, 所以 T 是连通的当且仅当 π 在 $T(\alpha)$ 上只有一个轨道 (即 π 在 $T(\alpha)$ 上的作用是传递的), 这就是说把 T 写作它的连通分支的无交并等同于把 $T(\alpha)$ 写作 π 的轨道的并集.

(2) $T_i\times_S T_j$ 是连通的 当且仅当 $T_i(\alpha)$ 或 $T_j(\alpha)$ 只有一个点, 当且仅当 k_i/k 或 k_j/k 是纯不可分扩张.

(3) 闭纤维 $T_s=T\times_S\{s\}$ 的连通分支是 $\{T_i\}_s$.

2.3.4 有限平坦群概形的单位连通分支

命题 2.3.2 设 R 是 Hensel 局部环, 以 S 记 $\operatorname{Spec} R$. 设 G 为有限 S 群概形. 以 $\varepsilon: S \to G$ 记 G 的单位截面. 包含 $\varepsilon(S)$ 的 G 的连通分支记作 G^0. 则 G^0 为 G 的既开又闭的正规子群. 若 G 为有限平坦群概形, 则 G^0 亦为平坦群概形.

证明 像前面一样, 所谓 G 为 S 上的有限群概形是指 $G = \operatorname{Spec} A$, 其中 A 是有限 R 代数, 并且 $A = \prod_{i=1}^r A_i$, $\operatorname{Spec} A_i$ 为 G 的连通分支. 设 G^0 为 G_1. 因为 $S = \operatorname{Spec} R$ 是 $G^0 = \operatorname{Spec} A_1$ 的闭子概形, A_1 是 Hensel 局部 R 代数, 所以 S 与 G^0 的剩余域均是 k. 由命题 2.3.1 的 (2) 便知 $G_i \times_S G^0$ 是连通的. 在群运算 $\mu: G \times_S G \to G$ 下 $G_i \times_S G^0$ 映为连通集 G_iG^0, 但 $G_iG^0 \supseteq G_i\varepsilon(S) = G_i$, 所以 $G_iG^0 = G_i$. 于是 $G^0G^0 = G^0$. 又 $\varepsilon(S)$ 在求逆运算 $\iota: G \to G$ 下不变, 即有交换图

$$
\begin{array}{ccc}
G & \xrightarrow{\iota} & G \\
& {\scriptstyle\varepsilon}\nwarrow \quad \nearrow{\scriptstyle\varepsilon} & \\
& S &
\end{array}
$$

于是 $\iota G^0 = G^0$. 这样我们就证明了 G^0 是 G 的既开又闭的子群概形.

考虑映射

$$
\begin{aligned}
\psi: G \times_S G^0 &\longrightarrow G \\
(g, g^0) &\longmapsto g g^0 g^{-1}.
\end{aligned}
$$

由于 $G \times_S G^0 = \coprod G_i \times_S G^0$, 故对每一个 i, $\psi(G_i \times_S G^0)$ 是连通的并且包含 $\varepsilon(S)$. 所以 $\psi(G_i \times_S G^0) \subseteq G^0$. 这就是说 G^0 是 G 的正规子群.

G 是平坦 S 概形即 A 是平坦 R 代数, 所以 $G_i = \operatorname{Spec} A_i$ 是平坦 S 概形. 故 G^0 是平坦群概形. □

2.4 连通 étale 序列

2.4.1 单位截面的连通分支

定理 2.4.1 设 R 是 Hensel 局部环. 以 S 记 $\operatorname{Spec} R$. 设 G 为有限 S 群概形. 以 $\varepsilon: S \to G$ 记 G 的单位截面. 包含 $\varepsilon(S)$ 的 G 的连通分支记作 G^0. 则

(1) 存在 Hensel 局部 R 代数 A, 使得 A 与 R 的剩余域相同, 并且 $G^0 = \operatorname{Spec} A$.

(2) G^0 为 G 的闭子群概形. G^0 为 G 的平坦正规子群.

(3) 商群 G/G^0 存在 (记之为 G^{et}). G^{et} 为 étale S 群概形.

(4) 存在正合序列

$$0 \longrightarrow G^0 \longrightarrow G \xrightarrow{p} G^{\mathrm{et}} \longrightarrow 0.$$

称此序列为 G 的**连通 étale 序列** (connected étale sequence). 此序列由以下条件决定: 若有同态 $G \xrightarrow{\varphi} H$, 其中 H 为 étale S 群概形, 则 φ 的核包含 G^0, 并有同态 $G^{\mathrm{et}} \xrightarrow{\psi} H$ 使得 $\varphi = \psi \circ p$.

证明 由前一节命题 2.3.2 知 G^0 为 G 的有限平坦正规闭子群, 又根据有限群求商定理 (定理 1.9.1) 知, 存在商群概形 $G/G^0 = G^{\mathrm{et}}$. 因为 $G^0 = \operatorname{Spec} A$, 所以 $[G^0 : S]$ 取常值 $\operatorname{rank}_R A$. 因此从 $G \to S$ 有限平坦, 得知 $G^{\mathrm{et}} \to S$ 有限平坦, 并且有等式

$$[G : S] = [G^{\mathrm{et}} : S][G^0 : S].$$

由于 G^0 是 G 的开子概形, 单位截面 $G^0/G^0 = S$ 是 $G/G^0 = G^{\mathrm{et}}$ 的开子概形, 因此 $G^{\mathrm{et}} \to S$ 是 étale 态射 (用引理 2.1.1).

设 φ 是从一个连通 S 概形到一个 étale S 概形 H 的群同态, 则 φ 的像含于 H 的单位连通分支 H^0 内, 而 H 是 étale, 所以 H^0 等于单位截面, 故 φ 是平凡的. 于是, 若有 $\varphi : G \to H$, H étale, 则 $\operatorname{Ker} \varphi \supseteq G^0$. 因此有 $\psi : G/G^0 = G^{\mathrm{et}} \to H$ 使得下图交换. 定理 2.4.1 证毕. □

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & H \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle \psi} & \\ & G & \end{array}$$

同上, 设 R 是 Hensel 局部环, $\mathfrak{m}$ 是 R 的极大理想, $k = R/\mathfrak{m}$, $s = \operatorname{Spec} k$ 为 $S = \operatorname{Spec} R$ 的闭点. 则包含态射 $\{s\} \hookrightarrow S$ 诱导出群同构

$$\pi = \pi_1(\{s\}, \alpha) \longrightarrow \pi_1(S, \alpha),$$

其中 $\alpha : \operatorname{Spec} \bar{k} \to S$ 为 s 上的几何点, $\bar{k}$ 为 k 的代数闭包. 于是

$$\begin{aligned} (\mathfrak{FEt}/S) &\longrightarrow (\mathfrak{FEt}/S) \\ Y &\longmapsto Y_s \end{aligned}$$

是范畴等价, 所以有限 étale S 群概形 H 完全由有限 π 群 $H(\alpha)$ 唯一决定.

我们现在来考虑 $G^{\mathrm{et}}(\alpha)$. 由于 $G \to G^{\mathrm{et}}$ 是有限态射, 所以 $G(\alpha) \to G^{\mathrm{et}}(\alpha)$ 是满射. 另一方面 $\operatorname{Ker}(G(\alpha) \to G^{\mathrm{et}}(\alpha)) = G^0(\alpha)$ 只有一个元素, 所以 $G(\alpha) \to G^{\mathrm{et}}(\alpha)$ 是单射. 于是 $G(\alpha)$ 同构于 $G^{\mathrm{et}}(\alpha)$. 这就是说 G^{et} 由 π 群 $G(\alpha)$ 完全决定.

2.4.2　一些特殊情形

命题 2.4.2　设 R 是 Hensel 局部环, $\mathfrak{m}$ 是 R 的极大理想, $S = \operatorname{Spec} R$, G 为有限平坦 S 群概形.

(1) 如果 $R/\mathfrak{m}$ 的特征为 0, 则 $G^0 = S$, $G = G^{\mathrm{et}}$; 如果 $R/\mathfrak{m}$ 的特征为 $p > 0$, 则 G^0 的阶是 p 的方幂.

(2) 如果 $[G : S]$ 在 S 上可逆, 则 $G = G^{\mathrm{et}}$.

(3) 如果 $R = k$ 是域, $n = [G : S]$, 则对任意的 k 代数 B, 任一 $x \in G(B)$ 均满足 $x^n = 1$.

(4) 如果 $R = k$ 是完全域 (即 $R^p = R$), 则正合序列

$$0 \longrightarrow G^0 \longrightarrow G \rightleftarrows G^{\mathrm{et}} \longrightarrow 0$$

分裂, 并且有半直积 $G = G^0 \rtimes G^{\mathrm{et}}$.

注　域自然是 Hensel 局部环, 所以, 按 (2), 如果 k 是特征 0 的域, 则任一有限平坦 k 群概形必是 étale 群概形.

证明　(1) 我们可以假设 $G = G^0$, $R = k$ 是域.

先考虑 k 的特征为 0 的情形. 此时有 $G = \operatorname{Spec} A$, 其中 A 是有限维局部 k 代数. 则 Hopf 代数 A 的增广理想 I 是极大理想并且是幂零的, 而 k 的特征为 0, 所以分次代数 $\operatorname{gr}_I(A) = k$. 于是 $A = k$.

如前可假设 $G = G^0$ 和 $R = k$ 是域. 现在设 k 的特征为 $p > 0$. 设 $\dim_k(I/I^2) = r$, $x_1, \cdots, x_r \in I$ 使得 $\{x_i \mod I^2\}_{1 \leqslant i \leqslant r}$ 为 I/I^2 的基.

设 $B = A/(x_1^p, \cdots, x_r^p)$. 则 $H = \operatorname{Spec} B$ 为有限平坦群概形. H 的阶是 p^r. H 为 G 的正规子群概形.

因为域 k 上的有限维向量空间是平坦 k 模, 所以 G 的闭子群概形 H 是平坦的. 又因为 H 是相对 Frobenius 态射 $F_G : G \to G^{(p)}$ 的核, 所以 H 是 G 的正规子群.

假如 $r = 0$, 即有 $[G : k] = 1$, 则得 (2). 如果 $r > 0$, 则 $[H : k] = p^r > 1$. 而 $[G : k] = [H : k][(G/H) : k] = p^r[(G/H) : k]$, 对于 $[(G/H) : k]$ 用归纳假设即知 (1) 为真.

(2) 由 $[G : S]$ 在 S 上可逆知 $[G^0 : S] = 1$, 故 $G = G^{\mathrm{et}}$.

(3) 设 G, H, G/H 都是有限平坦群概形. 如果 H 和 G/H 满足 (3) 中所要证明的结论, 则 G 亦满足该结论. 而有限 étale 群概形已经满足该结论, 所以我们只需考虑连通群概形的情形, 即我们可以假定 $G = G^0$, $R = k$ 是域.

若域 k 特征为 0, 由本命题的结论 (1) 可推出 (3).

若域 k 的特征为 $p > 0$, 设 G 的阶为 $q = p^m$. 设 I 是 G 的增广理想, 则 $[p]I \subseteq I^p$. 重复应用这个事实, 我们得出 $[q]I \subseteq I^q$. 而 $G = \operatorname{Spec} A$ 的阶是 q, 所以局部环的合成列

$$R \supset I \supset I^2 \supset \cdots$$

的长度为 q. 于是 $I^q = 0$. 故 $[q]I = 0$.

G 的单位映射 $\operatorname{Spec} k \xrightarrow{\varepsilon} G$ 决定正合序列

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A \xrightarrow{e} k \longrightarrow 0.$$

这就是说 G 的单位元 1_G 可以看作 G 的闭子概形 $\operatorname{Spec}(A/I)$. 把 $G(B)$ 写成 $G(B) = A^* \otimes_R B$, 由此将 $f \in A$ 看作 $G(B)$ 的函数: $f(x) = \langle x, f\rangle$ $(x \in G(B))$. 于是有 $g(1_G) = 0$ $(\forall\, g \in I)$. 把 A 看作 $R{\cdot}1{+}I$. 由 $[q]I = 0$ 即得 $[q]f(x) = [0]f(x)$ $(\forall\, g \in I)$. 于是 $x^q = 1_G$.

(4) 设域 k 的特征为 $p > 0$, $G = \operatorname{Spec} A$ 是有限 k 群概形. 以 N 记 A 的幂零根, 则 $G_{\text{red}} = \operatorname{Spec}(A/N)$ 是约化概形. 由于我们假设 k 是完全域, 所以 $G_{\text{red}} \to \operatorname{Spec} k$ 是 étale.

我们从交换态射图 (参见 [142] (5.15))

$$\begin{array}{ccccc} G_{\text{red}} \times G_{\text{red}} & \hookrightarrow & G \times G & \longrightarrow & G \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & G_{\text{red}} & & \end{array}$$

得到 G_{red} 的 k 群结构. 以 $\alpha = \operatorname{Spec}(\overline{k})$ 记 $\operatorname{Spec} k$ 的几何点. 由同构 $G_{\text{red}} = G(\alpha) = G^{\text{et}}(\alpha)$ 即知图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & G^0 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G^{\text{et}} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \cup\uparrow & \nearrow_{\sigma} & & & \\ & & & & G_{\text{red}} & & & & \end{array}$$

中态射 σ 是同构. 于是得到半直积 $G \cong G^0 \rtimes G_{\text{red}}$. □

2.5 模 概 形

在本节我们设 R 是离散赋值环, K 是 R 的分式域, $\mathfrak{m}$ 是 R 的极大理想, π 是 $\mathfrak{m}$ 的生成元, $k = R/\mathfrak{m}$ 是剩余域. 我们假设 K 的特征是 0, k 的特征是 $p > 0$, v 是 R 的赋值, $v(\pi) = 1$, $e = v(p)$ 是绝对分歧指数.

2.5.1 Raynaud 模概形

固定一个基概形 S.

定义 2.5.1 给定环 F, 设 G 是一个交换 S 群概形. 如果有环同态 $F \to \operatorname{End} G$, 则称为 S 上的 F **模概形** (module scheme).

设 G 是 S 上的 F 模概形. 若 $T \to T'$ 为 S 概形态射, 则有 F 模同态 $G(T) \to G(T')$. 又若 $G = \operatorname{Spec} A$, 把 $t \in F$ 看作自同态 $t: G \to G$, 则 t 对应于 Hopf 代数自同态 $[t]: A \to A$. 对于任一 S 概形 T, $x \in G(T)$, $f \in A$, 则有

$$([t]f)(x) = f(tx).$$

设 F 为有限域, G 为 F 模概形. 如果 $|G| = |F|$, 则称 G 为 **Raynaud F 模概形** (Raynaud F-module scheme).

2.5.2 基本特征标

设 F 为含 q 个元素的有限域 ($q = p^r$), 以 $\mu = \mu_{q-1}(\overline{K})$ 记 K 的代数闭包 $\overline{K}$ 中的 $q-1$ 次单位根群. 令 $M = \operatorname{Hom}(F^\times, \mu)$. 对于 $\chi \in M$, 定义 $\chi(0) = 0$. 假设 $\mu \subset R$, $\chi \in M$. 如果

$$F \xrightarrow{\chi} R \longrightarrow k = R/\pi R$$

是域同态, 则称 χ 为基本特征标. 如果 χ 是一个基本特征标, 由于 F 是有限域, 所以任一基本特征标必然形如 χ^{p^i}, $0 \leqslant i < r$. 并且有 $\chi^{p^r} = \chi$. 所以基本特征标的集合可以写作 $\{\chi_i\}_{i \in \mathscr{I}}$, 其中指标集合 $\mathscr{I}$ 可以看作 $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ 上的齐性空间使得 $\chi_{i+1} = \chi_i^p$.

例如设 $R = \mathbb{Z}_p$ 为 p 进整数环. 设 $r = 1$, $F = Z/p\mathbb{Z}$. 对于 $\overline{a} \in F$, 取 $a \in \mathbb{Z}_p$ 使得在同态 $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 下 a 映为 $\overline{a}$. 定义

$$\chi(\overline{a}) = \lim_{n \to \infty} a^{p^n},$$

则 $\chi(F^\times) \subseteq \mu$ 并且 $F \xrightarrow{\chi} R \to k$ 是恒同同态. 这个 χ 常称为 **Teichmüller 特征标** (Teichmüller character). 它是基本特征标.

2.5.3 增广理想的分解

设 $G = \operatorname{Spec} A$ 是一个 Raynaud F 模概形. 由于 $|G| = |F|$, 所以 $G(\overline{K})$ 是一维 F 向量空间. $G(\overline{K})$ 所决定的常值群概形 $G(\overline{K})_{\overline{K}}$ 就是 $G_{\overline{K}} = \operatorname{Spec}(A \otimes_R \overline{K})$. 所以 $G_{\overline{K}}$ 在 F 上同构于常值群概形 $F_{\overline{K}}$. 这样就可以把 $A \otimes_R \overline{K}$ 看作 F 上的 $\overline{K}$ 值函数. 利用基本特征 $\{\chi_i\}_{i \in \mathscr{I}}$, F 上的 $\overline{K}$ 值函数环构成 $\overline{K}$ 向量空间, $\prod_{i \in \mathscr{I}} \chi_i^{\nu_i}$,

$0 \leqslant i \leqslant p-1$ 是它的一组 $\overline{K}$ 基 (即是 $A \otimes_R \overline{K}$ 的 $\overline{K}$ 基). 对于 $\chi \in M$, 定义 $A \otimes_R \overline{K}$ 的同态

$$i_\chi = \frac{1}{q-1} \sum_{s \in F^\times} \chi^{-1}(s)[s].$$

则 $i_\chi^2 = i_\chi$, 不同的 i_χ 两两正交, 并且 $i_\chi(I) \subset I$ (I 为 Hopf 代数 A 的增广理想). 因为 $R \supset \mu \cup \{1/(q-1)\}$, G 是 F 模, 所以有限交换群 $F^\times$ 作用在 I 上. 由这个作用我们得到

$$I = \bigoplus_{\chi \in M} I_\chi,$$

其中

$$I_\chi = i_\chi(I) = \{f \in I \mid [s]f = \chi(s)f, \ \forall\, s \in F^\times\}.$$

因为 $I_\chi \otimes \overline{K} = \overline{K}_\chi$, 所以 R 模 I_χ 的秩等于 1. 取 X_i 为 I_{χ_i} 的 R 基, 则 $X_i = c_i \chi_i$ (c_i 为 $\overline{K}^\times$ 的某个元素). 由 I_χ 的定义知 $I_\chi^p \subset I_{\chi^p}$. 又因为 $\chi_i^p = \chi_{i+1}$, 所以 $X_i^p = \delta_i X_{i+1}$, 其中 $\delta_i = c_i^p / c_{i+1} \in R$. 以 B 记由 X_i 所生成的 A 的 R 子代数. 则单项式

$$\prod_{i \in \mathscr{I}} X_i^{\nu_i} = \prod_{i \in \mathscr{I}} c_i^{\nu_i} \prod_{i \in \mathscr{I}} \chi_i^{\nu_i}$$

是 B 的基.

令 $A^* = \mathrm{Hom}_R(A, R)$, 把 $A^* \otimes \overline{K}$ 看作群代数 $\overline{K}[F]$, 对于 $s \in F$, 以 λ^s 记 $\overline{K}[F]$ 中对应于 s 的元素, 则 $\lambda^{s+t} = \lambda^s \lambda^t$, 并且对于 $f \in A$, 有 $\lambda^s(f) = f(s)$. 对于 $\chi \in M$, 令

$$e_\chi = \frac{1}{q-1} \sum_{s \in F} \chi^{-1}(s)(\lambda^s - 1) \in K[F].$$

则对于 $\chi_i, \chi_j \in M$, 有 $e_{\chi_i}(\chi_j) = \delta_{ij}$. 可以验证 Hopf 代数 $A^* \times \overline{K} = \overline{K}[F]$ 的增广理想以 $\{e_\chi\}_{\chi \in M}$ 为基.

现在取 $Y_i = c_i^{-1} e_{\chi_i}$. 则 $I_{\chi_i}^* = RY_i$, 并且存在 $\gamma_i \in R$ 使得 $Y_i^p = \gamma_i Y_{i+1}$. 设 $\chi = \prod \chi_i^{\nu_i}$, 其中 $0 \leqslant \nu_i \leqslant p-1$ 不全为 0. 则有 R 的元素 w_χ, w_i 使得

$$\Big(\prod Y_i^{\nu_i}\Big)\Big(\prod X_i^{\nu_i}\Big) = \Big(\prod e_{\chi_i}^{\nu_i}\Big)\Big(\prod X_i^{\nu_i}\Big) = \Big(\prod e_{\chi_i}^{\nu_i}\Big)(X) = w_\chi$$

和

$$\gamma_i \delta_i = Y_i^p(\chi_i^p) = e_{\chi_i}^p(\chi_{i+1}) = w_i.$$

在下一小节我们将证明 w_χ 在 R 中可逆. 于是

$$R[\{Y_i \mid i \in \mathscr{I}\}] = \{\lambda \in K[Y_i] \mid \langle \lambda, f \rangle \in R, \ \forall\, f \in R[\{X_i \mid i \in \mathscr{I}\}]\}.$$

由于 $R[X_i] \subset A$, $R[Y_i] \subset A^*$, 又有

$$A^* = \{\lambda \in A^* \otimes K \mid \langle \lambda, f\rangle \in R, \ \forall f \in A\},$$

所以 $A = R[\{X_i \mid i \in \mathscr{I}\}]$.

2.5.4 w_χ 和 w_i 的计算

我们来计算 w_χ.

我们以 $m: A \to A \otimes A$ 记 Hopf 代数的余乘法, 以 $p: A \otimes A \to A$ 记 A 的代数乘法. 对 $\chi', \chi'' \in M$, 有

$$m_{\chi', \chi''} : I_{\chi'\chi''} \longrightarrow I_{\chi'} \otimes I_{\chi''},$$

$$p_{\chi', \chi''} : I_{\chi'} \otimes I_{\chi''} \longrightarrow I_{\chi'\chi''}.$$

由于 I_χ 的 R 秩为 1, 所以存在 $w_{\chi', \chi''} \in R$ 使得 $I_{\chi'\chi''}$ 的自同态 $p_{\chi', \chi''} \circ m_{\chi', \chi''}$ 等于用 $w_{\chi', \chi''}$ 作乘法, 或写作

$$p_{\chi', \chi''} \circ m_{\chi', \chi''} = w_{\chi', \chi''}.$$

把 $F_R = \operatorname{Spec} A$ 看作 F 模, 则 $s \in F$ 决定一个同态 $[s]: A \to A$. 对于 $s, t \in F$, 由模的定义知

$$p \circ ([s] \otimes [t]) \circ m = [s+t].$$

所以对于 $\chi \in M$, $s, t \in F^\times$, 在 I_χ 上有

$$\chi(s+t) = \chi(s) + \chi(t) + \sum_{\chi'\chi''=\chi} \chi'(s)\chi''(t) w_{\chi', \chi''}.$$

这是因为对于 $f \in I_\chi$, 有 $m(f) = f \otimes 1 + 1 \otimes f + \sum f' \otimes f''$, 其中的求和是对于所有 $\chi'\chi'' = \chi$ 所作的, 而 $f' \in I_{\chi'}$, $f'' \in I_{\chi''}$.

固定 χ_1, χ_2 使得 $\chi_1\chi_2 = \chi$. 上式两端乘以 $\chi_1^{-1}(s)\chi_2^{-1}(t)$, 然后对 s, t 求和, 得

$$\sum_{s,t \in F^\times} \chi_1^{-1}(s)\chi_2^{-1}(t)\chi(s+t) = \sum_{s,t \in F^\times} (\chi_2(st^{-1}) + \chi_2(ts^{-1})) + (q-1)^2 w_{\chi_1, \chi_2}.$$

(注意 $|F^\times| = q - 1$ 以及在项 $\chi(s+t)$ 中只需取 $s + t \neq 0$.) 由

$$1 = \frac{s}{s+t} + \frac{t}{s+t},$$

可设 $s = ru$, $t = rv$, $u + v = 1$, $r \in F^\times$, 则得

$$(q-1)w_{\chi_1,\chi_2} = \sum_{u+v=1} \chi_1^{-1}(u)\chi_2^{-1}(v) - \sum_{g\in F^\times} (\chi_1(g) + \chi_2(g)).$$

我们分三种情形来计算 w_{χ_1,χ_2}.

(1) $\chi_1 \neq 1 \neq \chi_2$. 则

$$\begin{aligned} w_{\chi_1,\chi_2} &= \frac{1}{q-1} \sum_{u+v=1} \chi_1^{-1}(u)\chi_2^{-1}(v) \\ &= \frac{(\chi_1\chi_2)(-1)}{q-1} \sum_{u+v+1=0} \chi_1^{-1}(u)\chi_2^{-1}(v) \\ &= \frac{(\chi_1\chi_2)(-1)}{q-1} J(\chi_1^{-1}, \chi_2^{-1}), \end{aligned}$$

其中 J 是 Jacobi 和: $J(\chi', \chi'') = \sum_{u+v+1=0} \chi'(u)\chi''(v)$.

(2) $\chi_1 = 1$, $\chi_2 = \chi \neq 1$. 则

$$w_{1,\chi} = w_{\chi,1} = \frac{1}{q-1}\Big(\sum_{u+v=1,\ u\neq o} \chi^{-1}(v) - (q-1)\Big) = -\frac{q}{q-1}.$$

(3) $\chi_1 = \chi_2 = 1$. 则

$$w_{1,1} = \frac{1}{q-1}(q-2-2(q-1)) = -\frac{q}{q-1}.$$

考虑由有限域 F 所定义的常值 R 概形 F_R. 同上, $F_R = \operatorname{Spec} A$. 把 A 看作 F 上的 R 值函数环. 对于 $a \in F$, 以 ε_a 记集合 $\{a\}$ 的特征函数. 则 $\{\varepsilon_a \mid a \in F\}$ 为 R 模 A 的基. 我们有 $\varepsilon_a^2 = \varepsilon_a$, $\varepsilon_a\varepsilon_b = 0$ $(a \neq b)$. Hopf 代数的余乘法是

$$m(\varepsilon_a) = \sum_{a'+a''=a} \varepsilon_{a'} \otimes \varepsilon_{a''},$$

而且 $\{\varepsilon_a \mid a \neq 0\}$ 生成增广理想 I. 由 $t \in F^\times$ 所决定的同态 $[t]: A \to A$ 把 ε_a 映为 $\varepsilon_{t^{-1}a}$.

M 由乘性群同态 $\chi: F^\times \to \mu_{q-1} \subset R$ 所组成. 于是 I 由 $\varepsilon_\chi := \sum_{a\in F} \chi(a)\varepsilon_a$ 所生成. 易见

$$\varepsilon_{\chi'}\varepsilon_{\chi''} = \varepsilon_{\chi'\chi''}, \tag{2.1}$$

$$m(\varepsilon_\chi) = \varepsilon_\chi \otimes 1 + 1 \otimes \varepsilon_\chi + \sum_{\chi'\chi''=\chi} w_{\chi',\chi''}\varepsilon_{\chi'} \otimes \varepsilon_{\chi''}. \tag{2.2}$$

常值 R 群概形 F_R 的 Cartier 对偶 $D(F)_R = \operatorname{Spec} A^*$, 其中 $A^* = \operatorname{Hom}_{R模}(A,R)$. 我们以 $\{\lambda^a \mid a \in F\}$ 记 R 模 A^* 的基, 则 $\lambda^a\lambda^b = \lambda^{a+b}$, $m(\lambda^a) = \lambda^a \otimes \lambda^b$, $\lambda^a(\varepsilon_b) = \delta_{ab}$. Hopf 代数 A^* 的增广理想 $I^* = \{\sum r_a\lambda^a \mid \sum r_a = 0\}$.

对于 $t \in F$, 有同态 $[t]^* : A^* \to A^*$, 其定义为 $[t]^*(\lambda^a) = \lambda^{ta}$. Hopf 代数 A^* 的增广理想 I^* 内的 I^*_χ 的生成元是 $e_\chi = \sum \chi^{-1}(a)\lambda^a$ (当 $\chi \neq 1$) 或 $e_1 = \sum \lambda^a - \lambda^0$ (当 $\chi = 1$). I^* 的基 $\{e_\chi\}$ 对偶于 I 的基 $\{(q-1)\varepsilon_\chi\}$. 于是由上面的 (2.1)、(2.2) 式得到

$$e_{\chi'}e_{\chi''} = (q-1)w_{\chi',\chi''}e_{\chi'\chi''}, \tag{2.3}$$

$$m^*(e_\chi) = e_\chi \otimes 1 + 1 \otimes e_\chi + \frac{1}{q-1}\sum_{\chi'\chi''=\chi} e_{\chi'} \otimes e_{\chi''}. \tag{2.4}$$

设 ζ 为一个 p 次本原单位根. 令 $\widetilde{R} = R[\zeta]$. 取定一个加性同态 $\psi:\ F^+ \to \boldsymbol{\mu}_p(\widetilde{R})$. 考虑 F 模概形的 R 态射

$$\begin{aligned} F_{\widetilde{R}} &\longrightarrow D(F)_{\widetilde{R}} \\ a &\longmapsto a\psi, \end{aligned}$$

在这里我们把 $a\psi:\ F \to \mu_p(\tilde{D}) \subset \tilde{D}^\times$ 看作 $D(F)_{\widetilde{R}}(R) = \operatorname{Hom}_{\mathfrak{Gr}}(F, \tilde{D}^\times)$ 的元素. 对应于此态射的代数同态是

$$\begin{aligned} A^* \otimes_R \widetilde{R} &\xrightarrow{u} A \otimes_R \widetilde{R} \\ \lambda^a &\longmapsto \sum_{t\in F}\psi(ta)\varepsilon_\lambda. \end{aligned}$$

于是有 $u(e_\chi) = g(\chi)\varepsilon_\chi$, 其中 g 是 Gauss 和:

$$\begin{aligned} g(1) &= -q, \\ g(\chi) &= \sum_{a\in F}\chi^{-1}(a)\psi(a), \qquad \chi \neq 1. \end{aligned} \tag{2.5}$$

从公式 (2.2)、(2.4) 得出

$$w_{\chi',\chi''} = \frac{1}{q-1}\frac{g(\chi')g(\chi'')}{g(\chi'\chi'')}. \tag{2.6}$$

对于 $\chi_1, \cdots, \chi_n \in M$, 利用 Hopf 代数的代数乘法及余乘法可以定义:

$$p_{\chi_1,\cdots,\chi_n}:\ I_{\chi_1} \otimes \cdots \otimes I_{\chi_n} \longrightarrow I_{\chi_1\cdots\chi_n},$$

$$m_{\chi_1,\cdots,\chi_n}:\ I_{\chi_1\cdots\chi_n} \longrightarrow I_{\chi_1} \otimes \cdots \otimes I_{\chi_n}.$$

则 $p_{\chi_1,\cdots,\chi_n}\circ m_{\chi_1,\cdots,\chi_n}$ 等于用元素 $w_{\chi_1,\cdots,\chi_n}$ 作乘法. 由乘法和余乘法的结合律可得

$$p_{\chi'_1,\cdots,\chi'_n,\chi''_1,\cdots,\chi''_n}=p_{\chi'_1\cdots\chi'_n,\chi''_1\cdots\chi''_n}\circ(p_{\chi'_1,\cdots,\chi'_n}\otimes p_{\chi''_1,\cdots,\chi''_n}),$$

$$m_{\chi'_1,\cdots,\chi'_n,\chi''_1,\cdots,\chi''_n}=(m_{\chi'_1,\cdots,\chi'_n}\otimes m_{\chi''_1,\cdots,\chi''_n})\circ m_{\chi'_1\cdots\chi'_n,\chi''_1\cdots\chi''_n}.$$

于是由 (2.6) 式得到相应的

$$w_{\chi_1,\cdots,\chi_n}=\frac{1}{(q-1)^{n-1}}\frac{g(\chi_1)\cdots g(\chi_n)}{g(\chi_1\cdots\chi_n)}. \tag{2.7}$$

因为 $g(\chi)g(\chi^{-1})=q\chi(-1)$ 对于任意的 $\chi\neq 1$ 成立, 所以有

$$w_{\chi_1,\cdots,\chi_n}w_{\chi_1^{-1},\cdots,\chi_n^{-1}}=\left(\frac{q}{(q-1)^2}\right)^{n-1}. \tag{2.8}$$

设 $\eta:\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\to\mu_p(\widetilde{R})$ 为非平凡特征标, 令前面的加性同态 $\psi=\eta\circ\mathrm{tr}$, 其中 $\mathrm{tr}: F\to\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 为迹映射. 则 Gauss 和有性质 $g(\chi^p)=g(\chi)$. 于是我们得到

$$w_{\chi_1^p,\cdots,\chi_n^p}=w_{\chi_1,\cdots,\chi_n}. \tag{2.9}$$

以 C 记有理数域 $\mathbb{Q}$ 的代数闭包 $\overline{\mathbb{Q}}$ 内在 $\mathbb{Q}$ 上添加 $(q-1)$ 次单位根所得到的扩域 $(q=p^r)$, 以 $\mathscr{F}r$ 记 $\mathrm{Gal}(C/\mathbb{Q})$ 中在 p 处的 Frobenius 元. 令 $R_1=\{x\in\widetilde{R}\mid\mathscr{F}r(x)=x\}$. 由 (2.9) 式即知 $w_{\chi_1,\cdots,\chi_n}\in R_1$.

现在设 $\chi=\prod_{i=1}^{l}\chi_i^{\nu_i}$, 其中 l 为基本特征标的个数, χ_i 为基本特征标, $0\leqslant\nu_i\leqslant p-1$. 以 w_χ 记 $w_{\underbrace{\chi_1,\cdots,\chi_1}_{\nu_1\text{个}},\cdots,\underbrace{\chi_l,\cdots,\chi_l}_{\nu_l\text{个}}}$, 又以 w_i 记 $w_{\underbrace{\chi_i,\cdots,\chi_i}_{p\text{个}}}$ (这里的 w_χ 和 w_i 与上一小节末尾所定义的相同). 由 (2.9) 式知 w_i 与 i 无关, 我们以 w 记 w_i 的公共值. 由 (2.8) 式得知 w_χ 和 w 在局部环 $(R_1)_{(p)}$ 中可逆.

设 $k=R/\pi R$ 为剩余域. 域 F 在概形上 $D(F)_R$ 的作用把增广理想 I^* 映入 I^*, 所以 F 作用在 I^*/I^{*2} 上, 也就作用在 $\mathrm{Hom}_R(I^*/I^{*2},k)$ 上.

另一方面, 对于任一 R 概形 T, 有 $D(F)_R(T)=\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Gr}}(F^+,\Gamma(T,\mathscr{O}_T^\times))$. 取 T 为 $k[\varepsilon]/\varepsilon^2$, 我们便得到 $\mathrm{Hom}_R(I^*/I^{*2},k)=\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Gr}}(F^+,k^+)$.

现在加进 F 模结构. 如果 $h: F^+\to k^+$ 是群同态, 则 $h(1)=1$, 并且 h 为 F^+ 作用下的特征向量当且仅当 h 是乘性的. 亦即 $h: F\to k$ 为域同态. 于是 $F^\times$ 在 $\mathrm{Hom}_R(I^*/I^{*2},k)$ 上 (从而在 I^*/I^{*2} 上) 的作用的特征标是基本特征标 χ_i. 这就是说: 令 e_i 为 e_{χ_i}, $\bar{e}_i$ 为 e_i 在 I^*/I^{*2} 中的像, 则 $\{\bar{e}_i\}$ 为 $I^*/I^{*2}\otimes_R k$ 的基. 因为 $D(F)_R\otimes_R k$ 同构于 μ_p^l, 所以 k 代数 $A^*\otimes_R k$ 以 $\{\bar{e}_i\}$ 为生成元, 并且满足条件 $(\bar{e}_i)^p=0$ (参见 [147] XVII, Appendice II).

以上的讨论说明

$$\prod e_i^{\nu_i} \not\equiv 0 \mod p, \qquad e_i^p \equiv 0 \mod p.$$

与 (2.3) 式比较我们得知 w_χ 在 R_1 内可逆以及 $w \equiv 0 \mod p$.

下一步我们考虑这样的 $\chi' = \prod \chi_i^{\nu_i'}$, $\chi'' = \prod \chi_i^{\nu_i''}$, 它们满足条件 $\chi' \neq 1 \neq \chi''$, $\chi'\chi'' = \chi_i$. 所以存在 j 使得 $\nu_j' + \nu_j'' \geqslant p$. 在 $A^* \otimes_R k$ 中有 $(\overline{e}_k)^p = 0$. 由 (2.3) 即知 $w_{\chi',\chi''} \equiv 0 \mod p$. 于是由 (2.2) 即得

$$m(\varepsilon_{\chi_i}) \equiv 1 \otimes \varepsilon_{\chi_i} + \varepsilon_{\chi_i} \otimes 1 \mod p.$$

重复作 n 次余乘法, 有

$$m_n: A \longrightarrow \underbrace{A \otimes \cdots \otimes A}_{n+1\text{次}},$$

则有

$$m_n(\varepsilon_{\chi_i}) \equiv \varepsilon_{\chi_i} \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 + \cdots + 1 \otimes \cdots \otimes \varepsilon_{\chi_i} \mod p. \tag{2.10}$$

同上, 设 $\chi = \prod_{i=1}^l \chi_i^{\nu_i}$. 取 $n = \sum \nu_i$. 因为 m_n 是代数同态, 由 (2.10) 式即知 $m_n(\varepsilon_\chi) = m_n\left(\prod_{i=1}^l \varepsilon_{\chi_i}^{\nu_i}\right)$ 的展开式中 $\varepsilon_{\chi_1}^{\otimes\nu_1} \otimes \cdots \varepsilon_{\chi_l}^{\otimes\nu_l}$ 的系数 $\equiv \nu_1! \cdots \nu_l! \mod p$. 另一方面, 由 (2.1) 式以及 w_χ 的定义, 此系数又等于 w_χ. 于是得到

$$w_\chi \equiv \nu_1! \cdots \nu_l! \mod p.$$

同样计算 $m_p(\varepsilon_{\chi_i}^p)$ 的展开式中 $\varepsilon_{\chi_i}^{\otimes p}$ 的系数, 得出

$$w \equiv p! \mod p.$$

由于 $(p-1)! \equiv -1 \mod p$, 我们得知 $w = pv$, 其中 v 为 R_1 中的可逆元, 并且 $v \equiv -1 \mod p$.

2.5.5 Raynaud-Oort-Tate 公式

定理 2.5.1 假设 $\mu \subset R$. 设 $\{\chi_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ 为有限域 F 的基本特征标集合.

(1) 设 R 中存在一组元素 $\{\delta_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ 满足 $0 \leqslant v(\delta_i) \leqslant e(= v(p))$. 令 $A = R[\{X_i \mid i \in \mathscr{I}\}]/(\{X_i^p - \delta_i X_{i+1} \mid i \in \mathscr{I}\})$. 则在 $G = \operatorname{Spec} A$ 上存在唯一的 F 模结构使得 $[s]X_i = \chi_i(s)X_i \ \forall\, i \in \mathscr{I}$, $s \in F$, 并且 G 是 Raynaud F 模概形.

(2) R 上的任一 Raynaud F 模概形必形如 (1) 所述.

(3) 设 Raynaud F 模概形 $G = \operatorname{Spec} A$ 和 $G' = \operatorname{Spec} A'$ 分别由 $X_i^p = \delta_i X_{i+1}$ 和 $X_i'^p = \delta_i' X_{i+1}'$ 决定, 则有 F 模概形同态, 它对应于 $A \to A'$: $X_i \mapsto a_i X_i'$, 其中 $\{a_i\}_{i\in\mathscr{I}} \subset R$ 满足条件 $a_{i+1}\delta_i = a_i^p \delta_i'$.

证明

(1) 对于 $j \in \mathscr{I}$, 令

$$\Delta_j = \prod_{k=0}^{r-1} \delta_{j-i-k}^{p^k},$$

$$\overline{K}_{(j)} = \{x \in \overline{K} \mid x^q = \Delta_j x\}.$$

则 $G(\overline{K}) \to \overline{K}_{(j)}$ $P \mapsto X_j(P)$ 是双射. 由此可见 $G(\overline{K})$ 有唯一的 1 维 F 向量空间结构使得

$$X_j(sP) = \chi_j(s)X_j(P), \qquad \forall\ s \in F,\ \ P \in G(\overline{K}).$$

取 $0 \neq P \in G(\overline{K})$. 设 $c_i = X_i(P)$. 引入同态

$$\varphi : \mathscr{G} = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \longrightarrow F^{\times},$$

使得 $\chi(\varphi(\sigma)) = c_i^{\sigma-1}$. 这样便得到 $\mathscr{G}$ 在 1 维 F 向量空间 $G(\overline{K})$ 上的作用. 由 $G = \mathrm{Spec}\, A$, 利用同构 $F \to G(\overline{K})$: $s \mapsto sP$ 把 A 看作 F 上的函数, 即 $X_i \in A$ 对应于 $c_i\chi_i$. 由 F 所决定的常值 $\overline{K}$ 群概形 $F_{\overline{K}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}^F \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{K})$. 可以同前面 2.5.3 节中一样验证: 在代数余乘法 $m : (\mathbb{Z}^F \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{K}) \to (\mathbb{Z}^F \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{K}) \otimes (\mathbb{Z}^F \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{K})$ 下 A 映入 $A \otimes A$. 这样就证明了 G 是群概形.

(2) 见 2.5.3 节.

(3) 直接验证即可. □

2.6 拓 展

像上节一样, 在本节我们仍然设 R 是离散赋值环, K 是 R 的分式域, $\mathfrak{m}$ 是 R 的极大理想, π 是 $\mathfrak{m}$ 的生成元, $k = R/\mathfrak{m}$ 是剩余域. 我们假设 K 的特征是 0, k 的特征是 $p > 0$, v 是 R 的赋值, $v(\pi) = 1$, $e = v(p)$ 是绝对分歧指数.

2.6.1 提升与拓展

我们将 $\mathrm{Spec}\, R$ 上的概形简称为 R 概形. 设 X 为 R 概形. 通过包含映射 $R \hookrightarrow K$ 换基所得的 K 概形 X_K 称为 X 的**一般纤维** (generic fibre), 通过投射 $R \to k$ 换基所得的 k 概形 X_k 称为 X 的**闭纤维** (closed fibre).

在数论中经常出现以下两个问题:

(1) 对于给定的 k 的概形 X_1, 求平坦 R 概形 X, 使得 $X_k \cong X_1$. 此时我们说 X_1 **提升** (lift) 至 R, 又说 X 是 X_1 的**形变** (deformation), 也有的说 X 是 X_1 在 R 上的**模型** (model).

(2) 对于给定的 K 的概形 X_0, 求平坦 R 概形 X, 使得 $X_K \cong X_0$. 此时我们说 X 是 X_0 至 R 的**拓展** (prolongation).

设 X 为有限型 R 概形, $X_K = X \otimes_R K$ 为它的一般纤维, Y_0 为 X_K 的闭子概形. 我们称 X 内包含 Y_0 的最小闭子概形 Y 为 Y_0 在 X 内的**概形闭包** (schematic closure). 因为 Y_0 是 X 的闭子概形, 所以 $Y_0 = Y \otimes_R K$. 设 $U = \operatorname{Spec} A$ 为 X 的仿射开子概形, 使得 $X_K \cap U = U_0 = \operatorname{Spec} A_0$ $(A_0 = A \otimes_R K)$. 如果 $Y_0 \cap U_0 = \operatorname{Spec}(A_0/I_0)$, 其中 I_0 为 A_0 的理想, 则 $Y \cap U = \operatorname{Spec}(A/I)$, 其中 I 为 I_0 在映射 $A \to A \otimes_R K$ 下的逆像. 因此 $A/I \to A_0/I_0$ 是单射, 所以 A/I 是无扭的, 并且 Y 在 R 上平坦. 由此得到结论：概形闭包的构作与在 R 上取纤维可交换. 于是, 如果 X 是 R 群概形, Y_0 是 X_K 的子群概形, 则 Y 是 X 的闭子群概形, Y 在 R 上平坦. 进一步, 如果 X 在 R 上有限, 则 Y 亦有限, 并且对于 fppf 拓扑, 商 X/Y 可由 R 上的有限概形所表示.

2.6.2　群概形的拓展

设 $G_0 = \operatorname{Spec} A_0$ 是交换有限 K 群概形. G_0 至 R 的**拓展** (prolongation) 是指一个交换有限平坦 R 群概形 G 使得 $G_K \cong G_0$. 此时 G 必同构于 $\operatorname{Spec} A$, 其中 A 是 A_0 的某个有限 R 子代数, 满足 $A \otimes_R K = A_0$ 并且 A_0 的 Hopf 代数结构诱导出 A 的 Hopf 代数结构. 如果 G_0 是单群 (即 $G(\overline{K})$ 是单 $\operatorname{Gal}(\overline{K}/K)$ 模), 则我们称 G 是**单群** (simple group).

令 $A_0^* = \operatorname{Hom}_K(A_0, K)$, $G_0^* = \operatorname{Spec}(A_0^*)$ 为 G_0 的 Cartier 对偶. 设

$$A^* = \{\lambda \in A_0^* \mid \lambda(f) \in R, \forall\, f \in A\}.$$

则 $A^* \cong \operatorname{Hom}_{R模}(A, R)$. Hopf 代数 A_0 的余乘法 $m: A_0 \to A_0 \otimes_K A_0$ 在 A 上诱导出 Hopf 代数的条件是 $m(A) \subset A \otimes_R A$. 这个条件等价于 $A^* \supset A^*A^*$ (用 m^* 作乘法). 于是我们得到下面的引理.

2.6.3　Hopf 代数拓展的充要条件

引理 2.6.1　设 A_0 为交换 Hopf K 代数, A 为 A_0 的有限 R 子模, 满足 $A \supset R$ 及 $A \otimes_R K = A_0$. 则 $\operatorname{Spec} A$ 为 $\operatorname{Spec} A_0$ 至 R 的拓展的充要条件是 $A \supset A \cdot A$ (代数的乘法) 及 $A^* \supset A^*A^*$ (用 m^* 作乘法).

2.6.4　拓展的界

设 $G'' = \operatorname{Spec} A''$、$G' = \operatorname{Spec} A'$ 为 G_0 至 R 的两个拓展. 如果存在 G_0 态射 $G'' \to G'$ (即 $A'' \supset A'$), 则我们记 $G'' \geqslant G'$.

设 $G_i = \operatorname{Spec} A_i$ $(i=1,2)$ 为 $G_0 = \operatorname{Spec} A_0$ 至 R 的两个拓展. 令 A 为 A_1 和 A_2 生成的 R 代数, 则 $m(A) = m(A_1)m(A_2) \subset (A_1 \otimes A_1)(A_2 \otimes A_2) = A_1A_2 \otimes A_1A_2 = A \otimes A$. 所以 $G = \operatorname{Spec} A$ 是 G_0 的拓展中 G_1 和 G_2 的最小上界, 即 $G = \sup(G_1, G_2)$. 应用 Cartier 对偶则得最大下界 $\inf(G_1, G_2) = (\sup(G_1^*, G_2^*))^*$.

我们称 K 代数 A_0 的一个子环 B 为 A_0 的**阶** (order), 如果 $B \supset R$ 并且 $B \otimes_R K = A_0$. 因为 K 的特征为 0, 故 G_0 是 étale (即 A_0 是可分 K 代数), 所以 R 在 A_0 内的整闭包 (integral closure) 是 A_0 的极大阶. 由于决定 $G_0 = \operatorname{Spec} A_0$ 的拓展 $G = \operatorname{Spec} A$ 的环 A 必是 A_0 的阶, 所以从上面的讨论可以推出下面的引理.

2.6.5 极大与极小拓展

引理 2.6.2 如果存在 G_0 的拓展, 则 G_0 必有极大拓展 G^+ 和极小拓展 G^-.

2.6.6 G_0 的合成列

命题 2.6.3 设 G 为 G_0 的拓展. 又设 $\{G_0^{(j)}\}_{0 \leqslant j \leqslant n}$ 是 G_0 的合成列 (即 $G_0^{(j)}/G_0^{(j-1)}$ 是非零单群). 则

(1) 存在 $G_0^{(j)}$ 的唯一拓展 $G^{(j)}$ 使得 $G_0^{(j)} \subset G_0^{(j+1)}$ 诱导出 $G^{(j)} \subset G^{(j+1)}$. 进而言之, $G^{(j+1)}/G^{(j)}$ 是 $G_0^{(j+1)}/G_0^{(j)}$ 的拓展.

(2) 设又有 G_0 的拓展 H 使得 $G \geqslant H$, 则 $G^{(j+1)}/G^{(j)} \geqslant H^{(j+1)}/H^{(j)}$. 如果 $G^{(j+1)}/G^{(j)} = H^{(j+1)}/H^{(j)}$ $(\forall\, j)$, 则 $G = H$.

证明 (0) 我们首先考虑一个基本的情形. 设有限 K 群概形的正合序列

$$0 \longrightarrow G_0' \longrightarrow G_0 \longrightarrow G_0'' \longrightarrow 0$$

来自于 K 代数序列

$$A_0' \twoheadleftarrow A_0 \hookleftarrow A_0''.$$

设 $G = \operatorname{Spec} A$ 是 G_0 的拓展. 设 A' 为 A 在 A_0' 中的像, 则 $G' = \operatorname{Spec} A'$ 是 G_0' 的唯一拓展使得 $G_0' \hookrightarrow G_0$ 诱导出 $G' \hookrightarrow G$, 并且 $G'' := G/G'$ 是 $G_0'' := G_0/G_0'$ 的拓展.

(1) 用 (0) 对的 G 阶作归纳即可证明结论 (1).

(2) 对合成列的长度 n 做归纳可以将 (2) 化为 $n = 2$ 的情形. 此时有图:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & G^{(1)} & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G/G^{(1)} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H^{(1)} & \longrightarrow & H & \longrightarrow & H/H^{(1)} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

其中行为正合序列我们需要证明的是：如果左、右的竖直态射为同构，则中间的竖直态射亦为同构. 这可以从以下的事实推出：有限平坦 R 群概形范畴是 $\operatorname{Spec} R$ 上的交换层范畴的全子范畴.

2.6.7 拓展作为 Raynaud 模概形

设 G_0 是交换有限 K 群概形, $\overline{K}$ 是 K 的一个代数闭包, $\mathscr{G}$ 是 Galois 群 $\operatorname{Gal}(\overline{K}/K)$. 则 G_0 完全由 $\mathscr{G}$ 模 $G_0(\overline{K})$ 所决定 (见 2.2 节).

命题 2.6.4 设 G_0 是交换有限 K 群概形, $G_0(\overline{K})$ 是单 $\mathscr{G}$ 模. 又设有交换群 $\mathscr{G}_t$ 和满同态 $\mathscr{G} \twoheadrightarrow \mathscr{G}_t$ 使得 $\mathscr{G}$ 在 $G_0(\overline{K})$ 上的作用可分解:

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{G} & \longrightarrow & \operatorname{Aut}(G_0(\overline{K})) \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & \mathscr{G}_t & \end{array}$$

如果 G 是 G_0 的拓展, 则 $\operatorname{End}(G_0) = \operatorname{End}(G^+) = \operatorname{End}(G^-)$ 是有限域. 将此有限域记为 F, 则 G、G^+、G^- 均是 Raynaud F 模概形.

2.6.8 拓展 G_0 的充要条件

命题 2.6.5 设 F 是有限域, $|F| = q$, $q = p^r$. 令 $\mu = \mu_{q-1}(\overline{K})$. 设 $\chi_i : F^\times \to \mu$ 是基本特征标. 设 G_0 是 K 上的 Raynaud F 模概形. 设 $\mathscr{G} = \operatorname{Gal}(\overline{K}/K)$ 在 $G_0(\overline{K})$ 上的作用决定的特征标为 $\varphi : \mathscr{G} \to F^\times$, 则存在 G_0 至 R 的拓展 G 的充要条件是: 存在 $\Delta \in K^\times$ 满足 $v(\Delta) = \sum_{k=0}^{r-1} n_k p^k$ (n_k 是 $0 \leqslant n_k < e$ 的整数), 使得

$$\chi_i(\varphi(\sigma)) = (\Delta^{\frac{1}{q-1}})^{\sigma - 1}.$$

证明 如有必要可以用 G^+ 代替 G. 于是可以假设 G 是 R 上的 Raynaud F 模概形. 由 Raynaud 定理知 G 由方程 $X_i^p = \delta_i X_{i+1}$ 所决定. 对于 $P \in G(\overline{K})$, 令 $x_i = X_i(P)$. 由 $x_i^p = \delta_i x_{i+1}$ 得到 $x_i^q = \Delta_i x_i$, 其中 $\Delta_i = \prod_{k=0}^{r-1} \delta_{i-1-k}^{p^k}$. 取 $P \neq 0$, 则 $x_i \neq 0$, 于是 $x_i^{q-1} = \Delta_i$. 另外, $x_i^\sigma = \chi_i(\varphi(\sigma)) x_i$ (其中 $\sigma \in \mathscr{G}$), 所以 $\Delta = \Delta_i$ 满足命题的要求. □

2.6.9 一般纤维的拓展

命题 2.6.6 假设 $e < p - 1$. 设 G 是交换平坦 R 群概形, $|G| = q = p^r$. 则除同构外, G 是一般纤维 G_K 的唯一拓展.

证明 假若 G 不是唯一的, 则 $G^+ > G^-$. 基环扩张不改变这个不等式. 所以可设 R 是严格 Hensel 局部环. 设 $\mathscr{P}$ 是 $\mathscr{G}$ 的子群, 它的不动域是 K 的极大弱分歧扩张, 则 $\mathscr{G}/\mathscr{P}$ 是交换群. 因为 $|G| = p^r$, 所以如果 $G(\overline{K})$ 是单 $\mathscr{G}$ 模, 则 $\mathscr{P}$ 在 $G(\overline{K})$ 上的作用平凡, 即 $\mathscr{G}$ 透过 $\mathscr{G}/\mathscr{P}$ 作用在 $G(\overline{K})$ 上. 利用命题 2.6.3 (2) 我们可以假设 $G(\overline{K})$ 是单 $\mathscr{G}$ 模. 于是可以应用命题 2.6.4 得知 G^+ 和 G^- 是 Raynaud F 模概形, 其中 $F = \mathrm{End}(G_K)$. 因为 R 是严格 Hensel 环, 所以 $\mu \subset R$. 故 G^+ 和 G^- 的结构可由 Raynaud 定理给出. 又知同态 $G^+ \to G^-$ 决定一组 $a_i \in R$, $a_i \neq 0$ 满足 $\delta_i = a_i^p a_{i+1}^{-1} \delta_i'$. 选取 i 使得 $v(a_i)$ 取最大值. 则由 $0 \leqslant v(\delta_i)$, $v(\delta_i') \leqslant e$ 知 $e \geqslant (p-1)v(a_i)$. 但 $p - 1 > e$, 所以 $v(a_i) = 0$. 这说明所有的 a_i 皆为 R 的可逆元. 于是 $G^+ = G^-$. □

第三章　Abel 概形

在本篇中我们介绍 Abel 概形的基本概念. Abel 概形和第一篇所讲的线性代数群是不同的群概形. 域上的线性代数群是仿射簇, 而域上的 Abel 概形是射影簇. 它们之间有重要的联系, 例如 Abel 概形的模空间的自同构群是线性代数群.

我们在这里只是讲一些初等的理论, 希望能帮助大家阅读几位获 Fields 奖的学者的工作, 如 [259], [111] 和 [104].

本篇所讲的是定义在任一概形 S 上的 Abel 概形. 为了更好地理解本篇的内容, 读者应当同时学习当 S 是域的情形. 我们建议阅读 Mumford 的优秀作品 [264].

3.1　刚性引理

为了处理由 $S = \operatorname{Spec} k$ (k 是域) 过渡到一般的概形时发生的某些问题, 我们需要所谓的刚性引理(rigidity lemma).

命题 3.1.1(刚性引理)　给定一个图表:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle q} & \\ & S & \end{array}$$

设 S 是连通的, 并且对于所有的 $s \in S$ 有 $H^0(X_s, \mathscr{O}_{X_s}) \cong \kappa(s)$ (X_s 表示 p 在 s 处的纤维). 又设下面三个条件之一成立:

(1) X 在 S 上有一个截面 ε, 且 S 由一个点组成,

(2) X 在 S 上有一个截面 ε, 且 p 是既开又闭的映射,

(3) p 是平坦的和固有的,

如果对于某一个点 $s \in S$, $f(X_s)$ 是集合论意义下的一个点, 则存在 q 的一个截面 $\eta\colon\ S \to Y$, 使得 $f = \eta \circ p$.

证明　我们关于条件 (1), (2), (3) 依次证明本定理的结论. 首先设条件 (1) 成立. 定义连续映射 $\eta\colon\ S \to Y$ 为 $\eta = f \circ \varepsilon$. 则有连续映射的等式 $f = \eta \circ p$. 容易验证 $p_*(\mathscr{O}_X) \cong \mathscr{O}_S$. 但是 f 是由底空间的映射和同态

$$\mathscr{O}_Y \longrightarrow f_*(\mathscr{O}_X) \cong \eta_*(p_*(\mathscr{O}_X)) \cong \eta_*(\mathscr{O}_S)$$

所定义. 而这样的同态恰是使得 η 成为环层空间的一个态射所需要的额外的结构, 所以 η 实际上是局部环层空间的态射. 由 [142] 的 1.8 节 即知 η 是概形的态射.

现在设 (2) 成立. 令 $\eta = f \circ \varepsilon$. 我们来比较 f 和 $\eta \circ p$. 设 Z 为使得 $f = \eta \circ p$ 成立的 X 的最大的子概形, 即 $Z = (f, \eta \circ p)^{-1}(\Delta)$, 其中 $\Delta \subset Y \times_S Y$ 为对角线子概形. 我们只要证明 $Z = X$. 在上部分的证明中我们已经证明了：对于任一 $t \in S$, 如果 Z 作为集合包含 $p^{-1}(t)$, 以 T 记 S 在 t 处的任一 Artin 子概形, 则 Z 包含子概形 $p^{-1}(T)$. 这意味着 Z 含有 $p^{-1}(t)$ 的某个开邻域 U. 由于 p 是闭映射, 故 Z 含有形如 $p^{-1}(U_0)$ 的开邻域, 其中 U_0 是 t 的某个开邻域. 特别地, Z 包含形如 $p^{-1}(U_0)$ 的开集, 其中 U_0 是 s 的某个开邻域. 令 U_1 为满足 $Z \supset p^{-1}(U_1)$ 的 S 的最大开子集, 则有

$$\begin{aligned} t \in U_1 &\Longleftrightarrow p^{-1}(t) \subset Z \\ &\Longleftrightarrow p^{-1}(t) \text{ 与 } X - Z \text{ 无交} \\ &\Longleftrightarrow t \notin p(X - Z). \end{aligned}$$

由于 p 是开的, 而 Z 是闭的, 所以 $p(X - Z)$ 是开的. 由上式即知 U_1 是闭的. 即 U_1 是 S 的既开又闭的非空子集. 而 S 连通, 故 $S = U_1$. 于是 $Z = X$.

现在我们设 (3) 成立. 通过一个忠实平坦的基扩张 S'/S (即 $S' = X$), 我们可以假定 X'/S' 有一个截面. 由条件 (2) 知 $f' :\ X' \to Y'$ 形如 $\eta' \circ p'$. 由于这个性质唯一地决定 η', 并且 f' 下降为态射 f, 由此立得 η' 下降为 $\eta :\ S \to Y$(参见 [146] I.8, Th.5.2). 由 $f' = \eta' \circ p'$ 即知 $f = \eta \circ p$. □

推论 3.1.2 给定一个图表

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} & Y \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle q} & \\ & S & \end{array}$$

设 G 是 S 上的一个群概形, S 是连通的, p 是平坦、固有的, 以及对于所有的点 $s \in S$, 都有 $H^0(X_s, \mathscr{O}_{X_s}) \cong \kappa(s)$. 如果对于某一个点 $s \in S$, 由 X_s 到 G_s 的态射 f_s 到 g_s 是相等的, 则有一个截面 $\eta :\ S \to G$ 使得

$$f = (\eta \circ p) \cdot (g),$$

其中的"$\cdot$"表示 G 的 X 值点的乘法.

证明 对 $f \cdot g^{-1}$ 应用命题 1.1.1 即可. □

推论 3.1.3 给定一个图表:

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & Y \\ & \searrow^{q_1} & & \underset{\varepsilon_2}{\overset{q_2}{\leftrightarrows}} & \\ & & S & & \end{array}$$

其中 ε_2 是关于 q_2 的一个截面. 设 q_1 是固有和平坦的, Y 是连通的, 并且对所有的 $s \in S$, 都有 $H^0(X_s, \mathscr{O}_{X_s}) \cong \kappa(s)$. 又设 G 是 S 上的一个群概形, $f: X \times_S Y \to G$ 是一个 S 态射. 则存在 S 态射 $g: X \to G$ 和 $h: Y \to G$ 使得

$$f = (g \circ p_1) \cdot (h \circ p_2),$$

其中 p_1 和 p_2 是 $X \times_S Y$ 到 X 和 Y 的典范投射.

证明 对于由 $X \times_S Y$ 到 $G \times_S Y$ 的态射 (f, p_2) 和 $[f \circ (1_x, \varepsilon_2 \circ q_1)] \times 1_y$ 应用推论 1.1.2 即可. □

3.2 初等性质

如果概形态射 $f: X \to Y$ 是已分的 (separated)、有限型和泛闭的 (universally closed), 就称 f 是**固有态射** (proper morphism) (见 [27] II.4). 当 Y 是 $\operatorname{Spec} k$, k 是代数闭域时, 我们说 X 是**完备簇** (complete variety). 当 k 是复数域时, X 是紧簇.

定义 3.2.1 设 S 是一个 Noether 概形. 一个群概形 $\pi: X \to S$ 称为**Abel 概形** (abelian scheme), 如果 π 是光滑、固有的, 并且 π 的几何纤维都是连通的.

在定义 3.2.1 的记号下, 有同构 $\mathscr{O}_S \cong \pi_* \mathscr{O}_X$ (应用 $[144]_2$ 7.8.8). 当 $S = \operatorname{Spec} k$, k 是域时, 我们称 Abel 概形为 **Abel 簇** (abelian variety). 一维的 Abel 簇便是 **椭圆曲线** (elliptic curve). 由于 π 是固有的, 所以是拟紧的; 又 π 是光滑的, 所以是局部有限展示的. 这样用 [145] §8 的技巧就可以推出 π 是有限展示的. 应当注意: 当 G 是线性代数群时, G 的仿射坐标环是 Hopf 代数, 但是 Abel 簇的齐次坐标环不是 Hopf 代数. Mumford[261] 详细研究了这种环的 结构.

推论 3.2.1 设 $\pi: X \to S$ 是 Abel 概形, G 是 S 上的任一群概形. 如果 $f: X \to G$ 是一个 S 态射, 并且 f 将 X 的恒等元映为 G 的恒等元, 则 f 是一个同态.

证明 对 $f \circ \mu: X \times_S X \to G$ 应用推论 3.1.3 (这里 μ 是 X 的群律). □

推论 3.2.2 如果 X 是 S 上的 Abel 概形, 则 X 是一个交换群概形.

证明 对于 X 到 X 的取逆态射应用推论 3.2.1. □

推论 3.2.3 如果 X 是一个概形 S 上的 Abel 概形, 则对于给定的恒等元 $\varepsilon\colon S \to X$, X 只有一个 S 上的群概形结构.

证明 对于 X 上的两个 S 群律应用推论 3.2.1. □

引理 3.2.4 设 X 和 Y 是 S 上的群概形. 如果 X 在 S 上是平坦的, Y 在 S 上是光滑的, 则由 X 到 Y 的满同态 $f\colon X \to Y$ 是平坦的.

证明 由于 X 和 Y 在 S 上都是平坦的, 根据 [145] 的 §17, 只要证明对于任一 $s \in S$, s 处的纤维的态射 $f_s\colon X_s \to Y_s$ 是平坦的. 事实上, 因为 f_s 是满的, 且 Y_s 是正则的, 由 [146] I.4 中的推论 6.11 知 f_s 在 Y_s 的一个非空子集 V 上是平坦的. 而 f_s 与平移可交换, 故 f_s 在 V (在群概形 Y_s 中的) 任意平移上平坦. 于是 f_s 处处平坦. □

因为 Abel 概形是交换群概形, 所以我们可以考虑两个 Abel 概形之间的同态, Abel 概形同态 $f\colon A \to B$ 的核 $\operatorname{Ker} f$ 可以看作 B 的单位截面 ε_B 的拉回, 即

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Ker} f = A \times_B S & \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} & S \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \varepsilon_B} \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

不难看出: $\operatorname{Ker} f \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} S$ 是 S 群概形, $\operatorname{Ker} f \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} A$ 是闭浸入 (因为 ε_B 是闭浸入).

我们称 Abel 簇的同态 $f\colon A \to B$ 为**同源** (isogeny), 如果 f 为满射并且 f 的核 $\operatorname{Ker} f$ 是有限群概形. 我们称群概形 $\operatorname{Ker} f$ 的阶为 f 的**次数** (degree), 并记为 $\deg f$.

由 Abel 簇 A 的自同态所组成的环 $\operatorname{End} A$ 具有非常丰富的性质. 例如 $\operatorname{End} A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的有限维半单代数, A 上的丰沛可逆层决定代数 $\operatorname{End} A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 的对合 (称为 Rosati 对合, 见 [264] §20, 189).

设 n 为正整数. 由 $a \mapsto \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n\text{个}}$ 所定义的概形 A 上的自同态记为 n_A, 称之为 n 乘. 以 A_n 或 $A[n]$ 记核 $\operatorname{Ker}(n_A)$.

命题 3.2.5 设 A 为 S 上相对维数为 g 的 Abel 概形. 则

(1) n_A 是有限平坦满同态.

(2) A_n 是 S 上的有限平坦群概形, A_n 的阶为 n^{2g}.

(3) n_A (和 A_n) 是 étale 当且仅当 S 的任一剩余域的特征均与 n 互素.

证明 因为 π 是固有态射, 而图:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{n_A} & A \\ & {\scriptstyle \pi}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \pi} & \\ & S & \end{array}$$

交换, 故 n_A 是固有态射 (见 [143] (5.4.3) (i)). 由 [264] §6 Application 2, p.62 知 n_A 的纤维是有限的, 所以 n_A 为有限态射 (见 [144]$_1$ Prop.4.4.2). 由维数的考虑知 n_A 为满射 (见上述的 [264] p.62). 根据引理 3.2.4, 我们得知 n_A 为平坦态射. 由 [264] p.64 的命题知本命题的结论 (2)、(3) 为真. □

我们称 $\varinjlim_n A_{p^n}$ 为 Abel 概形 A 的 **p-Barsotti-Tate 群** (p-Barsotti-Tate group), 它的高度 为 $2g$.

3.3 形 变

设是 R 一个代数整数环, 或是一个 Dedekind 整环, 或者更一般地, 是一个 Dedekind 概形 (即维数不超过 1 的 Noether 正规概形). 设 K 是 R 的分式域, $\mathfrak{p}$ 是 R 的一个素理想, $R_\mathfrak{p}$ 是 R 在 $\mathfrak{p}$ 处的完备化, $k_\mathfrak{p}$ 是 $R_\mathfrak{p}$ 的剩余域. 设 X 是 R 概形. 令 $X_K = X \otimes_R K$, $X_{k_\mathfrak{p}} = X \otimes_R k_\mathfrak{p}$. X_K 通常称为 X 的**一般纤维** (generic fibre), $X_{k_\mathfrak{p}}$ 称为 X 在 $\mathfrak{p}$ 处的**闭纤维** (closed fibre). 在数论中常常要考虑 X, X_K, $X_{k_\mathfrak{p}}$ 三者以及定义在这三者之上的代数结构之间的关系. 比如, 对于给定的 K 上的概形 Y_η, 寻求 R 概形 Y 使得 $Y \otimes_R K = Y_\eta$. 此时我们称 Y 为 Y_η 的R **模型** (R-model). Y 也被称为 Y_η 的**扩张** (extension) 或拓展**拓展** (prolongation). 又比如给定 $k_\mathfrak{p}$ 上的概形 Z_0, 寻求 R 概形 Z 使得 $Z \otimes_R k_\mathfrak{p} = Z_0$. 此时我们称 Z 为 Z_0 的 **形变** (deformation). Z 也被称为 Z_0 的**提升** (lifting). 这些问题一般都是不可解的! 但是这些问题的解答对于数论和编码都有重要的意义.

对于 Abel 概形我们又有如下的术语. 设 K 为域, v 为 K 上的离散赋值, $\mathscr{O}_v$ 为 v 的赋值环, $\mathfrak{m}_v$ 为 $\mathscr{O}_v$ 的极大理想, κ_v 为剩余域 $\mathscr{O}_v/\mathfrak{m}_v$. 设 A 为 K 上的 Abel 簇. 我们说 A 在 v 处有**好约化** (good reduction), 如果存在 $\mathscr{O}_v$ 上 Abel 的概形 A_v 使得 $A \cong A_v \times_{\mathscr{O}_v} K$ (即 A_v 是 A 的 $\mathscr{O}_v$ 模型) (参见 [151]$_1$ IX 2.2.9.1, p.335). 如果存在 K 的有限扩张 K' 以及 v 在 K' 上的一个扩张 v', 使得 $A \times_K K'$ 在 v' 处有好约化, 则称 A 在 v 处有**潜在好约化** (potential good reduction). 进一步, 设有一维局部 Noether 正则整概形 S, 其有理函数域记为 K. 我们说 K 上的 Abel 簇 A_K 在 S 上有**半稳定约化** (semi-stable reduction), 如果存在 S 上的光滑概形 A 使得 $A_K \cong A \times_S K$, 并且对于任一 $s \in S$ 都有正合序列

$$0 \longrightarrow T_s \longrightarrow A_s^0 \longrightarrow B_s \longrightarrow 0,$$

其中 A_s^0 是 A 在 s 处的纤维 A_s 的单位连通分支, B_s 是 Abel 概形, T_s 是环面 (torus) (参见 [151]$_1$ IX 3.4, p.349).

我们先就椭圆曲线的情形说明上述术语. 设 K 是局部域, v 为 K 的离散赋值, $\mathscr{O}_v$ 为 v 的赋值环, π 是 $\mathscr{O}_v$ 的极大理想的生成元, 剩余域 κ_v 是素特征的有限

域. 设 E 为 K 上的椭圆曲线. 则 E 的最小 Weierstrass 方程定义了 $\mathscr{O}_v$ 上的概形 E_v. 于是 $\widetilde{E} = E_v \times_{\mathscr{O}_v} \kappa_v$ 就是 $E \mod \pi$ 的约化 (reduction mod π, 见 [347] VII §1,2). 此时有两种可能: $\widetilde{E}$ 有尖点 (cusp, 此时我们说 E 有加性约化) 或 E 有半稳定约化, 在 E 有半稳定约化时又有两种可能: $\widetilde{E}$ 有结点 (node, 此时我们说 E 有乘性约化) 或 $\widetilde{E}$ 光滑 (即 E 有好约化) (参见 [347] VII §5). 若 E 有好约化, 则 $\widetilde{E}[p^n] \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ $(n \geqslant 1)$ 或 $\widetilde{E}[p^n] = \{0\}$; 在第一种情形我们说 E 有通常好约化 (ordinary good reduction), 在第二种情形则说有超奇异好约化 (supersingular good reduction) (见 [347] V Theorem 3.1, p.137). 上述的各种情形可以列表如下:

$$\begin{cases} \text{加性约化} \\ \text{半稳定约化} \begin{cases} \text{乘性约化} \\ \text{好约化} \begin{cases} \text{通常} \\ \text{超奇异} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

对于一般的 Abel 概形, 情况就比较复杂了. 我们来列举一些结果. 这些结果都是 20 世纪 60 年代的定理, 不过证明都在多年、甚至二十多年后才有人发表. 这给我国的学生与教师带来的困难是不可形容的.

I. Mumford (1968) 有这样的定理:

定理 3.3.1 *设 k 是特征 $p \neq 0$ 的域, X_0 是 k 上的 Abel 簇. 则存在特征 0 的整环, 环的满同态 $R \to k$ 和 R 上的 Abel 概形 X, 使得 $X \otimes_R k \cong X_0$.*

这个定理的含意是: 特征 p 的簇必可提升至特征 0. 证明见 [275] p.430.

II. 设 R 为 Dedekind 整环, K 为 R 的分式域, X_η 是光滑分离有限型 K 概形, X 是光滑分离有限型 R 概形. 我们说 X 是 X_η 的 **Néron 模型** (Néron model), 如果 $X \otimes_R K = X_\eta$, 并且对于任意光滑 R 概形和任意 K 态射 $u_\eta: Y \otimes_R K \to X_\eta$, 都存在 R 态射 $u: Y \to X$ 使得 $u \otimes_R K = u_\eta$. Néron(1964)-Raynaud(1966) 有以下的定理:

定理 3.3.2 *K 上的 Abel 簇必有 R 上的 Néron 模型.*

证明 见 [59] p.19 Thm.3. □

III. 设域 K 有离散赋值 v, K_s 为 K 的可分闭包, $\overline{v}$ 是 v 到 K_s 的某一扩张. 以 $I(\overline{v})$ 记 $\overline{v}$ 的惯性群. 设 Galois 群 $\mathrm{Gal}(K_s/K)$ 作用在集合 S 上. 我们说 S 在 v 处是**非分歧的** (unramified), 如果 $I(\overline{v})$ 在 S 上的作用是平凡的 (即 $g \cdot s = s,\ \forall g \in I(\overline{v}),\ s \in S$).

设 A 为 K 上的 Abel 簇. 对于与 K 的特征互素的整数 m, 令 $A_m = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, A(K_s))$, 即是说: A_m 是 A 的 K_s 点, 其阶整除 m. 设 l 是素数, l 不等于 K 的特征. 令

$$T_l(A) = \varprojlim_n A_{l^n} = \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l, A(K_s)).$$

则 $\mathrm{Gal}(K_s/K)$ 在 A_m 上的连续作用导致连续的 l 进表示

$$\rho_l: \mathrm{Gal}(K_s/K) \longrightarrow \mathrm{Aut}(T_l(A)).$$

我们假设 l 不等于剩余域 κ 的特征. 在 [336] 中证明了以下定理:

定理 3.3.3 (1) (Néron-Ogg-Šafarevič 条件) *A 在 v 处有好约化当且仅当 $T_l(A)$ 在 v 处非分歧.*

(2) *A 在 v 处有潜在好约化当且仅当 $\rho_l(I(\overline{v}))$ 是有限的.*

IV. 设 K 为有理数域 $\mathbb{Q}$ 的有限扩张, $\overline{K}$ 为 K 的代数闭包. 设 l 为素数, $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ 在 Tate 模 $T_l(A)$ 上的作用所决定的表示记为 ρ. Faltings 证明了以下定理:

定理 3.3.4 (1) *ρ 所决定的表示 $T_l(A) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$ 是半单的.*

(2) *映射 $\mathrm{End}_K(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l \to \mathrm{End}_\rho(T_l(A))$ 是同构.*

这个定理本来是 Tate 的猜想. 对于有限域上的 Abel 簇相应的结果是 Tate 的定理 (见 [371]). 在函数域的情形是 Zarhin 1974 年的工作. 从这个定理 Faltings 推出了下面 Šafarevič 的猜想:

定理 3.3.5 *设有限集 S 的元素为 K 的赋值的等价类. 设 d 为正整数. 对于 K 上的 Abel 簇 A, 如果要求 A 在 S 外有好约化, 并且具有次数为 d 的极化, 则这样的 A 只组成有限个同构类.*

这是 Faltings 获得 Fields 奖的工作, 发表在 [111]. 与此有关的有 Fontaine 的定理: 不存在定义在 $\mathbb{Q}$ 上维数不小于 1 的 Abel 簇 A, 使得 A 对于所有的 p 有好约化.

V. 设 S 是一维 Noether 正则连通概形, K 为 S 的有理分式域, A_K 为 K 上的 Abel 簇. Grothendieck 证明了: 存在 K 的有限 Galois 扩张 K', 使得 $A_K \otimes_K K'$ 在 S' 上有半稳定约化, 其中 S' 为 S 在 K' 中的正规化 (normalization).

这个定理是 Serre 在 1964 年提出的猜想, Grothendieck 同年证出, 发表在 1972 年: $[151]_1$ IX Thm. 3.6, p.351. (参看 [291] 及 [34].)

VI. 固定一个域 k. 设 W 为以 k 为剩余域的 Noether 局部环 (例如, 若 k 为特征 $p \neq 0$ 的完全域, W 为 k 的 Witt 环).

考虑范畴 $\mathfrak{C}_W$, 其对象为局部 Artin W 代数 R 连同一个使得下图交换的同构 $k \cong R/\mathfrak{m}_R$ ($\mathfrak{m}_R$ 为 R 的极大理想).

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & R \\ \downarrow & & \downarrow \\ k & \xrightarrow{\cong} & R/\mathfrak{m}_R \end{array}$$

$\mathfrak{C}_W$ 内的态射是指从 R 到 R' 的局部 W 代数同态.

又引入范畴 $\hat{\mathfrak{C}}_W$, 其对象是完备局部 Noether W 代数 $\mathscr{O}$, 使得对于任意正整数 n, 均有 $\mathscr{O}/\mathfrak{m}_{\mathscr{O}}^n \in \mathfrak{C}_W$.

固定 k 上的 Abel 簇 X_0. 对于 $R \in \mathfrak{C}_W$, 令 $\mathcal{M}(R)$ 为所有同构类 (X, φ) 组成的集合, 其中 X 为 R 上的 Abel 概形, $\varphi: X \otimes_R k \to X_0$ 为同构 ($\mathcal{M}(R)$ 称为 Abel 簇的**局部参模** (local moduli)). Grothendieck (1960) 有以下的定理:

定理 3.3.6 *存在自然同构*

$$\mathrm{Hom}_{\hat{\mathfrak{C}}_W}(W[[t_{1,1}, \cdots t_{g,g}]], R) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(R),$$

其中 $R \in \mathfrak{C}_W$, $g = \dim X_0$.

这个定理意味着函子 $\mathcal{M}: \mathfrak{C} \to \mathfrak{Sets}$ 在范畴 $\hat{\mathfrak{C}}_W$ 内可表. 证明见 [289] p.273.

VII. 设素数 p 在环 R 内幂零, I 为 R 的幂零理想. 令 $R_0 = R/I$. R 上的 Abel 概形所组成的范畴记作 $\mathfrak{A}(R)$. 引入范畴 $\mathrm{Def}(R, R_0)$, 它的对象是 (A_0, G, η), 其中 A_0 是 R_0 上的 Abel 概形, G 是 R 上的 p-Barsotti-Tate 群, η 是 R_0 上的 p-Barsotti-Tate 群同构:

$$G \otimes_R R_0 \overset{\eta}{\cong} A_0[p^\infty],$$

这里我们以 $A_0[p^\infty]$ 记 A_0 的 p-Barsotti-Tate 群 $\varinjlim_n A_0[p^n]$. Serre-Tate (1964) 证明了以下的定理:

定理 3.3.7 *函子*

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(R) &\longrightarrow \mathrm{Def}(R, R_0) \\ A &\longmapsto (A \otimes_R R_0, A[p^\infty], \eta) \end{aligned}$$

是范畴等价, 其中 η *是自然同构*

$$A[p^\infty] \otimes_R R_0 \overset{\eta}{\cong} (A_0 \otimes_R R_0)[p^\infty].$$

此定理的证明见 [189] p.143 或 [250] Thm(2.3), p.166.

设 k 为特征 $p > 0$ 的域, $\overline{k}$ 为 k 的代数闭包. 我们说 k 上的 g 维 Abel 簇是**通常的** (ordinary), 如果 A 上的阶整除 p 的 $\overline{k}$ 有理点的个数是 p^g (见 [347] p.137, [94], [168]).

设 k 是特征 $p > 0$ 的代数封闭域. 以 $\mathfrak{C}$ 记以 k 为剩余域的局部 Artin 环所组成的范畴. 对于给定的 k 上的 Abel 簇, 定义函子

$$\begin{aligned} \mathcal{M}: \mathfrak{C} &\longrightarrow \mathfrak{Sets} \\ R &\longmapsto (\widetilde{A}, \varphi), \end{aligned}$$

其中 $\widetilde{A}$ 为 R 上的 Abel 概形, $\varphi: \widetilde{A} \otimes_R k \to A$ 为同构, 即 $\widetilde{A}$ 为已给定 k 上的 Abel 簇 A 的提升. 按本小节定理 3.3.7, 给定 A/k 后, 判断 $\widetilde{A}/R$ 是否为 A/k 的提升等价于判断 p-Barsotti-Tate 群 $\widetilde{A}[p^\infty]$ 是否为 $A[p^\infty]$ 的提升.

以 A^t 记 A 的对偶 Abel 簇 (参见 [264] §13). 如果 A 是通常的, 则 A^t 也是通常的. 此时 Tate 模 $T_p(A)$ 和 $T_p(A^t)$ 均是自由 $\mathbb{Z}_p$ 模, 并且存在自然同构

$$A[p^\infty] \cong \mathrm{Hom}(T_p(A^t), \hat{\mathbb{G}}_{\mathrm{m}}) \times (T_p(A) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p).$$

由此可以推出函子 $\mathcal{M}$ 同构于 $\mathfrak{C}$ 上的函子

$$R \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T_p(A) \otimes T_p(A^t), \hat{\mathbb{G}}_{\mathrm{m}}(R)).$$

于是得知：通常的 Abel 簇的局部参模空间 $\mathcal{M}$ 是群概形 (见本小节的定理 3.3.7).

按 [263] 知, 任一 Abel 簇必是一组二次多项式的公共解. 可以说 Abel 簇是 "二次" 的. 但是没有办法决定一个 Abel 簇的二次多项式, 故亦不知一个 Abel 簇有多少个有理点, 亦不知已给一个 Abel 簇是否一个模空间的点. 一个办法是把问题线性化：就是把问题化作一个线性代数的问题. 我们可以把这个流程记录如下：

$$\text{Abel 簇} \overset{(1)}{\longleftrightarrow} p\text{ 可除群} \overset{(2)}{\longleftrightarrow} \text{形式群}$$
$$\overset{(3)}{\longleftrightarrow} \text{Dieudonné 模} \overset{(4)}{\longleftrightarrow} \text{DISPLAY}$$

其中 DISPLAY 是 Zink 的理论, 见 [412]. 我们没有见过任何文章或书详细地将整个过程写出来. 或许是不愿意花时间把这个技术说清楚, 读者只能从文献中摸索了. 上面的 (1) 就是 Serre-Tate 定理, 可是他们从未发表过证明, Tate 有好几篇著名的文章是多年后才发表的. 比如他的 "Rigid analytic geometry", "Finite flat group scheme" 等. 又如他的 1959 年的文章直至 1995 年 (他退休后) 才发表为 "Non-archimedean elliptic functions". 第 (2) 步是指 Tate[373] 命题 1. 至于 (3), 我们在上一章 2.7.3 节介绍过有关文献. (4) 的原始想法来自 Mumford (没有发表), 现在只可看 Zink 的文章了.

从这些定理可以看出有限群概形, p-Barsotti-Tate 群, Tate 模对于 Abel 簇的研究的重要性.

最后还应当提醒读者留意 B. Mazur 和他的学派所发展的形变环的理论. 从这个理论在 Fermat 最后定理的证明中的应用就可以理解形变对于 Galois 表示的重要性.

以下我们介绍 Grothendieck 的一个定理.

定理 3.3.8 *设 S 是连通的、局部 Noether 的概形, $\pi: X \to S$ 为一个光滑射影态射, $\varepsilon: S \to X$ 是 π 的一个截面. 如果对于 S 的某个几何点 s, π 的纤维 X_s 是以 $\varepsilon(s)$ 为恒等元的 Abel 簇, 则 X 是 S 上的以 ε 为恒等元的 Abel 概形.*

此定理的证明将分为三步. 第一步是:

命题 3.3.9 设 $S=\mathrm{Spec}(A)$, 其中 A 是 Artin 局部环. 设 $\mathfrak{M}$ 是 A 的极大理想, I 是 A 的理想, 满足条件 $\mathfrak{M}\cdot I=(0)$. 又设 $\pi: X\to S$ 为一个光滑固有态射, $\varepsilon: S\to X$ 是一个截面. 令 $S_0=\mathrm{Spec}(A/I)$, $x_0=X\times_S S_0$. 如果 X_0 是 S_0 上的以 $\varepsilon|_{S_0}$ 为恒等元的 Abel 概形, 则 X 是 S 上的以 ε 为恒等元的 Abel 概形.

证明 令 $k=A/\mathfrak{M}$, $\overline{X}=X\times_S\mathrm{Spec}(k)$, 再令

$$\begin{aligned}\mu_0: X_0\times_{S_0}X_0&\longrightarrow X_0\\(x,y)&\longmapsto x-y,\end{aligned}$$

其中 x,y 为 X_0 的 T 值点, T 为 S 上的任一概形. 以 $\overline{\mu}$ 记 μ_0 在 $\overline{X}\times\overline{X}$ 上的限制. 我们首先将 μ_0 扩充为某个态射 $\mu: X\times_S X\to X$. 根据 [146] I.3 中的推论 5.2, 如果 $\mathscr{J}$ 是 $\overline{X}$ 的切层, 则存在一个障碍

$$\beta\in H^1(\overline{X}\times\overline{X},\ \overline{\mu}^*(\mathscr{J})\otimes_k I),$$

它的消失是扩充 μ 的存在性的充分必要条件. 考虑 $g_1,g_2: X_0\to X_0\times_{S_0}X_0\to X_0$, 其定义为 $g_1(x)=(x,e)$, $g_2(x)=(x,x)$ (x 为 X_0 的 T 值点, T 为 S 上的任一概形). 令 $\overline{g}_i=g_1|_{\overline{X}}$ ($i=1,2$). 则 $\mu_0\circ g_1=1_{X_0}$, $\mu_0\circ g_2=(\varepsilon\circ\pi)|_{X_0}$. 所以 $\mu_0\circ g_1$ 和 $\mu_0\circ g_2$ 确实扩充为 X 到 X 的态射, 因而相应于这两个扩充的的障碍

$$\beta_1,\ \beta_2\in H^1(\overline{X},\ \overline{\mu}\circ\overline{g}_i{}^*(\mathscr{J})\otimes_k I)$$

都为零. 但是, 根据障碍简单的函子性质, 在任何情形总有 $\beta_i=\overline{g}_i{}^*(\beta)$, 所以 $g_1^*\beta=g_2^*\beta=0$.

现在, 注意到 $\mathscr{J}$ 是平凡的向量丛: 事实上

$$\mathscr{J}\cong\mathscr{O}_{\overline{X}}\otimes H^0(\overline{X},\mathscr{J}).$$

于是, 由 Kunneth 公式, 有

$$\begin{aligned}H^1(\overline{X}\times\overline{X},\ \overline{\mu}^*(\mathscr{J})\otimes_k I)&\cong H^1(\overline{X}\times\overline{X},\mathscr{O}_{\overline{X}\times\overline{X}})\otimes H^0(\overline{X},\mathscr{J})\otimes I\\&=\{p_1^*H^1(\overline{X},\mathscr{O}_{\overline{X}})\oplus p_2^*H^1(\overline{X},\mathscr{O}_{\overline{X}})\}\otimes H^0(\overline{X},\mathscr{J})\otimes I.\end{aligned}$$

由此即知, 如果对于任意 α 都有 $g_1^*\alpha=g_2^*\alpha=0$, 则 $\alpha=0$. 特别地, $\beta=0$. 因此 μ 存在.

应当注意的是 μ_0 的扩充 μ 并不唯一. 还是根据 [146] I.3 中的推论 5.2, 所有扩充的集合是 $H^0(\overline{X}\times\overline{X},\ \overline{\mu}^*\mathscr{J}\otimes_I)$ ($\cong H^0(\overline{X},\mathscr{J})\otimes I$) 下的一个主齐性空间.

根据同样的结果，μ_0 的所有限定恒等元 $(\varepsilon_0,\varepsilon_0)(S)\subset X_0\times_{S_0}X_0$ 的扩充的集合也是 $\cong H^0(\overline{X},\mathscr{J})\otimes I$ 下的一个主齐性空间. 所以对于 μ_0 的每个限定恒等元的扩充存在 μ_0 的唯一的扩充. 我们要求扩充 μ 将 $X\times_S X$ 的恒等元映为 X 的恒等元，即 $\mu_0(\varepsilon,\varepsilon)=\varepsilon$，这就唯一地决定了 μ_0.

下面只需再证明 μ 确实定义了 X 上的群律. 当然，我们可以用 μ 形式地定义乘法和取逆，然后验证群律所要求的各个等式. 但是所有这些等式都形如 $h_1=h_2$，其中

$$h_i:\overbrace{X\times_S\cdots\times_S X}^{l\text{个}X}\longrightarrow X\quad(i=1,2)$$

是若干个 μ，投射，对角以及恒同态射的合成. 对于任何情形，读者可自行验证 $h_1\circ(\varepsilon,\cdots,\varepsilon)=h_2\circ(\varepsilon,\cdots,\varepsilon)=\varepsilon$. 进而言之，由于 μ_0 定义了 X_0 上的群律，所以 $h_1=h_2$ 定义了子概形 $X_0\times_{S_0}X_0$ 上的群律. 由推论 3.1.2 即知 $h_1=h_2$. □

第二步是：

命题 3.3.10　令 F 为如下定义的局部 Noether S 概形范畴上的函子 F：对于 $f:T\to S$，

$$F(T)=\{T\text{ 上的以 }(\varepsilon\circ f,\,1_T):T\longrightarrow X\times_S T\text{为恒等元在 }X\times_S T\text{ 上的所有 Abel 概形的结构组成的集合}\},$$

则 F 被 S 的一个开集 U 所表示.

证明　任一概形 Y/T (这里 Y 在 S 上是光滑射影的) 上的一个 Abel 概形的结构实际上与满足若干等式的态射 $\mu:Y\times_T Y\longrightarrow Y$ (例如 $\mu\circ(\eta,\eta)=\eta$) 是一回事 (这里的 $\mu(x,y)=x-y$ 与前面相同). 作为 Hilbert 概形存在性的推论，我们知道存在表示由概形 $Y\times_T Y$ 到 Y 的所有函子的概形 $\mathrm{Hom}_T(Y\times_T Y,Y)$ (参见 [141] exposé 221). 所以一个 Abel 概形的结构是 $\mathrm{Hom}_T(Y\times_T Y,Y)$ 的一种特殊的截面. 如果 $Y=X\times_S T$，则这种截面的集合同构于下述 S 态射的集合：

$$f:T\longrightarrow \mathrm{Hom}_S(X\times_S X,X).$$

我们断言：上面提到的若干等式成立当且仅当 f 可通过某个闭子概形 $Z\subset\mathrm{Hom}_S(X\times_S X,X)$ 分解. 注意，这里所说的任一等式都形如 $\gamma_1\circ f=\gamma_2\circ f$，其中

$$\gamma_i:\mathrm{Hom}_S(X\times_S X,X)\longrightarrow \mathrm{Hom}_S(\overbrace{X\times_S\cdots\times_S X}^{l\text{个}X},X)$$

是某种典范态射，它表示取某个 μ 以及与自身，投射，对角线态射等合成的过程. 这样的过程总是给出第一个概形所表示的函子到第二个概形所表示

的函子的态射. 由 [142] Chap.0, §8 知：任一这样的态射总可由某个概形的态射得到. 取 Z 为子概形 $(\gamma_1,\Gamma_2)^{-1}(\Delta_l)$ (在概形论意义下) 的交, 其中 Δ_l 为 $\big(\mathrm{Hom}_S(\overbrace{X\times_S\cdots\times_S X}^{l\text{个}X},X)\big)^2$ 的对角线.

由此即知：命题 3.3.3 等价于投射 $\varpi: Z\to S$ 是一个开浸入. 但是命题 3.3.2 恰是 ϖ 的光滑性的判定准则 ([146] I.3 的定理 3.1). 由推论 3.2.3 知 ϖ 是几何上的单射, 即对于任一代数封闭域 Ω, $F(\mathrm{Spec}\,\Omega)$ 最多含有一个元素. 由 [146] I.1 的定理 5.1 和 [146] I.2 的推论 1.4 即知 ϖ 是开浸入. □

第三步是：

命题 3.3.11 设 R 是离散赋值环, K 是 R 的分式域, k 是剩余域, X 是光滑固有 R 概形, 并且 X 的一般纤维是 Abel 簇, 它的单位 $e\in X(R)$. 则 X 是 Abel R 概形.

证明 设 X^0 是 X_K 和 X_k 内包含 e 的连通分支的并概形. 则 X^0 是 X 的开子概形. 由 $[145]_3$ (15.7.10) 知 $X^0\to\mathrm{Spec}\,R$ 是固有态射. 所以 X^0 是分离 R 概形 X 的闭子概形. 但 X 是平坦 R 概形并且具有连通 K 纤维, 所以 X 是连通的. 于是 $X^0=X$. 由于域上的有限型连通概形若有有理点则必然是几何连通的, 所以 X 有几何连通纤维.

余下需要证明：可以把 X_K 上的群律扩充到 X 上. 首先, 由固有性的赋值判别准则我们得知 X 有以下性质：对于 $S=\mathrm{Spec}\,R$ 的任一闭点 s 和任一局部 étale $\mathscr{O}_{S,s}$ 代数 R', 必有满射 $X(R')\to X_K(K')$, 其中 K' 为 R' 的分式域. 然后根据 [59] 中的 4.3/2, 4.3/4 (的证明), 4.3/5 得知 X_K 上的群律可以扩充为 X 上的双有理群律. 最后用同书的 5.1/5 得到结论：此双有理群律可以扩充为 X 上的群律, 于是证明了 X 是 Abel R 概形. □

此命题原见 [205]. 其证明用的是 Weil 1948 的语言. 这里的证明是 Conrad 给出的.

要完成定理 3.3.8 的证明, 我们只要证明命题 3.3.10 中的集合 U 是闭的. 为此我们将引用以下的所谓 "局部可构造集 (见 $[144]_1$ Chap.0 (9.1.11), $[145]_3$ §9) 的闭性的特殊化 (specialization) 判别准则".

命题 3.3.12 设 X 是局部 Noether 概形, U 是 X 的可构造集. 如果对于任意离散赋值环 R 和任意概形态射 $S=\mathrm{Spec}\,R\xrightarrow{f}X$, $f(s_0)\in U$ 都蕴含 $f(s_1)\in U$ (其中 s_0 和 s_1 分别为 S 的一般点 (generic point) 和闭点), 则 U 是 X 的闭集.

证明 因为这里考虑的都是局部性质, 所以我们可以假定 X 是拟紧、分离的, 以及 U 的闭包是 X. 于是只要证明作为拓扑空间而言 $U=X$. 因为 U 是可构造的, U 在 X 内稠密, 所以 U 必包含 X 的所有一般点.

我们引用赋值准则：对于局部 Noether 概形 Y 内的任意一对点 (y,η)，如果 y 在 η 的闭包内，则必存在离散赋值环 R 以及态射 $S = \operatorname{Spec} R \xrightarrow{f} Y$，使得 $f(s_0)=\eta$，$f(s_1)=y$.

因为概形 X 内任一点必在的某个一般点的闭包内，所以如果我们令 η 取遍 X 的所有一般点，由赋值准则立见 U 包含 X 的所有点，即 $U = X$. □

3.4　p 可除群

3.4.1　BT 群

固定基概形 S. 设 G 为交换 S 群概形.

以 $G(n)$ 记 $\operatorname{Ker}(p^n \cdot \mathrm{id_G})$，即态射 $x \to p^n \cdot x$ 的核. 如果 $G = \varinjlim G(n)$，我们称 G 为 p **扭群** (p-torsion group) 或 p **群** (p-group). 如果 $p \cdot \mathrm{id}_G : G \to G$ 为满同态，则称 G 为 p **可除群** (p-divisible group). 如果 (1) G 是 p 扭群，(2) G 是 p 可除群，(3) $G(1)$ 是局部自由有限 S 群概形 (即是说 fppf 层 $G(n)$ 可由局部自由有限 S 群概形所表示)，则 G 称为 ***p*-Barsotti-Tate 群** (p-Barsotti-Tate group) (简称为 **BT 群** (BT group)，参见 [139] Chap. III.4). 注意常有作者称 BT 群为 p 可除群 (如 Tate)! 对于任一 $s \in S$，$G(n)$ 在点 s 的纤维有秩 $p^{nh(s)}$，其中 $h(s)$ 是 S 上的局部常值函数. 当 $h(s)$ 取常值 h 时，我们说 G 的**高度** (height) 为 h.

关于 BT 群的一篇非常重要的文章是 [373]. 补充资料：[309]，以及 Shankar Sen 的多篇文章. 关于这方面的一本名著是 [119].

3.4.2　Dieudonné 环

设 k 是特征 $p>0$ 的完全域. 以 $W(k)$ 记 k 的 Witt 向量环. 以 σ 记绝对 Frobenius，即对于 $a \in K$，$\sigma a = a^p$，对于 $(a_0, a_1, \cdots) \in W(k)$，$\sigma(a_0, a_1, \cdots) = (a_0^p, a_1^p, \cdots)$. 我们引入 Dieudonné 环 $D_k = W(k)[F,T]$. 它是 F 和 V 由生成的环，满足以下的生成关系：$FV - VF = p$，以及对于任意的 $\underline{a} \in W(k)$，有 $F(\underline{a}) = \sigma(\underline{a})F$，$V\sigma(\underline{a}) = \underline{a}V$ (如果 $k \neq \mathbb{F}_p$，D_k 不是交换环).

如果一个 D_k 模 M 看作 $W(k)$ 模时有有限长度 (length)，我们就称 M 为**有限 D_k 模** (finite D_k-module). 如果一个 M 看作 $W(k)$ 模时是无扭的，我们就称 M 为**自由 D_k 模** (free D_k-module).

令 $M^* = \operatorname{Hom}_{W(k)}(M, W(k))$. 对于 $u \in M^*$，$m \in M$，设 $(Fu)(m) = \sigma(u(Vm))$，$(Vu)(m) = \sigma^{-1}(u(Fm))$.

定理 3.4.1　设 k 是特征 $p>0$ 的完全域. 则函子 $G \mapsto M(G)^*$ 在以下两个情形下是范畴等价:

(1) 从 p 扭有限 k 群范畴到有限 D_k 模范畴,

(2) 从 p-Barsotti-Tate k 群范畴到有限秩自由 D_k 模范畴.

当我们把基概形从 $\operatorname{Spec} k$ 换成一般的概形时, 则没有这样的等价. Berthelot, Bloch, Kato, Messing, de Jong 等人研究过此类等价性问题.

3.4.3 晶体

上面的定理告诉我们: 从一个 p-BT k 群可以得出线性资料 (M, F), 其中 $M = M(G)$ 是一个有限秩自由 $W(k)$ 模, $F : M \to M$ 是 σ 线性单映射 (即 $F(\underline{a}x) = \sigma(\underline{a})F(x)$) 使得 $pM \subseteq FM$. 人们引入以下的定义:

定义 3.4.1 一个 k 上的**晶体** (crystal) (又称 F **格** (F-lattice)) 是指一个偶对 (M, F), 其中 M 是一个有限秩自由 $W(k)$ 模, $F : M \to M$ 是 σ 线性单同态. 以记 K 的 $W(k)$ 分式域 $\operatorname{Frac}(W(k))$. 一个 k 上的**等晶体** (isocrystal) (又称 F **空间** (F-space)) 是指一个偶对 (V, F), 其中 V 是一个有限维 K 向量空间, $F : V \to V$ 是 σ 线性同构.

从 k 上的一个 Abel 簇 A 出发, 我们得到它的 p 扭点概形 $A(\infty)$. 它是一个 k 上的晶体. 因为从典型群得出的 Shimura 簇是 Abel 簇的模空间, 而 Shimura 簇是 Langlands 理论的中心研究对象, 我们可知晶体理论的重要性了.

3.4.4 等晶体

设 $\lambda = \frac{s}{r} > 0$ 为有理数, 其中 r, s 为互素的正整数. 令

$$E^\lambda = \mathbb{Q}_p[T]/(T^r - p^s).$$

定义

$$F\left(\sum_{i=0}^{r-1} a_i T^i\right) = \sum_{i=0}^{r-2} \sigma(a_i) T^{i+1} + p^s \sigma(a_{r-1}).$$

则 (E^λ, F) 为 $\mathbb{F}_p$ 等晶体 (熟知 $\mathbb{Z}_p = W(\mathbb{F}_p)$). 设 k 为特征 p 的完全域. 令

$$E_k^\lambda = \operatorname{Frac}(W(k)) \otimes_{\mathbb{Q}_p} E^\lambda.$$

将 F 通过 $W(k)$ 线性扩充定义到 E_k^λ 上, 则得到 k 等晶体 (E_k^λ, F). 对于有理数 $\lambda < 0$, 取 E_k^λ 为 $E_k^{-\lambda}$ 的对偶空间. 我们设 (E_k^0, F) 为 $(\operatorname{Frac}(W(k)), x \to \sigma(x))$.

命题 3.4.2 设 k 为特征 p 的代数封闭域. 则

(1) E_k^λ 为单等晶体 (即不存在子等晶体 V 使得 $0 \neq V \subsetneq E_k^\lambda$).

(2) 任一 k 等晶体 E 必同构于直和 $\bigoplus_{i=1}^n (E_k^{\lambda_i})^{m_{\lambda_i}}$ (m_{λ_i} 为正整数, $\lambda_i = \frac{s_i}{r_i}$ 为有理数, r_i, s_i 为互素的整数, $r_i > 0$).

E 的**斜率序列** (slope sequence) 是指

$$(\underbrace{\lambda_1, \cdots, \lambda_1}_{m_{\lambda_1} r_1 \text{个}}, (\leqslant)\lambda_2, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

(包括重数按升值排列, 此序列的长度是 $m = \sum m_{\lambda_i} r_i = \dim_{\mathrm{Frac}(W(k))} E$). E 的 Newton **多边形** (Newton polygon) 是指平面上的多边形 $OA_1A_2\cdots A_m$, 其顶点 A_i 的横坐标是 i, 纵坐标是斜率序列中前 i 项之和.

现在取 $0 < \lambda < 1$, $\lambda = \frac{s}{r}$, r, s 为互素的正整数. 以 $W(p)$ 记 $\varinjlim(\mathrm{Ker}\, p^n : W(k) \to W(k))$, 其中 k 为特征 p 的完全域. 以下的正合序列决定 p-BT k 群 G_k^λ:

$$0 \longrightarrow G_k^\lambda \longrightarrow W(p) \xrightarrow{F^r - V^s} W(p).$$

取 G_k^0 为 $(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \bigotimes k$, G_k^1 为 $\mu_k(p) = \varinjlim(\mu_{p^n}/k)$. 则 $M(G_k^\lambda) \bigotimes \mathbb{Q}_p = E_k^\lambda$, G_k^λ 的高度等于 r, G_k^λ 的维数等于 s.

命题 3.4.3 *设 k 为特征 p 的代数封闭域. 则任一 p-Barsotti-Tate k 群必同源 (isogenous) 于 $\prod_\lambda (G_k^\lambda)^{m_\lambda}$.*

关于以上结论的详情可看 [100], 亦可参看以下重要文章: [207], [213] 及 [305].

3.4.5 Dieudonné 模

很自然地我们希望把前述的结果从域上推广到概形上. 目前这是依靠 Grothendieck 所发明的晶体上同调理论进行的. 关于这个理论可以参看: [40], [43], 亦可阅读 [13].

以下假定读者有此理论的初步知识. 我们就 Dieudonné 晶体理论作个摘要. 固定一个素数 p.

设 Σ 为概形, Σ 上给定了 PD 结构. S 为 Σ 概形. 假设 Σ 的 PD 结构可以扩展到 S 上. 又设 p 在 S 上局部幂零. 以下分六个步骤介绍 Dieudonné 模晶体.

I. 设 Σ 为 $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ 或 $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}/p^n)$. 设 Σ 概形 S 的特征为 p. 以 f_S 记 S 的 Frobenius 自同态. 如果 G 是 S 上的交换层, 则以 $G^{(p)}$ 记 $f_S^*(G)$.

以 $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$ 记晶体拓扑, 以 $f_{S/\mathrm{CRIS}}$ 记晶体拓扑的 Frobenius 自同态. 如果 E 是 $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$ 上的层, 则以 E^σ 记 $f_{S/\mathrm{CRIS}}^*(E)$.

设 G 是 S 上的交换层, $F: G \to G^{(p)}$ 为 Frobenius 同态, $V: G^{(p)} \to G$ 为 Verschiebung 同态. 则有同态

$$F: \mathscr{E}xt^i_{S/\Sigma}(\underline{G}, E)^\sigma \longrightarrow \mathscr{E}xt^i_{S/\Sigma}(\underline{G}, E^\sigma),$$

$$V: \mathscr{E}xt^i_{S/\Sigma}(\underline{G}, E^\sigma) \longrightarrow \mathscr{E}xt^i_{S/\Sigma}(\underline{G}, E)^\sigma.$$

II. 设 F 是晶体拓扑 CRIS(S/Σ) 的层. 如果 F 是 $\mathscr{O}_{S/\Sigma}$ 模, 并且从 CRIS(S/Σ) 的任一态射 $u:(U',T',\delta')\to(U,T,\delta)$ 所得出的态射 $u^*: F_{(U,T,\delta)}\to F_{(U',T',\delta')}$ 均为同构, 则我们说 F 是 $\mathscr{O}_{S/\Sigma}$ **模晶体** (module crystal).

III. 设 $\Sigma=\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ ($\mathbb{Z}_p$ 为 p 进整数环), $\mathscr{J}=p\mathscr{O}_\Sigma$, 在 $\mathscr{J}$ 上 PD 的结构为 $\gamma_n(x)=\frac{x^n}{n!}$. 设 S 为特征为 p 的 Σ 概形. 设 $f: A\to S$ 为 Abel 概形. 则有

定理 3.4.4 (1) $R^1f_{\mathrm{CRIS}*}(\mathscr{O}_{A/\Sigma})$ 是秩为 $2n$ 的局部自由 $\mathscr{O}_{S/\Sigma}$ 模, 其中 n 是 f 的相对维数, 并且 $R^1f_{\mathrm{CRIS}*}(\mathscr{O}_{A/\Sigma})$ 为 $\mathscr{O}_{S/\Sigma}$ 模晶体.

(2) $\mathscr{E}xt^1_{S/\Sigma}(\underline{A},\mathscr{O}_{S/\Sigma})\cong R^1f_{\mathrm{CRIS}*}(\mathscr{O}_{A/\Sigma})$.

我们以 $\mathbb{D}(A)$ 记 $\mathscr{E}xt^1_{S/\Sigma}(\underline{A},\mathscr{O}_{S/\Sigma})$. 则有 Frobenius 同态 $F:\mathbb{D}(A)^\sigma\to\mathbb{D}(A)$ 和 Verschiebung 同态 $V:\mathbb{D}(A)\to\mathbb{D}(A)^\sigma$. 我们称 $(\mathbb{D}(A),F,V)$ 为 A 的 **Dieudonné 晶体** (Dieudonné crystal).

为了证明 $R^1f_{\mathrm{CRIS}*}(\mathscr{O}_{A/\Sigma})$ 是一个晶体, 我们作以下的考虑. 暂时以 F 记 $R^1f_{\mathrm{CRIS}*}(\mathscr{O}_{A/\Sigma})$. 按晶体的定义, 对 CRIS$(S/\Sigma)$ 内任一态射 $u:(U',T',\delta')\to(U,T,\delta)$, 需要证明有同构 $u^*F_T\to F_{T'}$. 可以假设 T 是仿射. 设 $A_U=A\times_S U$ 及 $f_{A_U/T}: A_U\to U\to T$. 我们知有拓扑投射 (projection of topos):

$$(f_{A_U/T})_*:(A_U/T,\delta)_{\mathrm{CRIS},\tau}\longrightarrow T_\tau,$$

可以计算 $(f_{\mathrm{CRIS}})_*$ 如下:

$$R^*f_{\mathrm{CRIS}*}(\mathscr{O}_{A/\Sigma})_T\cong R^*(f_{A_U/T})_*(\mathscr{O}_{A_U/T}).$$

因为 $U\to T$ 是零浸入 (nilimmersion), 所以 A_U 可以提升为 T 上的 Abel 概形 $\widetilde{A}$:

$$\begin{array}{ccc} A_U & \dashrightarrow & \widetilde{A} \\ \downarrow & & \vdots\ \tilde{f} \\ U & \longrightarrow & T \end{array}$$

并且有标准同构

$$R^*(f_{A_U/T})_*(\mathscr{O}_{A_U/T})=\mathbb{R}^*\widetilde{f}_*(\Omega^\bullet_{\widetilde{A}/T}).$$

现在可以用换基同构:

$$\begin{array}{ccc} A' & \longrightarrow & \widetilde{A} \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{f}} \\ T' & \xrightarrow{u} & T \end{array}$$

$$\mathbb{L}u^*R^*\widetilde{f}_*(\Omega^\bullet_{\widetilde{A}/T})=\mathbb{R}^*f'_*(\Omega^\bullet_{A'/T'}).$$

加上 $R^q f_*(\Omega^p_{A'/T})$ 局部自由, 或直接用前面, 得到

$$u^* R^1 \widetilde{f}_*(\Omega^\bullet_{\widetilde{A}/T}) = R^1 f'_*(\Omega^\bullet_{A'/T'}).$$

设 G 为交换 S 群概形, 则按以下规则得 $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)_\tau$ 上的层记为 $\underline{G}$:

$$\underline{G}(U, T, \delta) = \mathrm{Hom}_S(U, G).$$

我们以 $\mathfrak{Ab}_{S/\Sigma}$ 记 $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$ 上的交换层.

利用 Eilenberg-Maclane 代数的方法作同调代数得知有复形 $C_\bullet \to \underline{G} \to 0$ 使得当 $n \leqslant 2$ 有

$$\mathscr{E}xt^n_{S/\Sigma}(\underline{G}, F) \cong \mathscr{E}xt^n_{S/\Sigma}(C_\bullet, F).$$

对 $F \in \mathfrak{Ab}_{S/\Sigma}$ 成立 (参看 [42] §2.2.2 及 (2.1.6.1)). 这复形是这样定义:

$$C_0 = \mathbb{Z}[\underline{G}], \qquad C_1 = \mathbb{Z}[\underline{G}^2],$$

$$C_2 = \mathbb{Z}[\underline{G}^3] \times \mathbb{Z}[\underline{G}^2],$$

$$C_3 = \mathbb{Z}[\underline{G}^4] \times \mathbb{Z}[\underline{G}^3] \times \mathbb{Z}[\underline{G}^3] \times \mathbb{Z}[\underline{G}^2] \times \mathbb{Z}[\underline{G}].$$

$\partial_1 : C_1 \to C_0$ 是

$$\partial_1[x, y] = -[y] + [x + y] - [x].$$

$\partial_2 : C_2 \to C_1$ 由下面公式定义:

$$\partial_2[x, y, z] = -[y, z] + [x + y, z] - [x, y + z] + [x, y],$$

$$\partial_2[x, y] = [x, y] - [y, x].$$

最后 $\partial_3 : C_3 \to C_2$ 定义为

$$\partial_3[x, y, z, w] = -[y, z, w] + [x + y, z, w] - [x, y + z, w] + [x, y, z + w] - [x, y, z],$$
$$\partial_3[x, y, z] = -[y, z] + [x + y, z] - [x, z] - [x, y, z] + [x, z, y] - [z, x, y],$$
$$\partial_3[x, y] = [x, y] + [y, x],$$
$$\partial_3[x] = [x, x].$$

这些公式并不显然 (参见 [42] §2.1.5).

我们有收敛谱序列

$$E_1^{p,q} = \mathscr{E}xt^q_{S/\Sigma}(C_p, F) \Rightarrow \mathscr{E}xt^n_{S/\Sigma}(C_\bullet, F) = H^n.$$

设 $C_p = \prod_\alpha \mathbb{Z}[\underline{G}^{n_\alpha}]$, $f_{n_\alpha} : G^{n_\alpha} \to S$. 则

$$\mathscr{E}xt^q_{S/\Sigma}(C_p, F) = \bigoplus_\alpha R^q(f_{n_\alpha})_{\mathrm{CRIS}\,*}((f_{n_\alpha})^*_{\mathrm{CRIS}}(F)).$$

如此便有

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_\alpha R^q(f_{n_\alpha})_{\mathrm{CRIS}\,*}((f_{n_\alpha})^*_{\mathrm{CRIS}}(F)) \Rightarrow \mathscr{E}xt^n_{S/\Sigma}(\underline{G}, F).$$

我们现在开始考虑 $\mathscr{E}xt^n_{S/\Sigma}(\underline{A}, \mathscr{O}_{S/\Sigma})$. 先写下谱序列的运算

$$d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r,q-r+1},$$

及

$$E_r^{p,q} = \mathrm{Ker}(d_r^{p,q}) / \mathrm{Im}(d_r^{p-r,q+r-1}).$$

现算 $q=0$ 的项, 有正合序列

$$E_1^{0,0} \longrightarrow E_1^{1,0} \longrightarrow E_1^{2,0} \longrightarrow E_1^{3,0},$$

注意, 在这里 $C_1 = \mathbb{Z}[A^2]$, A^2 仍然是 Abel 概形, 而光滑固有几何连通的 H^0 是等于系数. 所以 $E_1^{1,0} = \mathscr{O}_{S/\Sigma}$. 同样从 C_3 的每一个因子得一个 $\mathscr{O}_{S/\Sigma}$. 这样 $E_1^{3,0} = \mathscr{O}^5_{S/\Sigma}$. 从 ∂_i 的定义我们得 $E_1^{*,0}$ 的序列 (例如: 从 ∂_1 知 $d_1^{0,0} = -\mathrm{id} + \mathrm{id} - \mathrm{id}$):

$$\mathscr{O}_{S/\Sigma} \xrightarrow{-\mathrm{id}} \mathscr{O}_{S/\Sigma} \xrightarrow{0} (\mathscr{O}_{S/\Sigma})^2 \xrightarrow{d_1^{2,0}} (\mathscr{O}_{S/\Sigma})^5,$$

其中

$$d_1^{2,0}(f,g) = (f, f+g, -f+g, -2g, -g).$$

所以 $d_1^{2,0}$ 是单射. 因此 $E_2^{2,0} = 0$. 另外由于 $d_1^{1,0} = 0$ 及 $d^{0,0} = -\mathrm{id}$, 知 $E_2^{1,0} = 0$.

现在来看边界序列

$$\begin{array}{ccccccccc} \longrightarrow & E_2^{1,0} & \longrightarrow & H^1 & \longrightarrow & E_2^{0,1} & \longrightarrow & E_2^{2,0} & \longrightarrow \cdots \\ & \| & & & & & & \| & \\ & 0 & & & & & & 0 & \end{array}$$

于是便得到

$$\mathscr{E}xt^1_{S/\Sigma}(\underline{A}, \mathscr{O}_{S/\Sigma}) \cong R^1 f_{\mathrm{CRIS}\,*}(\mathscr{O}_{A/\Sigma}).$$

现在计算 $E_1^{*,1}$. 按 Künneth 公式有

$$R^1 f_{n_\alpha\,\mathrm{CRIS}\,*}(\mathscr{O}_{A^{n_\alpha}/\Sigma}) = \bigoplus_{n_\alpha} R^1 f_{\mathrm{CRIS}\,*}(\mathscr{O}_{A/\Sigma}).$$

记 $R^1 f_{\mathrm{CRIS}*}(\mathscr{O}_{A/\Sigma})$ 为 M. 例如

$$E_1^{1,1} = \mathscr{E}xt^1_{S/\Sigma}(C_1, \mathscr{O}_{S/\Sigma}) = R^1 f_{1\,\mathrm{CRIS}*}(\mathscr{O}_{A^2/\Sigma}) = M^2.$$

算得 $E_1^{0,1} \to E_1^{1,1} \to E_1^{2,1} \to \cdots$ 为

$$M \xrightarrow{0} M^2 \xrightarrow{d_1^{1,1}} M^3 \oplus M^2 \longrightarrow \cdots$$

其中 $d_1^{1,1} = (\partial^1, \partial^2)$, 而 $\partial^1(m_1, m_2) = (-m_1, 0, m_2)$. 所以 $d_1^{1,1}$ 为单射. 于是 $E_2^{1,1} = 0$. 由 $d_1^{0,1} = 0$ 知 $E_2^{0,1} = 0$.

IV. 固定 Σ 概形 S. 设 S 的特征为 p. 我们把 S 概形 X 看作由 X 所表示的 fppf 层 $\mathrm{Hom}(\bullet, X)$.

所谓 S 群是指定义在 $(\mathfrak{Sch}/S)_{\mathrm{fppf}}$ 上取值为交换群的 fppf 层. 按照上面的看法, 我们不区分可表 S 群和 S 群概形.

设 G 为局部自由有限 S 群. 假设 G 为 p 扭群. 则存在 Abel S 概形 A^0, A^1 及局部在 S 上的正合序列

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow A^0 \longrightarrow A^1 \longrightarrow 0.$$

于是有正合序列

$$\mathscr{E}xt^1_{S/\Sigma}(\underline{A}^1, \mathscr{O}_{S/\Sigma}) \longrightarrow \mathscr{E}xt^1_{S/\Sigma}(\underline{A}^0, \mathscr{O}_{S/\Sigma}) \longrightarrow \mathscr{E}xt^1_{S/\Sigma}(\underline{G}, \mathscr{O}_{S/\Sigma}) \longrightarrow 0.$$

定理 3.4.5　设 G 为局部自由有限 S 群, 则 $\mathscr{E}xt^1_{S/\Sigma}(\underline{G}, \mathscr{O}_{S/\Sigma})$ 为局部有限展示 $\mathscr{O}_{S/\Sigma}$ 模晶体.

我们以 $\mathbb{D}(G)$ 记 $\mathscr{E}xt^1_{S/\Sigma}(\underline{G}, \mathscr{O}_{S/\Sigma})$, 并称之为 G 的 **Dieudonné 晶体** (Dieudonné crystal).

V. 取 Σ 概形 S 如上. 设 G 为 S 群. 如果 G 是 p-BT 群, 则有 $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$ 上的交换群层正合序列

$$0 \longrightarrow \underline{G}(n) \longrightarrow \underline{G} \xrightarrow{p^n} \underline{G} \longrightarrow 0,$$

从而有正合序列

$$\to \mathscr{E}xt^q_{S/\Sigma}(\underline{G}, E) \xrightarrow{p^n} \mathscr{E}xt^q_{S/\Sigma}(\underline{G}, E) \to \mathscr{E}xt^q_{S/\Sigma}(\underline{G}(n), E) \to \mathscr{E}xt^{q+1}_{S/\Sigma}(\underline{G}, E) \to$$

定理 3.4.6　如果 G 是 p-BT 群, 则 $\mathscr{E}xt^1_{S/\Sigma}(\underline{G}, \mathscr{O}_{S/\Sigma})$ 是 $\mathscr{O}_{S/\Sigma}$ 模晶体. 进一步, 如果 G 有高度 h, 则 $\mathscr{E}xt^1_{S/\Sigma}(\underline{G}, \mathscr{O}_{S/\Sigma})$ 是秩为 h 的局部自由 $\mathscr{O}_{S/\Sigma}$ 模.

我们以 $\mathbb{D}(G)$ 记 $\mathscr{E}xt^1_{S/\Sigma}(\underline{G},\mathscr{O}_{S/\Sigma})$, 并称之为 G 的 **Dieudonné 模** (Dieudonné module).

设 A/S 为 Abel 概形, d 是 A/S 的相对维数. 令 $A(\infty)=\varinjlim A(n)$. 则 $A(\infty)$ 是高度为 $2d$ 的 BT 群.

定理 3.4.7 $\mathscr{E}xt^1_{S/\Sigma}(\underline{A},\mathscr{O}_{S/\Sigma})\cong\mathscr{E}xt^1_{S/\Sigma}(\underline{A(\infty)},\mathscr{O}_{S/\Sigma})$. 所以用 A 或用 $A(\infty)$ 定义的 Dieudonné 晶体是一样的.

注 我们有正合序列

$$\longrightarrow\mathscr{H}om(G(n),\mathscr{O}_{S/\Sigma})\longrightarrow\mathscr{E}xt^1_{S/\Sigma}(G,\mathscr{O}_{S/\Sigma})\xrightarrow{\varphi}\mathscr{E}xt^1_{S/\Sigma}(G,\mathscr{O}_{S/\Sigma})$$
$$\longrightarrow\mathscr{E}xt^1_{S/\Sigma}(G(n),\mathscr{O}_{S/\Sigma})\longrightarrow\mathscr{E}xt^2_{S/\Sigma}(G,\mathscr{O}_{S/\Sigma})\longrightarrow\cdots$$

利用 $\mathscr{E}xt^2_{S/\Sigma}(G,\mathscr{O}_{S/\Sigma})=0$, 以及对于给定的 (U,T,δ), 存在 n 使得 $p^n\mathscr{O}_T=0$, 于是对于此 n, $\varphi=p^n$ 是零映射, 即得 $\mathscr{E}xt^1(G,\mathscr{O}_{S/\Sigma})_{(U,T)}\cong\mathscr{E}xt^1(G(n),\mathscr{O}_{S/\Sigma})_{(U,T)}$. 这就使我们从有限群的结果推出 p 可除群的结果.

VI. 设 A 为交换环. 它的 Witt 向量环 $W(A)$ 的加法和乘法是由一组整系数多项式 S_m, P_m 定义的, 即对于 $(a_0,a_1,\cdots)$, $(b_0,b_1,\cdots)\in W(A)$, $(a_0,a_1,\cdots)+(b_0,b_1,\cdots)=(s_0,s_1,\cdots)$, $(a_0,a_1,\cdots)\cdot(b_0,b_1,\cdots)=(p_0,p_1,\cdots)$, 其中

$$s_m=S_m(a_0,a_1,\cdots,a_m;b_0,b_1,\cdots,b_m),$$
$$p_m=P_m(a_0,a_1,\cdots,a_m;b_0,b_1,\cdots,b_m).$$

我们又有 Witt 余向量群 $CW(A)$. 它的元素是向量

$$\underline{a}=(a_{-n})_{n\in\mathbb{N}}=(\cdots,a_{-n},\cdots,a_{-1},a_0),$$

满足以下条件: $a_{-n}\in A$ ($\forall\, n\in\mathbb{N}$), 且存在 (依赖于 $\underline{a}$ 的) 整数 $r,s\geqslant 0$ 使得 $\mathfrak{a}^s=0$, 其中 $\mathfrak{a}$ 是由集合 $\{a_{-n}\mid n\geqslant r\}$ 所生成的 A 的理想. $CW(A)$ 中加法的定义如下: 设 $\underline{a}=(\cdots,a_{-n},\cdots,a_{-1},a_0)$ 和 $\underline{b}=(\cdots,b_{-n},\cdots,b_{-1},b_0)$ 为 $CW(A)$ 的元素, 记 $\underline{a}+\underline{b}=(\cdots,c_{-n},\cdots,c_{-1},c_0)$, 则

$$c_{-n}:=\lim_{m\to\infty}S_m(a_{-m-n},\cdots,a_{-1-n},a_{-n};b_{-m-n},\cdots,b_{-1-n},b_{-n}).$$

我们扩展 CW 的定义. 先定义 CW 预层. 设 X 为 S 概形. 取 $CW(X)$ 为所有满足以下条件的向量 $(a_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$: $a_{-n}\in\Gamma(X,\mathscr{O}_X)$ $(\forall n)$, 且对于任意 $x\in X$, 存在邻域 U_x 和整数 $r,s\geqslant 0$ 使得 $\mathfrak{a}^s|_{U_x}=0$, 其中 $\mathfrak{a}$ 是由集合 $\{a_{-n}\mid n\geqslant r\}$ 所生成的理想. 层化这个预层所得到的层仍记为 CW.

如果 G 是 S 群, 则以 $M(G)$ 记 $\mathrm{Hom}_S(G,CW)$, 并称 $M(G)$ 为 G 的 Dieudonné 模.

定理 3.4.8 设 k 是完全域, $S = \operatorname{Spec} k$, G 是局部自由有限 S 群或是 Barsotti-Tate S 群, 则有同构 $M(G)^\sigma \cong \Gamma(S/\Sigma, \mathbb{D}(G))$.

关于这方面的工作可以看 de Jong[93] 以及他在这方面的多篇文章, 如 [193].

第四章　对偶 Abel 概形

本章的主要内容是讨论 Abel 概形的 Picard 群, 利用它来定义 Abel 概形的对偶. 下章将证明双对偶定理. 由于我们所要处理的 Abel 概形是定义在任意概形 (不一定是域) 上的, 所以我们要克服若干技术困难, 以推广 [264] 中 §8 和 §13 的结果. 我们先要考虑可逆层的刚化以及除子对应. 我们知道, 由抽象的交换群所组成的范畴是 Abel 范畴的标准例子, 但是对于固定的概形 S, 由 S 上的交换群概形所组成的范畴不是 Abel 范畴. 因此我们不能用上同调这样的常见工具. 赋予 Grothendieck 拓扑的交换层范畴是 Abel 范畴. 我们将用此解决 Abel 概形的对偶问题. 关于 Picard 群的一些背景知识读者亦可以参考 [11] 第六章.

4.1　Picard 群

4.1.1　定义

设 X 为概形. 以 X 上的可逆层的同构类为元素的集合记为 $\operatorname{Pic} X$. 以张量积为乘法, 以 $\mathscr{O}_X$ 所在的同构类为恒等元, 对于可逆层 L, 以同态层 $\mathscr{H}om(L, \mathscr{O}_X)$ 所在的同构类为 L 所在的同构类 $[L]$ 的逆元 (即 $[L]^{-1}$), 则 $\operatorname{Pic} X$ 构成交换群, 称为 X 的 Picard 群.

4.1.2　定义的上同调解释

熟知乘性群函子

$$\mathbb{G}_{\mathrm{m}}:\ \mathfrak{Sch}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathfrak{Gr}$$
$$T \longmapsto \Gamma(T, \mathscr{O}_T^*)$$

是可表函子, 并由 $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ 所表示 (t 为变元). 对于任一概形 T, 我们把 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}(T)$ 视为 $\mathscr{O}_T$ 模 $\mathscr{O}_T$ 的自同构群.

设 L 为 X 上的可逆层. 取 X 的开覆盖 $\{U_i\}$, 使得有 $\mathscr{O}_{U_i}$ 模同构

$$\varphi_i:\ L|_{U_i} \xrightarrow{\approx} \mathscr{O}_{U_i}.$$

于是 $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ 为 $\mathscr{O}_{U_i \cap U_j}$ 的自同构, 即 $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(U_i \cap U_j)$.

反之, 若有 $\theta_{i,j} \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(U_i \cap U_j)$ 满足黏合条件:

$$\theta_{i,j} \circ \theta_{j,i} = 1, \qquad \theta_{i,k} = \theta_{i,j} \circ \theta_{j,k},$$

则可以把 $\mathscr{O}_{U_i}$ 和 $\mathscr{O}_{U_j}$ 沿 $U_i \cap U_j$ 黏合起来, 从而给出可逆层 L, 即是说, 若 $x \in U_i \cap U_j$, 我们用 $\theta_{i,j}: (\mathscr{O}_{U_j})_x \to (\mathscr{O}_{U_i})_x$ 把 $(\mathscr{O}_{U_j})_x$ 和 $(\mathscr{O}_{U_i})_x$ 等同起来 (见 [142] 0.3.3.1).

这里黏合的条件是: $\theta_{i,j}$ 是 Čech 上闭链. 由上面的讨论可知有同构

$$\mathrm{Pic}\, X \cong H^1_{\mathrm{Zar}}(X, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}).$$

另一方面, 由 Grothendieck 拓扑结构的上同调群的定义, 亦有 $H^1_{\mathrm{Zar}}(X, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}) = H^1(X, \mathscr{O}_X^*)$.

4.1.3 相对 Picard 函子

我们又可以这样看黏合条件: 以 X' 记无交并 $\coprod_i U_i$, 则有自然态射 $p: X' \to X$, 即 $p|_{U_i}$ 是 $U_i \hookrightarrow X$. 显然 p 是 fpqc 态射. 由于 $U_i \times_X U_j = U_i \cap U_j$, 我们得到

$$X' \times_X X' = \coprod_{i,j} U_i \cap U_j \overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}} X' \xrightarrow{\quad p \quad} X,$$

其中第一个因子的投射 p_1 是 $U_i \cap U_j \hookrightarrow U_i$, 而 p_2 是 $U_i \cap U_j \hookrightarrow U_j$. 这时

$$\theta_{i,j}: \mathscr{O}_{U_j}|_{U_i \cap U_j} \longrightarrow \mathscr{O}_{U_i}|_{U_i \cap U_j}$$

所满足的黏合条件就是它的下降资料 (参见 [11] §3.3).

在 [146] VIII, §1 中, Grothendieck 证明了这样的下降定理: 设 $p: S' \to S$ 为忠实平坦拟紧态射, 则由 $\mathscr{F} \mapsto p^*\mathscr{F}$ 定义的函子是从 "拟凝聚 S 模" 至 "拟凝聚 S' 模和下降资料" 的范畴等价.

我们知道 $H^1_{\mathrm{fpqc}}(X, \mathbb{G}_{\mathrm{m}})$ 的任一元素定义 X 上的一个拟凝聚层 L, 并且 L 关于 fpqc 拓扑局部同构于 $\mathscr{O}_X$, 即有 fpqc 覆盖 $\{U_i \xrightarrow{\alpha_i} X\}$, 使得有同构 $\varphi_i: \alpha_i^* L \cong \alpha_i^* \mathscr{O}_X$. 如上面讨论的那样, α_i 给出 fpqc 态射 $p: X' := \coprod U_i \to X$. 此时 $\theta_{i,j} := \varphi_i \varphi_j^{-1}$ 必满足黏合条件. 而此黏合条件正是下降资料. 所以, 按 Grothendieck 的下降定理, L 是 X 上 (关于 Zariski 拓扑) 的可逆层, 即 L 决定了 $H^1_{\mathrm{Zar}}(X, \mathbb{G}_{\mathrm{m}})$ 中的一个元素. 这样我们有以下的自然单态射:

$$H^1_{\mathrm{Zar}}(X, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}) \hookrightarrow H^1_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}) \hookrightarrow H^1_{\mathrm{fppf}}(X, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}) \hookrightarrow H^1_{\mathrm{fpqc}}(X, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}).$$

固定一个基概形 S. 对于给定的 S 概形 $X \xrightarrow{f} S$, 将小 fppf 位形 X_{fppf} 上的预层 $T \mapsto \mathrm{Pic}(X \times_S T) = H^1(X \times_S T, \mathbb{G}_{\mathrm{m}})$ 作层化, 得到的 X_{fppf} 上的 fppf 层记为 $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$, 称之为 ($X$ 在 S 上的) **相对 Picard 函子**. 通过高次直像的计算可知

$$\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S} = R^1 f_{*\,\mathrm{fppf}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}).$$

我们把 $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ 的 S 值点, 即群 $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}(S)$, 记为 $\mathrm{Pic}_S(X)$, 于是便得

$$\mathrm{Pic}_S(X) = H^0(S, R^1 f_{*\,\mathrm{fppf}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}})).$$

4.2　可逆层的刚化

4.2.1　记号

设 E 为 n 个元素组成的有限集, S 为概形, $f_i: X_i \to S\ (i \in E)$ 为 S 概形, $e_i: S \to X_i$ 为 X_i 在 S 上的截面. 设 $J \subset I \subset E$ 为 E 的子集. 我们引入以下记号 ($\emptyset$ 表示空集):

1) $X_I = \prod_{i \in I} X_i$, 以 X 记 X_E, $X_\emptyset$ 为 S.

2) $\pi^I_J: X_I \to X_J$ 为投射到 J 因子, 以 π_J 记 $\pi^E_J: X \to X_J$.

3) 由 $e_i\ (i \in I - J)$ 所决定的浸入记为 s^I_J:

$$\begin{array}{ccc} X_J & \xhookrightarrow{\ s^I_J\ } & X_I \\ & \searrow \quad \swarrow \nwarrow_{e} & \\ & S & \end{array}$$

其中 $e = \prod_{i \in I-J} e_i$, 以 s_J 记 s^E_J, $s_\emptyset$ 为 $\prod_{i \in E} e_i$.

4) 以 P_J 记 $s_J \circ \pi_J: X \to X$. 易见 $P_J \circ P_J = P_J$.

4.2.2　刚化的定义

定义 4.2.1　设 L 为 X 上的可逆层. L (在 X 上) 相对于 $\{e_i\}$ 的刚化 (rigidification) 是指以下的一组资料: 对于每个子集 $I \subsetneqq E$, 给定同构 $\alpha_I: \mathscr{O}_{X_I} \xrightarrow{\sim} s^*_I(L)$, 且这些同构满足相容性条件, 即对于任意的 $J \subset I \subsetneqq E$, 有 $(s^I_J)^*(\alpha_I) = \alpha_J$.

在 X 上相对于 $\{e_i \mid i \in E\}$ 的可刚化的可逆层的同构类组成 $\mathrm{Pic}\, X$ 的子群, 记为 $\mathrm{Pic}_{e_i, i \in E}\, X$.

当 E 只有一个元素时, S 概形 $f: X \to S$ 上的可逆层 L 的刚化是指同构 $\alpha: \mathscr{O}_S \xrightarrow{\sim} e^*(L)$. 如果 (L, α) 和 (M, β) 都是相对于 e 的可逆层的刚化, 则二者之间的同构是指可逆层的同构 $u: L \xrightarrow{\sim} M$, 使得 $e^*(u)\alpha = \beta$. 当 E 不只含一个元素时, 我们作如下的推广: $u: (L, \alpha) \xrightarrow{\sim} (M, \beta)$ 为同构是指同构 $u: L \xrightarrow{\sim} M$ 满足条件 $s^*_I(u)\alpha_I = \beta_I\ (\forall\, I \subsetneqq E)$.

4.2.3 泛有

定义 4.2.2 设 $f: X \to S$ 为 S 概形. 我们说泛有 $f_*\mathscr{O}_X = \mathscr{O}_S$, 如果下面的两个条件成立: (1) 由 f 所决定的结构态射 $\mathscr{O}_S \to f_*(\mathscr{O}_X)$ 是同构, (2) $f_*(\mathscr{O}_X)$ 的 "构造与换基交换"(formation commutes with base change), 即是说, 由任何卡氏图:

$$
\begin{array}{ccc}
X & \longleftarrow & X_T \\
{\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f_T} \\
S & \xleftarrow[g]{} & T
\end{array}
$$

所决定的态射 $g^*f_*(\mathscr{O}_X) \to (f_T)_*(\mathscr{O}_{X_T})$ 为同构 (此卡氏图的含义即是 $X_T = X \times_S T$).

4.2.4 刚化可逆层的自同构群

命题 4.2.1 设 (L,α) 是刚化可逆层. 假设泛有 $(f_i)_*\mathscr{O}_{X_i} = \mathscr{O}_S$, 则 (L,α) 的自同构群只含有恒等元.

证明 我们只对于 E 仅含一个元素的情形给出证明 (其余的证明类似). 此时有同构 $\alpha: \mathscr{O}_S \to e^*L$. 首先, 可逆层 L 的自同构 u 是由乘 $b \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X^*)$ 给出的, 即: 若 $U \subset X$ 为开集, 则自同构 u 形如

$$
\begin{aligned}
u: L(U) &\longrightarrow L(U) \\
v &\longmapsto bv.
\end{aligned}
$$

于是 $e^*(u)$ 由 e^*b 所决定. 但刚化可逆层的自同构要求 $e^*(u)\cdot\alpha = \alpha$, 故必有 $e^*b = 1$. 由假设 $\mathscr{O}_S \to f_*(\mathscr{O}_X)$ 为同构, 即有同构 $\Gamma(S, \mathscr{O}_S^*) \to \Gamma(S, f_*(\mathscr{O}_X^*)) = \Gamma(X, \mathscr{O}_X^*)$. 于是存在 $a \in \Gamma(S, \mathscr{O}_S^*)$ 使得 $b = f^*(a)$. 这时有 $1 = e^*b = (fe)^*(a)$, 而 $fe = \mathrm{id}$, 于是 $a = 1$, 故 $b = 1$. □

设 $E = \{1,2\}$, 则有 $X = X_1 \times_S X_2$, 而 $s_1: X_1 \to X$ 是 $(e_2)_{X_1}$, 即由下图所决定的虚箭头所示的态射:

$$
\begin{array}{ccccc}
X_1 & & \xrightarrow{\quad \mathrm{id}_{X_1} \quad} & & X_1 \\
{\scriptstyle f_1}\big\downarrow & \searrow^{(e_2)_{X_1}} \text{(虚)} & & & \\
S & & X_1 \times X_2 & \longrightarrow & X_1 \\
& {\scriptstyle e_2}\searrow & \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f_1} \\
& & X_2 & \xrightarrow[f_2]{} & S
\end{array}
$$

(在前面我们把上图简记为 $\begin{array}{ccc} X_1 & \longrightarrow & X \\ & \searrow & \swarrow \\ & S & e_2 \end{array}$). 同样, $s_2:\ X_2\to X$ 是 $(e_1)_{X_2}$, 而 $s_\emptyset=e_1\times e_2$. $X_1\times_S X_2$ 上的可逆层 L 的刚化是指同构 $\alpha_1:\ \mathscr{O}_{X_1}\xrightarrow{\sim}s_1^*L$, $\alpha_2:\ \mathscr{O}_{X_2}\xrightarrow{\sim}s_2^*L$ 及 $\alpha_\emptyset:\ \mathscr{O}_S\xrightarrow{\sim}s_\emptyset^*L$, 并且对于 $i=1,2$, 有 $(e_i)^*(\alpha_i)=\alpha_\emptyset$ (在这里, $s_\emptyset^i=e_i$). 于是 $\mathrm{Pic}_{e_1,e_2}(X_1\times_S X_2)$ 即是 $\mathrm{Pic}(X_1\times_S X_2)$ 的子群, 其元素为相对于 $\{e_1,e_2\}$ 刚化的可逆层同构类.

4.2.5　可刚化的充要条件

引理 4.2.2　设 L 是 X 上的可逆层. 对于 $I\subset E$, 将 $L\otimes P_I^*(L^{-1})$ 记为 $(1-P_I)(L)$, 则以下等式成立:

(1) $s_I^*((1-P_I)(L))=\mathscr{O}_{X_I}$,

(2) $(1-P_I)\circ(1-P_J)=(1-P_J)\circ(1-P_I)=1-P_I-P_J+P_{I\cap J}$.

引理 4.2.3　设 E 有 n 个元素. 以 r 记 $\prod_I(1-P_I)$, 其中 I 跑遍 E 的 $n-1$ 元子集, $\prod_I$ 表示算子的合成. 设 L 是 X 上的可逆层. 则有

(1) $r(L)=\bigotimes_{I\subset E}P_I^*(L^{(-1)^{n-\#I}})$ (其中 $\#I$ 表示 I 的元素个数), 并且 $r(L)$ 相对于 e_i $(i\in E)$ 为刚化的,

(2) $r\circ r=r$. 并且, 如果 L 相对于 e_i $(i\in E)$ 为刚化的, 则 $r(L)\cong L$.

设 F 是 E 的子集, 则有 E 的子集 I_j, $1\leqslant j\leqslant n-\#F$, $\#I_j=n-1$, 使得 $F=\bigcap_j I_j$.

设 $J\subseteq E$, $\#J\leqslant n-1$. 又设 $I\subseteq E$, $\#I=n-1$ 并且 $J\supseteq I$. 令

$$N=\prod_{\substack{K\subset E\\ \#K=n-1\\ K\neq I}}(1-P_K)L,$$

则 $r(L)=(1-P_I)N$. 于是

$$s_J^*r(L)=(s_J^I)^*s_I^*(1-P_I)N=(s_J^I)^*\mathscr{O}_{X_I}=\mathscr{O}_{X_J}.$$

这就是说 $r(L)$ 相对于 e_i 为刚化的.

引理 4.2.4　设 L 是 X 上的可逆层. 则 L 相对于 e_i $(i\in E)$ 可刚化的充分必要条件是: 若 $I\subset E$, $\#I=\#E-1$, 则 $s_I^*(L)\cong\mathscr{O}_{X_I}$.

4.3　除子对应

4.3.1　除子对应函子

固定基概形 S. 设 X_1,X_2 为 S 概形. 由纤维积出发有态射 $(\pi_1)_T$ 如下:

$$
\begin{array}{ccccc}
(X_1 \times_S X_2) \times_S T & & & & \\
\downarrow f_1 & \overset{(\pi_1)_T}{\searrow} & & \searrow & \\
X_1 \times_S X_2 & & X_1 \times_S T & \longrightarrow & T \\
& \overset{\pi_1}{\searrow} & \downarrow & & \downarrow \\
& & X_1 & \longrightarrow & S
\end{array}
$$

类似地有 $(\pi_2)_T$. 考虑以 T 为变元的函子 (即预层) 的态射:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Pic}\,(X_1 \times_S T) \times \mathrm{Pic}\,(X_2 \times_S T) &\longrightarrow \mathrm{Pic}\,(X_1 \times_S X_2) \times_S T) \\
(L_1, L_2) &\longmapsto (\pi_1)_T^*(L_1) \otimes (\pi_2)_T^*(L_2).
\end{aligned}
$$

层化之后便得到典范同态:

$$\mathrm{can} : \underline{\mathrm{Pic}}_{X_1/S} \times \underline{\mathrm{Pic}}_{X_2/S} \longrightarrow \underline{\mathrm{Pic}}_{X_1 \times_S X_2/S}.$$

此同态的 fppf 层余核记为 $\underline{\mathrm{Corr}}_{(X_1,X_2)/S}$, 即: $\underline{\mathrm{Corr}}_{(X_1,X_2)/S}$ 是把预层

$$T \longmapsto \mathrm{Pic}\,((X_1 \times_S X_2) \times_S T) \,/\, \mathrm{Im}\,(\mathrm{Pic}\,(X_1 \times_S T) \times \mathrm{Pic}\,(X_1 \times_S T))$$

层化所得的 fppf 层. 以 $\mathrm{Corr}_S(X_1, X_2)$ 记 $\underline{\mathrm{Corr}}_{(X_1,X_2)/S}(S)$. 称 $\underline{\mathrm{Corr}}_{(X_1,X_2)/S}$ 为**除子对应函子** (divisorial correspondence functor). 由 $\underline{\mathrm{Corr}}_{(X_1,X_2)/S}$ 的定义知有 fppf 层正合序列:

$$\underline{\mathrm{Pic}}_{X_1/S} \times \underline{\mathrm{Pic}}_{X_2/S} \xrightarrow{\mathrm{can}} \underline{\mathrm{Pic}}_{X_1 \times_S X_2/S} \longrightarrow \underline{\mathrm{Corr}}_{(X_1,X_2)/S} \longrightarrow 0.$$

我们将证明 $\mathrm{Corr}_S(X_1, X_2)$ 与层同态群同构. 详言之, 考虑满足下述条件的层同态 $\varphi : X_1 \to \underline{\mathrm{Pic}}_{X_2/S}$: φ 把 X_1 的截面 e_1 映为 $\underline{\mathrm{Pic}}_{X_2/S}$ 的单位截面. 所有这样的 φ 组成的集合记为 $\mathrm{Hom}_{e_1}(X_1, \underline{\mathrm{Pic}}_{X_2/S})$. 我们将证明此集合 (构成的群) 与 $\mathrm{Corr}_S(X_1, X_2)$ 同构.

4.3.2 Picard 群的正合序列

命题 4.3.1 设 $f : X \to S$ 是拟紧分离态射, 并且满足 $f_*(\mathscr{O}_X) = \mathscr{O}_S$. 则

(1) 有正合序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}\,(S) \longrightarrow \mathrm{Pic}\,(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}_S\,(X).$$

(2) 设 f 有截面 $e : S \to X$, 则有正合序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}\,(S) \longrightarrow \mathrm{Pic}\,(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}_S\,(X) \longrightarrow 0,$$

并且态射 $\mathrm{Pic}_e\,(X) \hookrightarrow \mathrm{Pic}\,(X) \to \mathrm{Pic}_S\,(X)$ 的合成为同构, 此同构使得上面的正合序列分裂.

(3) 设 f 有截面 $e: S \to X$, 并且泛有 $f_*(\mathscr{O}_X) = \mathscr{O}_S$, 则对于任一 S 概形 T, 有

$$\mathrm{Pic}_T(X_T) = \mathrm{Pic}(X_T) / \mathrm{Pic}(T) = H^0(T, R^1_{\mathrm{Zar}}(f_T)_*(\mathscr{O}^*_{X_T})),$$

其中

$$\begin{array}{ccc} X_T = X \times_S T & \longrightarrow & X \\ \downarrow{\scriptstyle f_T} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ T & \longrightarrow & S \end{array}$$

证明　(1) 按 [145] 1.7.21, 由于 $f_*(\mathscr{O}_X) = \mathscr{O}_S$ 在平坦换基 $S' \to S$ 下不变, 故若在 S 上取小 fppf 位形, 则有 $f_*((\mathbb{G}_{\mathrm{m}})_X) = (\mathbb{G}_{\mathrm{m}})_S$. 应用 Leray 谱序列, 即有正合序列

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^1(S, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}) \longrightarrow H^1(X, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}) \longrightarrow H^0(S, R^1 f_{*,\,\mathrm{fppf}}\mathbb{G}_{\mathrm{m}}) \\ &\longrightarrow H^2_{\mathrm{fppf}}(S, (\mathbb{G}_{\mathrm{m}})_S) \longrightarrow H^2_{\mathrm{fppf}}(X, (\mathbb{G}_{\mathrm{m}})_X). \end{aligned} \tag{$*$}$$

换句话说, 即有正合序列

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathrm{Pic}(S) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}_S(X) \\ &\longrightarrow H^2_{\mathrm{fppf}}(S, (\mathbb{G}_{\mathrm{m}})_S) \longrightarrow H^2_{\mathrm{fppf}}(X, (\mathbb{G}_{\mathrm{m}})_X). \end{aligned} \tag{$**$}$$

于是 (1) 得证.

(2) 利用 f 的截面 e 容易构造态射 $H^2(S, (\mathbb{G}_{\mathrm{m}})_S) \to H^2(X, (\mathbb{G}_{\mathrm{m}})_X)$ 的左逆态射, 故此态射为单射. 由序列 (**) 便得到正合序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(S) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}_S(X) \longrightarrow 0.$$

设 L 为 X 上的可逆层. 由 $e^*(L \otimes f^*e^*(L^{-1})) = \mathscr{O}_S$ 知 $L \otimes f^*e^*(L^{-1})$ 为相对于 e 的刚化. 又 L 与 $L \otimes f^*e^*(L^{-1})$ 在 $\mathrm{Pic}_S(X)$ 中的像相同, 故二态射的合成 $\mathrm{Pic}_e(X) \hookrightarrow \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}_S(X)$ 为满射. 由 (1) 知此二态射的合成是单射, 于是 (2) 得证.

(3) 可由 (1) 和 (2) 推出. □

4.3.3　除子对应与 Picard 群的关系

命题 4.3.2　固定概形 S. 对于 $i = 1, 2$, 设态射 $f_i: X_i \to S$ 有截面 $e_i: S \to X_i$, 并且泛有 $(f_i)_*(\mathscr{O}_{X_i}) = \mathscr{O}_S$. 则

(1) 典范映射 $\mathrm{Pic}_S(X_1) \times \mathrm{Pic}_S(X_2) \xrightarrow{\mathrm{can}} \mathrm{Pic}_S(X_1 \times_S X_2)$ 为单射.

(2) 以下的两个典范同态 u, v 均为同构:

$$\mathrm{Pic}_{(e_1,e_2)}(X_1\times_S X_2)\xrightarrow{u}\mathrm{Pic}_S(X_1\times_S X_2)\,/\,\mathrm{Pic}_S(X_1)\times\mathrm{Pic}_S(X_2)$$
$$\xrightarrow{v}\mathrm{Corr}_S(X_1,X_2).$$

由此所得到的同构

$$\mathrm{Corr}_S(X_1,X_2)\xrightarrow{w}\mathrm{Pic}_{(e_1,e_2)}(X_1\times_S X_2)$$

可以描述如下：设 $\mathscr{L}\in\mathrm{Corr}_S(X_1,X_2)$, $\mathscr{L}$ 决定的同构类 $[L]\in\mathrm{Pic}_S(X_1\times_S X_2)$, 则 $w(\mathscr{L})=[r(L)]$, 其中 r 是刚化映射, $r(L)=P_{12}^*(L)\otimes P_1^*(L^{-1})\otimes P_2^*(L^{-1})\otimes P_\emptyset^*(L)$.

(3) 存在以下典范同构：

$$\mathrm{Corr}_S(X_1,X_2)\xrightarrow[w_1]{\approx}\mathrm{Hom}_{e_1}(X_1,\ \underline{\mathrm{Pic}}_{X_2/S})$$
$$\mathrm{Corr}_S(X_1,X_2)\xrightarrow[w_2]{\approx}\mathrm{Hom}_{e_2}(X_2,\ \underline{\mathrm{Pic}}_{X_1/S})$$

证明　由命题 4.3.1 知 $\mathrm{Pic}_S(X)=\mathrm{Pic}(X)\,/\,\mathrm{Pic}(S)$, 于是 (1) 为真. 亦知 u 为同构. 又知 $\underline{\mathrm{Pic}}_{X_2/S}(X_1)$ 等于 $X_1\times_S X_2$ 上的所有可逆层 L 的等价类 (其中 L 满足 $s_1^*(L)\cong\mathscr{O}_{X_1}$, $s_1: X_1\to X_1\times_S X_2$ 看作 $X_1\times_S X_2\xrightarrow{\pi_1}X_1$ 的截面).

从另一角度来看, $\underline{\mathrm{Pic}}_{X_2/S}(X_1)=\mathrm{Hom}(X_1,\ \underline{\mathrm{Pic}}_{X_2/S})$. 而 $\varphi: X_1\to\underline{\mathrm{Pic}}_{X_2/S}$ 作为层态射是函子态射, 即对于任一 S 概形 T, 有

$$\varphi_T:\ \mathrm{Hom}(T,X_1)=X_1(T)\longrightarrow\underline{\mathrm{Pic}}_{X_2/S}(T)=\mathrm{Pic}(X_2\times_S T).$$

此时 Hom_{e_1} 的条件便是要求 $\varphi_S(e_1)=\mathscr{O}_{X_2}$. 如果 φ 对应于 $X_1\times_S X_2$ 上的可逆层 L, 则这个条件就是 $s_2^*(L)\cong\mathscr{O}_{X_2}$:

$$\begin{array}{ccccc}
X_2 & \overset{s_2}{\dashrightarrow} & X_1\times_S X_2 & \longrightarrow & X_2 \\
\downarrow f_2 & & \downarrow & & \downarrow f_2 \\
S & \xrightarrow{e_1} & X_1 & \xrightarrow{f_1} & S
\end{array}\qquad (X_2\xrightarrow{id}X_2)$$

从上面的讨论以及 $\mathrm{Pic}_{(e_1,e_2)}$ 的定义我们得到典范态射:

$$\mathrm{Pic}_{(e_1,e_2)}(X_1\times_S X_2)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{e_1}(X_1,\ \underline{\mathrm{Pic}}_{X_2/S}).$$

此态射是同态, 其原因是: 在 $X_1 \times_S X_2$ 上的可逆层对于 e_1, e_2 为刚化的充要条件是 $s_i^* L \cong \mathscr{O}_{X_i}$ $(i=1,2)$. 这个同构与换基相容, 于是我们得知以下两个函子作为 fppf 层同构:

$$T \longmapsto \mathrm{Pic}_{((e_1)_T,(e_2)_T)}((X_1 \times_S X_2)_T),$$

$$T \longmapsto \mathrm{Hom}_{(e_1)_T}((X_1)_T,\ \underline{\mathrm{Pic}}_{(X_2)_T/T}).$$

这意味着 v 及 w_1 为同构. 这就说明了 (2), (3) 为真. □

如果我们把 $\mathrm{Corr}_S\,(X_1, X_2)$ 的元素看作 $X_1 \times_S X_2$ 上的可逆层 L (加上刚化条件 $s_i^* L \cong \mathscr{O}_{X_i}$ $(i=1,2)$), 则 $r(L) \cong L$. 另外, 可以考虑 $r: \mathrm{Pic}_S\,(X_1 \times_S X_2) \to \mathrm{Pic}_{(e_1,e_2)}(X_1 \times_S X_2)$, 则有 $\mathrm{Ker}\, r = \mathrm{can}(\mathrm{Pic}_S\,(X_1) \times \mathrm{Pic}_S\,(X_2))$.

4.3.4　赋值准则

固定一个基概形 S. 我们把 S 概形范畴 $\mathfrak{Sch}/S$ 上的 fppf 层所组成的范畴记为 $(\mathscr{F}/S)_{\mathrm{fppf}}$. 如果我们把 S 概形 X 等同于 fppf 层: $\bullet \mapsto \mathrm{Hom}_S(\bullet,\ X)$, 则 $\mathfrak{Sch}/S$ 是 $(\mathscr{F}/S)_{\mathrm{fppf}}$ 的全子范畴.

我们说 "概形态射的性质 (P) 在基变换下不变" 是指: 对于任一概形的纤维积

$$\begin{array}{ccc} T \times_Y X & \longrightarrow & X \\ {\scriptstyle f_T}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ T & \longrightarrow & Y \end{array}$$

如果 f 有性质 (P), 则 f_T 亦有性质 (P).

例如, 态射的性质 "忠实平坦有限展示" 在基变换下不变 (参见 [145]$_1$ 1.6.2 (iii), [145]$_2$ 2.2.13 (i)).

设 F, G 是从 $\mathfrak{Sch}/S$ 到 $\mathfrak{Sets}$ 的反变函子, (P) 是一个在基变换下不变的概形态射的性质, $u: F \to G$ 是函子态射. 我们称 "u 有性质 (P)", 如果 u 满足以下条件: 对于任意 S 概形 T 和 $\mathfrak{Sch}/S$ 上的函子态射 $v: T \to G$, 作函子纤维积

$$\begin{array}{ccc} T \times_G F & \longrightarrow & F \\ {\scriptstyle u_T}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ T & \xrightarrow{\ v\ } & G \end{array}$$

则 $T \times_G F$ 必是概形, 并且 u_T 有性质 (P).

设有函子 $F: (\mathfrak{Sch}/S)^o \to \mathfrak{Sets}$. 我们称 F 是**形式非分歧的**(formally unramified), 如果对于任意的 $\mathscr{O}_S$ 代数 $\mathscr{A}$ 及 $\mathscr{A}$ 的理想 $\mathfrak{g}$ (满足 $\mathfrak{g}^2 = 0$), 皆有单射 $F(\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}) \to F(\mathrm{Spec}(\mathscr{A}/\mathfrak{g}))$ (见 [145]$_4$ 17.1.2 (iii)).

我们说 F 满足**可分性赋值准则**(valuative criterion for separateness), 如果对于 S 上的任一离散赋值环 $\mathscr{A}$, $F(\operatorname{Spec}\mathscr{A}) \to F(\eta)$ 为单射 (η 为 $\operatorname{Spec}(\mathscr{A})$ 的一般点).

我们说 F 满足**固有性赋值准则**(valuative criterion for properness), 如果对于 S 上的任一离散赋值环 $\mathscr{A}$, $F(\operatorname{Spec}\mathscr{A}) \to F(\eta)$ 是同构 (η 为 $\operatorname{Spec}(\mathscr{A})$ 的一般点). (见 [143] 7.3.8, [145] 18.10.20).

4.3.5 除子对应函子的可表性

定理 4.3.3 设 $f_i: X_i \to S$ $(i=1,2)$ 是固有平坦态射, 并且泛有 $(f_i)_*(\mathscr{O}_{X_i}) = \mathscr{O}_S$. 则函子 $\underline{\mathrm{Corr}}_{(X_1,X_2)/S}$ 可由 S 上的群概形 $\mathrm{Corr}_{(X_1,X_2)/S}$ 来表示, 进而言之, 此群概形在 S 上是局部有限生成、非分歧及可分的.

这个定理可由 Grothendieck 的定理 (见 [270] Th. 1) 直接得出. 由 Grothendieck 的定理推导定理需要证明函子 $\underline{\mathrm{Corr}}_{(X_1,X_2)/S}$ 是形式非分歧的并且满足可分性赋值准则 (见 [307] Chap.III §4). 作为此定理的推论有: S 上的群概形 $\mathrm{Corr}_{(X_1,X_2)/S}$ 的单位截面 (identity section) 是既开又闭的浸入. 这个推论的一个重要结果是下面的 "立方定理 (theorem of the cube)".

4.3.6 立方定理

定理 4.3.4(立方定理) 设优先集 E 含有至少三个元素. 设 $f_i: X_i \to S$ $(i \in E)$ 是固有平坦态射, 并且泛有 $(f_i)_*(\mathscr{O}_{X_i}) = \mathscr{O}_S$ 以及 f_i 有截面 $e_i: S \to X_i$. 则 $X = \prod_{i\in E} X_i$ 上相对于 e_i $(i \in E)$ 刚化的可逆层均与 $\mathscr{O}_X$ 同构. 换句话说,

$$\mathrm{Pic}_{(e_i,\ i\in E)}(X) = 0.$$

证明 先考虑 $E = \{1,2,3\}$ 的情形. 记 $X = X_1 \times_S X_2 \times_S X_3$, $X_{i_1 i_2} = X_{i_1} \times_S X_{i_2}$ $(i_1, i_2 \in E)$. 以 C 记表示函子 $\underline{\mathrm{Corr}}_{(X_1,X_2)/S}$ 的 S 群概形.

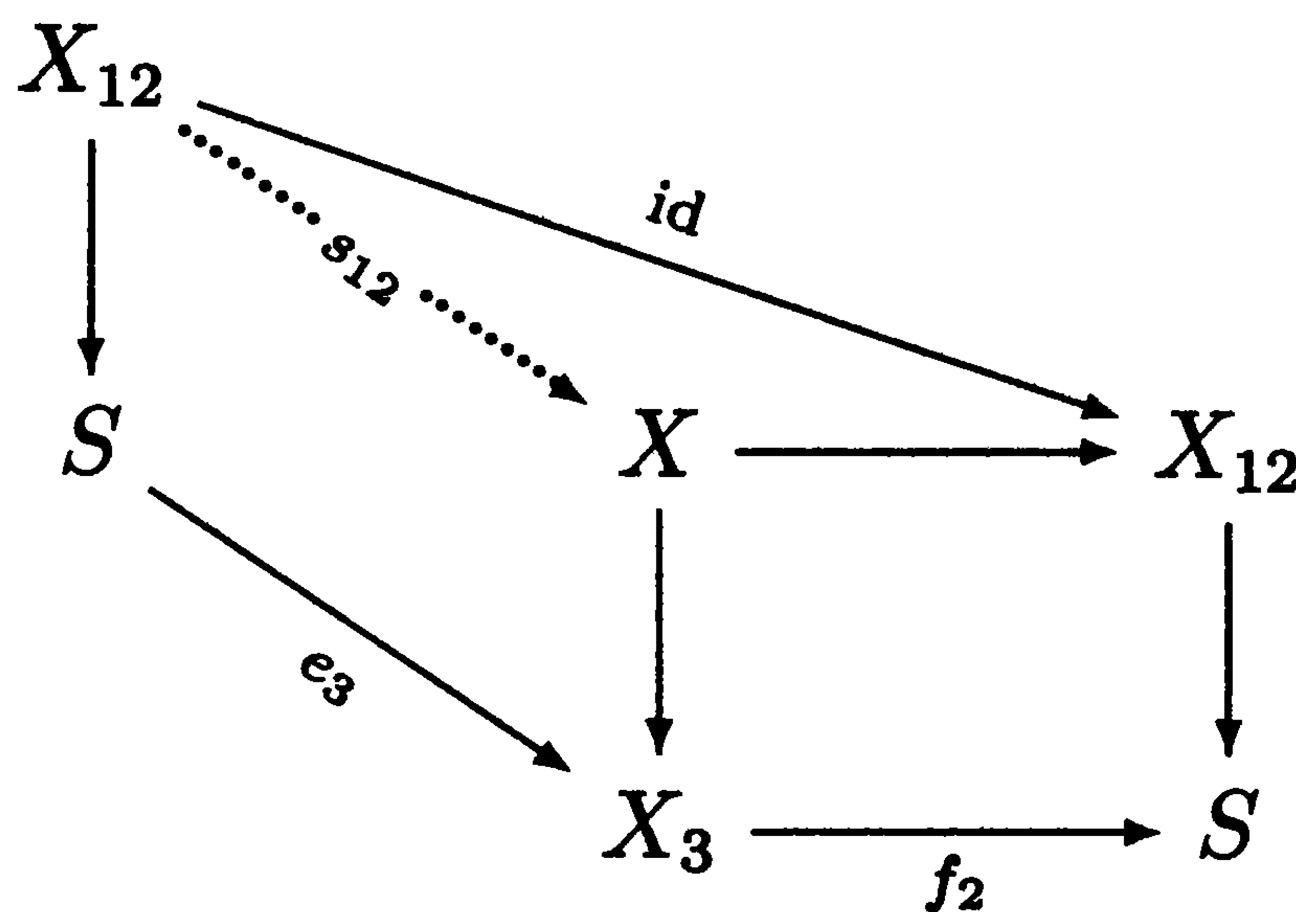
设 L 为 X 上的可逆层, L 相对于 e_i $(i=1,2,3)$ 刚化. 我们需要证明 L 同构于 $\mathscr{O}_X$.

由 C 的定义, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_S(T,C) &= \underline{\mathrm{Corr}}_{(X_1,X_2)/S}(T)\\ &= \mathrm{Pic}\,(X_1 \times_S X_2 \times_S T)\,/\,\mathrm{Pic}\,(X_1 \times_S T) \otimes \mathrm{Pic}\,(X_2 \times_S T).\end{aligned}$$

所以 L 所在的同构类 (视为 $\mathrm{Pic}\,(X_1 \times_S X_2 \times_S X_3)$ 的元素) 决定了 $\mathrm{Hom}_S(X_3, C)$ 的一个元素, 记此元素为 $u: X_3 \to C$. 以 I 记 C 的单位截面. 根据 $\underline{\mathrm{Corr}}_{(X_1,X_2)/S}$ 可表性定理的推论, I 为 C 的既开又闭的子集. 以 Z 记 X_3 的既开又闭的子集 $u^{-1}(I)$.

以 $i: S \to C$ 记 S 群概形 C 的单位截面. 则 i 作为 $\underline{\mathrm{Corr}}_{(X_1,X_2)/S}(S) = \mathrm{Pic}_{(e_1,e_2)}(X_1 \times_S X_2)$ 的单位对应于 $\mathscr{O}_{X_1\times_S X_2}$ 所在的同构类. 另外, u 是 S 同态, u 对应于 X 上的可逆层 L, 于是 $S \xrightarrow{e_3} X_3 \xrightarrow{u} C$ 对应于 s_{12}^*L, 其中 s_{12} 由 e_3 所决定, 如下图所示:



但从 L 相对于 e_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ 是刚化的定义知 $s_{12}^*L \cong \mathscr{O}_{X_1\times_S X_2}$, 于是有 $ue_3(S) \subseteq i(S) = I$, 即有 $e_3(S) \subseteq Z$. 由 $f_3e_3 = \mathrm{id}_S$ 即知 $\forall\, s \in S$, $Z \cap f_3^{-1}(s) \neq \emptyset$.

从泛有 $(f_3)_*(\mathscr{O}_{X_3}) = \mathscr{O}_S$ 知: f_3 在任意 $s \in S$ 处的纤维 $f_3^{-1}(s)$ 是连通的. 由于 Z 既开又闭, 又有 $Z \cap f_3^{-1}(s) \neq \emptyset$, 故必有 $Z \cap f_3^{-1}(s) = f_3^{-1}(s)$. 即有 $Z \supseteq f_3^{-1}(S) = X_3$. 于是 $Z = X_3$. 即 u 分解为 $X_3 \to I \to C$ (I 为 C 的单位截面).

现在注意 u 属于

$$\mathrm{Hom}_S(X_3, C) = \mathrm{Pic}\,(X_1 \times_S X_2 \times_S X_3)\,/\,\mathrm{Pic}\,(X_1 \times_S X_3) \otimes \mathrm{Pic}\,(X_2 \times_S X_3).$$

所以对应于 u 的 L 应同构于 $\mathrm{Pic}\,(X_1 \times_S X_2 \times_S X_3)$ 的单位元 $\mathscr{O}_X \mod (s_{13}^*L \otimes s_{23}^*L)$. 但 L 是刚化的, 故有 $s_{13}^*L \cong \mathscr{O}_{X_{13}}$, $s_{23}^*L \cong \mathscr{O}_{X_{23}}$, 于是得到我们所要结论 $L \cong \mathscr{O}_X$.

若 E 有 n 个元素 $(n > 3)$, 我们以 $n-3$ 个 X_i 的积代替 S, 问题便归结为比较小的 n 的情形, 用归纳法即可证明本定理. □

4.4 对偶概形

4.4.1 对偶 Abel 概形

固定基概形 S. 设 A 为 Abel S 概形. 以 $m: A \times_S A \to A$ 记 A 的 “加法”. 设 T 为 S 概形, 则下图决定态射 m_T:

$$\begin{array}{ccc} (A\times_S A)\times_S T & \longrightarrow & A\times_S A \\ & \overset{m_T}{\searrow} & \downarrow m \\ & A\times_S T \longrightarrow & A \\ & \downarrow & \downarrow \\ & T \longrightarrow & S \end{array}$$

由此得到态射

$$\mathrm{Pic}(A\times_S T)\longrightarrow \mathrm{Pic}((A\times_S A)\times_S T)$$

$$L\longmapsto (m_T)^*L.$$

层化后便得态射

$$m^*: \underline{\mathrm{Pic}}_{A/S}\longrightarrow \underline{\mathrm{Pic}}_{A\times_S A/S}.$$

以 φ 记以下复合同态:

$$\underline{\mathrm{Pic}}_{A/S}\xrightarrow{m^*}\underline{\mathrm{Pic}}_{A\times_S A/S}\longrightarrow \underline{\mathrm{Corr}}_{(A,A)/S}.$$

以 $\underline{\mathrm{Pic}}^0_{A/S}$ 记 $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

按 [31], Theorem 7.3, $\underline{\mathrm{Pic}}_{A/S}$ 可以用 S 上局部有限展示的代数空间来表示. 我们用 $\mathrm{Pic}_{A/S}$ 记这个代数空间, 则 $\mathrm{Pic}_{A/S}$ 有开子空间 $\mathrm{Pic}^0_{A/S}$ 表示 $\underline{\mathrm{Pic}}^0_{A/S}$. 可以证明 $\mathrm{Pic}^0_{A/S}$ 是 Abel 代数空间. 按 Raynaud 的定理 (见 [116] I, Theorem 1.9), 如果 $X\to S$ 是 Abel 代数空间, S 是概形, 则 $X\to S$ 是 Abel 概形. 所以 $\mathrm{Pic}^0_{A/S}$ 是 Abel 概形. 我们记此 Abel 概形为 $\hat{A}$ 或 A^t, 并称之为 A 的**对偶 Abel 概形** (dual abelian scheme). 对此我们作两点说明. 第一, 不同于 [259] 中所说的那样, 我们不假设 A/S 是射影概形. 事实上, 存在非射影的 Abel 概形 (见 [307] Chap.XIII 3.2 节). 第二, 如同 Mumford 一样, 我们引用了相当困难的 “可表性” 定理. 尽管如此, 我们还是可以直接从定义出发来研究 $\hat{A}$ 的很多初等性质.

按定义我们有

$$\underline{\mathrm{Pic}}^0_{A/S}(A\times_S T)=\mathrm{Hom}_S(T,\mathrm{Pic}^0_{A/S}),$$

或可写成

$$\underline{\mathrm{Pic}}^0_{A/S}(A\times_S A^t)=\mathrm{Hom}_S(A^t,A^t).$$

我们把对应于 $\mathrm{id}: A^t\to A^t$ 的 $A\times_S A^t$ 上的可逆层记作 $\mathscr{P}_A$, 并称之为 A 的 **Poincaré 层** (Poincaré sheaf). $\mathscr{P}_A$ 是沿着 $e\times_S A^t$ 和 $A^t\times_S e$ 刚化的.

为了避免混淆, 我们把上面一些记号的定义重复一下. $\mathrm{Pic}(X)$ 是 (抽象) 群, 由 X 上的可逆层的同构类所组成. $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ 是 $\mathfrak{Sch}/S$ 上的 fppf 层. 群 $\mathrm{Pic}_S(X)$ 是指 $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}(S)$. $\mathrm{Pic}_{X/S}$ 是指表示层 $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ 的代数空间 (如果它存在的话).

4.4.2 Picard 函子到除子对应函子的态射

命题 4.4.1 设 $A \xrightarrow{p} S$ 为 Abel 概形, $m: A \times A \to A$ 为 A 的群运算, $e: S \to A$ 为 A 的单位截面, φ 为同态

$$\underline{\mathrm{Pic}}_{A/S} \xrightarrow{m^*} \underline{\mathrm{Pic}}_{A\times_S A/S} \xrightarrow{\mathrm{proj}} \underline{\mathrm{Corr}}_{(A,A)/S}.$$

又设 L 为 A 上的可逆层, φ 在 L 的取值记为 $\varphi(L)$.

(1) 把 $\underline{\mathrm{Corr}}_{(A,A)/S}(S) = \mathrm{Corr}_S(A, A)$ 与 $\mathrm{Pic}_{e,e}(A \times_S A)$ 等同, 则有

$$\varphi(L) = m^*(L) \otimes \pi_1^*(L^{-1}) \otimes \pi_2^*(L^{-1}) \otimes \pi_\emptyset^* e^*(L),$$

其中的态射由下图给出:

$$\begin{array}{ccc} A \times_S A & \xrightarrow{\pi_1} & A \\ {\scriptstyle \pi_2}\downarrow & \searrow^{\pi_\emptyset} & \downarrow{\scriptstyle p} \\ A & \xrightarrow{p} & S \end{array}$$

进而言之, 如果 L 相对于 e 是刚化的, 则有

$$\varphi(L) = m^*(L) \otimes \pi_1^*(L^{-1}) \otimes \pi_2^*(L^{-1}).$$

(2) 把 $\mathrm{Corr}_S(A, A)$ 与 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}}(A, \underline{\mathrm{Pic}}_{A/S})$ 等同, 则 $\varphi(L)$ 对应于同态

$$\begin{aligned} \varphi_L : A &\longrightarrow \underline{\mathrm{Pic}}_{A/S} \\ a &\longmapsto [T_a^*(L) \otimes L^{-1}], \end{aligned}$$

其中 T_a 为

$$\begin{aligned} T_a : A &\longrightarrow A \\ x &\longmapsto x + a. \end{aligned}$$

以下将 $T_a^*(L)$ 记为 L_a. 若 $T \in \mathfrak{Sch}/S$ 和 $a \in A(T)$, 则

$$\varphi_L(a) \in \underline{\mathrm{Pic}}_{A/S}(T) = \mathrm{Pic}(A \times_S T).$$

(3) 下面的五个条件等价:

(i) $L = \mathscr{O}_A$,

(ii) $\varphi_L = 0$,

(iii) $m^*(L) \otimes \pi_1^*(L^{-1}) \otimes \pi_2^*(L^{-1}) \otimes \pi_\emptyset^* e^*(L) = \mathscr{O}_{A\times_S A}$,

(iv) L 在 $\underline{\mathrm{Pic}}_{A/S}$ 中的像在平移下不变,

(v) 对于任意 S 概形 T 和任意的 $a \in A(T)$, 存在 T 上的可逆层 M 和同构 $(L_T)a \otimes L_T^{-1} \cong (p_T)^*(M)$, 其中 L_T 为 X_T 上的可逆层, X_T 和 p_T 如下图所示:

$$\begin{array}{ccc} X_T = X \times_S T & \longrightarrow & X \\ \downarrow{\scriptstyle p_T} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ T & \longrightarrow & S \end{array}$$

(4) $\operatorname{Ker}(\varphi)$ 是 $\underline{\operatorname{Pic}}_{A/S}$ 的既开又闭的子群.

(5) 态射 φ_L 分解为 $A \to \operatorname{Ker}(\varphi)(S) \to \operatorname{Pic}_{A/S}$, 即是说 $\varphi_L : A \to A^t$.

证明　(1) 由 $\operatorname{Corr}_S(A, A)$ 到 $\operatorname{Pic}_{(e,e)}(A \times_S A)$ 的同构是通过相对于 $E = \{1, 2\}$ 的刚化映射 $r(\mathscr{L})$ 定义的, 于是

$$r(\mathscr{L}) = r(L) = P_{12}^*(L) \otimes P_1^*(L^{-1}) \otimes P_2^*(L^{-1}) \otimes P_\emptyset^*(L),$$

而 $P_{12} = \mathrm{id}_{A \times_S A}$, $P_\emptyset = s_\emptyset \circ \pi_\emptyset$, $P_i = s_i \circ \pi_i$ $(i = 1, 2)$, 见下面的两个图:

$$\begin{array}{ccccc} A^2 & & \xrightarrow{\quad P_\emptyset \quad} & & A^2 \\ & \searrow{\scriptstyle \pi_\emptyset} & & \nearrow{\scriptstyle s_\emptyset} & \\ & & S & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} A^2 & & \xrightarrow{\quad P_1 \quad} & & A^2 & & \\ & \searrow{\scriptstyle \pi_1} & & \nearrow{\scriptstyle s_1} & & \searrow{\scriptstyle \pi_2} & \\ & & A & & & & A \\ & & & \searrow{\scriptstyle p} & & \nearrow{\scriptstyle e} & \\ & & & & S & & \end{array}$$

由于 $ms_1 = \mathrm{id}$ (即是 $a \mapsto (a, 0) \mapsto a + 0 = a$), 所以 $P_1^*(\mathscr{L}) = \pi_1^* s_1^* m^*(L) = \pi_1^*(L)$. 同样, $P_2^*(\mathscr{L}) = \pi_2^*(L)$. 又由于 $ms_\emptyset = e$ (即是 $0 + 0 = 0$), 所以 $P_\emptyset^*(\mathscr{L}) = \pi_\emptyset^* e^*(L)$. 综合以上计算就得出 $\varphi(L)$ 的公式.

(2) 可由 (1) 推出. 事实上, 同态 $\varphi_L : A \to \underline{\operatorname{Pic}}_{A/S}$ 是 $\underline{\operatorname{Pic}}_{A/S}(A)$ 的点, 这个点是指 $A \times_S A$ 上的可逆层 $M = m^*(L) \otimes \pi_1^*(L^{-1}) \otimes \pi_2^*(L^{-1})$. 设 $u : T \to A$ 为

S 态射. 考虑以下的卡氏图:

$$\begin{array}{ccccc} A_T & \xrightarrow{v} & A\times_S A & \xrightarrow{\pi_2} & A \\ \downarrow{\scriptstyle p_T} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ T & \xrightarrow{u} & A & \xrightarrow{p} & S \end{array}$$

由同态 $(\varphi_L)_T:\ \mathrm{Hom}(T,\ A)=A(T)\to \underline{\mathrm{Pic}}_{A/S}(T)=\mathrm{Pic}_T A_T$ 得出的 $(\varphi_L)_T(u)$ 是可逆层

$$v^*(M)=(L_T)_u\otimes p_T^*u^*(L^{-1})\otimes L_T^{-1},$$

它在 $\mathrm{Pic}_T(A_T)=\mathrm{Pic}(A_T)\ /\ \mathrm{Pic}(T)$ 中等于 $(L_T)_u\otimes L_T^{-1}$.

(3) 由上面证明的 (1) 知 (i) 与 (iii) 等价; 由上面证明的 (2) 知 (i), (ii), (iv) 等价; (iv) 与 (v) 显然等价.

(4) 成立的原因是: $\underline{\mathrm{Corr}}_{A,A)/S}$ 的单位截面是既开又闭的浸入.

(5) 是 (4) 的推论. □

4.4.3 极化

按命题 4.4.1, 设 $A\to S$ 是 Abel 概形, $A^t\to S$ 是 A 的对偶 Abel 概形, L 是 A 的可逆层, 则有同态 $\varphi_L:\ A\to A^t$. 我们引入以下重要的定义.

定义 4.4.1 设 $A\to S$ 是 Abel 概形. A 的**极化** (polarization) 是指一个 S 同态 $\lambda:\ A\to A^t$, 使得对于 S 的任一几何点 $\overline{s}$, 存在 $A_{\overline{s}}$ 上的丰沛可逆层 (ample invertible sheaf), 使得 $\varphi_{L_{\overline{s}}}=\lambda_{\overline{s}}:\ A_{\overline{s}}\to A^t_{\overline{s}}$. 若 λ 是同构, 则称 λ 为**主极化** (principal polarization).

4.4.4 小结

我们总结一下以上的讨论, 设 S 为概形, A 为 S 上的 Abel 概形. 设 L 为 A 上相对于单位 e 刚化的可逆层. 以 A^t 记 A 的对偶 Abel S 概形. 则 L 自然决定同态

$$\varphi_L\ :A\longrightarrow A^t,$$

使得对于任意的 $x\in A$, $\varphi_L(x)$ 等于 A 上由 $T_x^*L\otimes L^{-1}$ 所决定的可逆层同构类, 其中

$$T_x:\ A\longrightarrow A$$

$$a\longmapsto ax.$$

我们常以 $K(L)$ 记 φ_L 的核 $\mathrm{Ker}\,\varphi_L$. 它是 A 的闭子群概形 (比较 [264] §6, p.60, §13, p.131).

4.4.5 Θ 群

设 A 为 Abel S 概形, L 为 A 上的相对丰沛可逆层. 对于 S 概形 $f: T \to S$, 以 A_T 记 $A \times_S T$ (换基), 即有

$$\begin{array}{ccc} A_T = A \times_S T & \xrightarrow{\tilde{f}} & A \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_T} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ T & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

任一截面 $\alpha: T \to A_T$ 决定一个平移 $T_\alpha: A_T \to A_T$. 对于 α 我们要求有 T 上的可逆层 M, 使得

$$T_\alpha^* \tilde{f}^* L \cong \tilde{f}^* L \otimes \pi_T^* M.$$

这样的 α 组成一个群, 记之为 $\mathscr{K}(L)(T)$. 易证 $\mathscr{K}(L): \mathfrak{Sch}/S \to \mathfrak{Gr}$ 是一个群函子. 显然 $\mathscr{K}(L)$ 是同态 $\varphi_L: A \to A^t$ 的核. 由引理 1.2.4 知 φ_L 是平坦的. 当 S 是域时, 即 A 是 Abel 簇, 则 $\mathscr{K}(L)$ 是有限群, φ_L 是同源 (见 [264] p.66, 77, 124). 即我们现在的同态 φ_L 是拟有限的、固有的, 于是得知 φ_L 是有限展示、有限平坦态射, 所以 φ_L 的核 $\mathscr{K}(L)$ 是 S 上的有限平坦群概形.

另一方面我们引入偶对 (α, φ), 其中 $\alpha: T \to A_T$ 为 $\mathscr{K}(L)(T)$ 内满足以下条件的元:

$$T_\alpha^*(\tilde{f}^* L) \cong \tilde{f}^* L,$$

而 $\varphi: \tilde{f}^* L \to T_\alpha^*(\tilde{f}^* L)$ 是同构. 所有这样的偶对 (α, φ) 组成一个群, 记为 $\mathscr{G}(L)(T)$. 于是便得到群函子 $T \mapsto \mathscr{G}(L)(T)$. 这个群的运算如下所述: 设 (α, φ),(β, ψ) 为 $\mathscr{G}(L)(T)$ 的元, 则从

$$\tilde{f}^* L \xrightarrow{\varphi} T_\alpha^*(\tilde{f}^* L) \xrightarrow{T_\alpha^* \psi} T_\alpha^*(T_\beta^*(\tilde{f}^* L)) = T_{\alpha+\beta}^*(\tilde{f}^* L)$$

得到的合成 $T_\alpha^* \psi \circ \varphi$ 为同构, 因此我们可以定义

$$(\beta, \psi) \circ (\alpha, \varphi) = (\alpha + \beta, T_\alpha^* \psi \circ \varphi).$$

现取 $\mathscr{K}(L)(T)$ 的任一元 $\alpha: T \to A_T$. 令

$$M = \pi_{T*}(T_\alpha^*(\tilde{f}^* L) \otimes (\tilde{f}^* L)^{-1}).$$

则有

$$T_\alpha^*(\tilde{f}^* L) \cong (\tilde{f}^* L) \otimes \pi_T^* M.$$

以 $M^\times$ 记 M 的非零截面 ($M^\times$ 为 $\mathbb{G}_\mathrm{m}$ 的扭子群). 此时用 $M^\times$ 的元作乘法定义了从 $\tilde{f}^*L$ 到 $T_\alpha^*(\tilde{f}^*L)$ 的同构. 我们可以证明函子 $T \mapsto \mathscr{G}(L)(T)$ 是由 S 上的有限展示平坦群概形 $\mathscr{G}(L)$ 所表示的, 并且有群概形正合序列

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_{\mathrm{m},S} \longrightarrow \mathscr{G}(L) \longrightarrow \mathscr{K}(L) \longrightarrow 0.$$

(见 [264] §23, Thm 1, p.225.) 我们称 $\mathscr{G}(L)$ 为 Θ **群** (Θ-group). 这个群是 Mumford 构造出来的, 用以代替 Θ 函数.(见 [264] §23 及 [261].)

第五章 群 扩 张

本章介绍群扩张 (这不同于域扩张) 和 Mumford 的双扩张理论, 除了证明 Abel 概形的双对偶定理之外, 我们还讨论挠子, 双挠子和立方结构.

5.1 扩张和双扩张

我们在本节先介绍抽象群的扩张和双扩张的概念. 这时因为没有概形的结构, 所以是比较简单的.

5.1.1 群扩张的基本概念

在同调代数我们学过函子 Ext 作为函子 Hom 的右导函子. 我们这里作为复习讲 Ext^1 的体现.

设 T 和 A 为交换群. 从 T 得 A 的**扩张** ξ (extension of A by T) 是指一个正合序列

$$\xi: \quad 0 \longrightarrow T \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0.$$

假如不设 A 是交换群, 并要求 T 在群 E 的中心, 则我们说 ξ 是**中心扩张** (central extension).

我们说两个扩张 ξ, ξ' 是等价的, 如果有交换图:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\xi: & 0 & \longrightarrow & T & \longrightarrow & E & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \| & & \downarrow\cong & & \| & & \\
\xi': & 0 & \longrightarrow & T & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

我们称 ξ 为**分裂扩张** (split extension), 如果 ξ 等价于 $0 \to T \stackrel{(0,1)}{\to} A \oplus T \to A \to 0$.

设有

$$\xi: \quad 0 \longrightarrow T \longrightarrow E \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$$

和

$$\xi': \quad 0 \longrightarrow T \longrightarrow E' \xrightarrow{\pi'} A \longrightarrow 0,$$

取

$$E \times_A E' = \{(e, e') \in E \times E' \mid \pi e = \pi' e'\},$$

即有交换图：

$$\begin{array}{ccc} E\times_A E' & \longrightarrow & E' \\ \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi'} \\ E & \xrightarrow{\ \pi\ } & A \end{array}$$

在 $E\times_A E'$ 有子群：$T\times 0$, $0\times T$, ∇_T. 其中 $\nabla_T=\{(-t,t)\mid t\in T\}$ 为 T 的斜对角. 在 $E\times_A E'/\nabla_T$ 中, $T\times 0$ 与 $0\times T$ 等同. 由于

$$E\times_A E'/0\times T\cong (E\times_A E'/\nabla_T)/((0\times T)\nabla_T/\nabla_T)$$

和 $E'/T\cong A$, 我们得正合序列

$$\eta:\quad 0\longrightarrow T\longrightarrow E\times_A E'/\nabla_T\longrightarrow A\longrightarrow 0.$$

我们称 η 的等价类为扩张 ξ 和 ξ' 的等价类的 Baer 和.

5.1.2　两个记号

函子 Ext 作为 Hom 的右导函子有以下两个性质：(1) 如果 P 为 $\mathbb{Z}$ 投射模, 则对 $i>0$ 有 $\mathrm{Ext}^i(P,T)=0$. (2) 对任意交换群 A,T 和 $i\geqslant 2$, $\mathrm{Ext}^i(A,T)=0$.

现设有用 T 得到的 A 的扩张

$$\xi:\ 0\longrightarrow T\longrightarrow E\longrightarrow A\longrightarrow 0.$$

因为 Ext 是 Hom 的导函子, 从正合序列 ξ 用连接同态 ∂ 得长正合序列, 其中一部分为

$$\mathrm{Hom}(E,T)\longrightarrow \mathrm{Hom}(T,T)\xrightarrow{\ \partial\ }\mathrm{Ext}^1(A,T),$$

以 $\Theta(\xi)$ 记 $\partial(\mathrm{id})\in\mathrm{Ext}^1(A,T)$.

用 T 得 A 的所有扩张的等价类所组成的集合, 暂时记作 $\mathscr{E}(A,T)$.

5.1.3　群扩张与 Ext

定理 5.1.1　设 A,T 为交换群.

(1) $\Theta:\mathscr{E}(A,T)\to\mathrm{Ext}^1(A,T)$ 为双射.

(2) 以 η 记 ξ,ξ' 的 Baer 和, 则有

$$\Theta(\eta)=\Theta(\xi)+\Theta(\xi').$$

(3) Θ 把分裂扩张映射为 $0\in\mathrm{Ext}^1(A,T)$.

证明 (1) 固定正合序列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{j} P \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

其中 P 为投射 $\mathbb{Z}$ 模. 对函子 $\mathrm{Hom}(-,T)$ 取右导函子而得长正合序列

$$\mathrm{Hom}(P,T) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M,T) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Ext}^1(A,T) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(P,T) = 0.$$

即 ∂ 为满射. 对任意 $x \in \mathrm{Ext}^1(A,T)$, 存在 $\tau \in \mathrm{Hom}(M,T)$, 使得 $\partial(\tau) = x$. 取 E 为同态

$$\begin{aligned} M &\longrightarrow P \oplus T \\ m &\longmapsto (j(m), -\tau(m)) \end{aligned}$$

的余核, 则有交换图:

$$\begin{array}{ccccccccc} & 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{j} & P & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow{\scriptstyle\tau} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \| & & \\ \xi: & 0 & \longrightarrow & T & \xrightarrow{i} & E & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

其中 $E \to A$ 是这样决定的: 因为 E 是 j, τ 的推出 (push-out), 故有交换图:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{j} & P \\ \downarrow{\scriptstyle\tau} & & \downarrow \\ T & \longrightarrow & E \end{array} \qquad T \xrightarrow{0} A,\quad E \to A,\quad P \to A$$

从两个正合序列的交换图我们得出 (∂ 的自然性):

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Hom}(P,T) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(M,T) & \xrightarrow{\partial} & \mathrm{Ext}^1(A,T) & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow & & \uparrow & & \| & & \\ \mathrm{Hom}(E,T) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(T,T) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1(A,T) & & \end{array}$$

所以得见 $\Theta(\xi) = \partial(\mathrm{id}_T) = x$. 如此得证 Θ 为满射. 补充一点: 如果另有 $\tau' \in \mathrm{Hom}(M,T)$, 满足 $\partial(\tau') = x$, 则有 $f \in \mathrm{Hom}(P,T)$ 使得 $\tau' = \tau + fj$. 现取 E' 为 j 和 τ' 的的推出, 则由同态 $\tau : T \to E$ 和 $\delta + if : P \to E$ 所诱导出的同态 $E' \to E$ 为同构 (E 及 E' 均为推出). 并且用这同构便得 ξ 与 ξ' 等价. 即是说: 从 $x \in \mathrm{Ext}^1(A,T)$ 出发, 可得到等价类 $[\xi]$. 以 $\psi : x \mapsto [\xi]$ 记这个映射.

现从正合序列 ξ： $0 \to T \to E \to A \to 0$ 出发, 加上前面固定的 $0 \to M \xrightarrow{j} P \to A \to 0$. 由于 P 是 $\mathbb{Z}$ 投射的：

$$
\begin{array}{ccccc}
 & \swarrow & P & & \\
 & & \downarrow & & \\
E & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

所以存在 $\tau : P \to E$ 使得下图交换：

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{j} & P & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \downarrow{\scriptstyle\tau} & & \| & & \\
\xi: & 0 & \longrightarrow & T & \longrightarrow & E & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

现可证这个 E 是 j, γ 的推出, 所以 $\psi(\Theta(\xi)) = \xi$. 这便证明了 Θ 是单射.

(2) 现设又有

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{j} & P & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow{\scriptstyle\gamma'} & & \downarrow{\scriptstyle\tau'} & & \| & & \\
\xi': & 0 & \longrightarrow & T & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

则从 $\tau : P \to E$ 和 $\tau' : P \to E'$ 诱导出 $\tau'' : P \to E \times_A E'$ 和 $\overline{\tau} : P \to E \times_A E'/\nabla_T$, 其中 $\overline{\tau}$ 限制至 M 是由 $\gamma + \gamma' : M \to T$ 所诱导. 我们有图:

$$
\begin{array}{ccccc}
M & & \xrightarrow{\gamma'} & & T \\
 & \searrow{\scriptstyle j} & & & \\
\Big\downarrow{\scriptstyle\gamma} & & P & & \Big\downarrow \\
 & & & \searrow{\scriptstyle\overline{\tau}} \quad \searrow & \\
 & & & E \times_A E' & \longrightarrow \ E' \\
 & & \swarrow & \downarrow & \downarrow \\
T & & \longrightarrow & E & \longrightarrow \ A
\end{array}
$$

所以

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & P & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow{\scriptstyle\gamma+\gamma'} & & \downarrow{\scriptstyle\overline{\tau}} & & \| & & \\
\eta: & 0 & \longrightarrow & T & \longrightarrow & E \times_A E'/\nabla_T & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

是交换图, 于是 $\Theta(\eta)=\partial(\gamma+\gamma')$, 其中有同态 $\partial:\operatorname{Hom}(M,T)\to\operatorname{Ext}^1(A,T)$. 由 $\partial(\gamma+\gamma')=\partial(\gamma)+\partial(\gamma')=\Theta(\xi)+\Theta(\xi')$.

(3) 可由以下事实推出: 如果 $\operatorname{Ext}^1(A,T)=0$, 则用 T 得 A 的扩张均分裂. 从正合序列 ξ 得正合序列

$$\operatorname{Hom}(E,T)\xrightarrow{\alpha}\operatorname{Hom}(T,T)\longrightarrow\operatorname{Ext}^1(A,T).$$

由假设 $\operatorname{Ext}^1(A,T)=0$, 得 α 为满射. 于是有 $\sigma\in\operatorname{Hom}(E,T)$ 使 $\alpha(\sigma)=\mathrm{id}_T$, 即 $i\sigma=\mathrm{id}_T$, 即 σ 为 $E\to A$ 的截面. 所以 $E\cong A\oplus T$, 即 ξ 为分裂扩张. □

5.1.4 一点说明

可以把 Ext^n 的定义推广至没有足够投射对象或内射对象的 Abel 范畴. 见: [296].

5.1.5 群扩张与上同调

设 A,T 为交换群. 一个**因子组** (factor system or 2-cocycle) 是指满足以下等式的映射 $F:A\times A\to T$:

$$f(x+y,z)+f(x,y)=f(x,y+z)+f(y,z)\qquad(x,y,z\in A).$$

设有映射 $g:A\to T$, 考虑

$$\delta g(x,y)=g(x+y)-g(x)-g(y),$$

则 δg 是个因子组. 称这样的 δg 为分裂因子组或平凡因子组. 如果满足 $f(x,y)=f(y,x)$, 则我们说因子组是对称的, 分别以 Z^2_s, B^2 记由对称因子组, 分裂因子组所生成的交换群. 以 $H^2(A,T)_s$ 记商群 Z^2_s/B^2. 则有双射 $\mathscr{E}(A,T)\longleftrightarrow H^2(A,T)_s$ ([69], XIV §4). 设有 $\xi:0\to T\to E\xrightarrow{\pi}A\to 0$. 选 π 的截面 $\sigma:A\to E$ 使得 $\sigma(1)=1$. 于是 $\pi(\sigma(x+y))=x+y=\pi\sigma x+\pi\sigma y$. 故此 $\delta\sigma(x,y)\in T$. 这样我们可以把 ξ 映作 $\delta\sigma$.

5.1.6 群的双扩张

设 R 为特征是 0 的环, I 是 R 的理想, 并且 R/I 的特征是 p. 设 $\overline{X}$ 为 R/I 上的 Abel 概形. 问: 是否存在 R 上的 Abel 概形 X 使得 $X\times_R R/I=\overline{X}$. Mumford 在解决这个问题时发现这样的一种结构: 设 X 是定义在代数封闭域 k 上的 Abel 簇, X^t 是 X 的对偶簇, P 是 $X\times_k X^t$ 上的 Poincaré 线丛, 则 $P(k)$ 是从 $k^\times$ 得 $X(k)\times X^t(k)$ 的双扩张 (见 [262]). Mumford 利用双扩张这个概念来说清楚一个 Abel 概形的形式群和它的对偶 Abel 概形的形式群之间的关系.

设 P, Q, G 为交换群, 从 G 得 (P, Q) 的**双扩张** (bi-extension of (P, Q) by G) 是指一个装上以下结构的集合 E:

(1) G 自由的作用在 E 上.

(2) 有满映射 $\pi : E \to P \times Q$ 诱导出从轨迹集合 $E/G \to P \times Q$ 的双射.

(3) 有映射 $+_1 : E \times_P E \to E$, $+_2 : E \times_Q E \to E$, 其中

$$E \times_P E = \{(x_1, x_2) \mid \mathrm{pr}_1 \pi x_1 = \mathrm{pr}_1 \pi x_2\},$$

$$E \times_Q E = \{(x_1, x_2) \mid \mathrm{pr}_2 \pi x_1 = \mathrm{pr}_2 \pi x_2\},$$

并且满足以下条件:

(i) 对任一 $p \in P$, 设 $E_p^1 = \pi^{-1}(p \times Q)$, 则 $(E_p^1, +_1)$ 为交换群, π 定义 $E_p^1 \xrightarrow{\pi_p} Q$ 的群同态, G 在 E_p^1 上作用并与 $\mathrm{Ker}\ \pi_p$ 同构.

(ii) 对任一 $q \in Q$, 设 $E_q^2 = \pi^{-1}(P \times q)$, 则 $(E_q^2, +_2)$ 为交换群, π 定义 $E_q^2 \xrightarrow{\pi_q} P$ 的群同态, G 在 E_q^2 上作用并与 $\mathrm{Ker}\ \pi_q$ 同构.

(iii) 设有 $x, y, u, v \in E$ 使得

$$\pi(x) = (p_1, q_1), \qquad \pi(y) = (p_1, q_2),$$

$$\pi(u) = (p_2, q_1), \qquad \pi(v) = (p_2, q_2),$$

则

$$(x +_1 y) +_2 (u +_1 v) = (x +_2 u) +_1 (y +_2 v).$$

5.1.7 双扩张与上同调

取 π 的 (集合) 截面 s, 即有 $E \underset{\pi}{\overset{s}{\rightleftarrows}} P \times Q$, $\pi s = \mathrm{id}_{P \times Q}$. 利用 s 和 G 在 E 上的作用, 我们得同构

$$E \cong G \times P \times Q,$$

使得 G 在 E 上的作用对应于 $g \cdot (g_1, p, q) = (g + g_1, p, q)$. 这时在 E 中的 $+_1, +_2$ 便对应于

$$(g, p, q) +_1 (g', p, q') = (g + g' + \varphi(p, q, q'), p, q + q'),$$

$$(g, p, q) +_2 (g', p', q) = (g + g' + \psi(p, p', q), p + p', q).$$

为了保证 $(E_p^1, +_1)$ 是交换群, 我们必须有:

(1) $\varphi(p, q+q', q'') + \varphi(p, q, q') = \varphi(p, q, q'+q'') + \varphi(p, q', q'')$ (群的结合律), $\varphi(p, q, q') = \varphi(p, q', q)$ (群的运算是交换的).

同样亦有必要:

(2) $\psi(p+p', p'', q) + \psi(p, p', q) = \psi(p, p'+p'', q) + \psi(p', p'', q)$, $\psi(p, p', q) = \psi(p', p, q)$.

最后 φ,ψ 还需要满足条件:

(3) $\varphi(p+p',q,q')-\varphi(p,q,q')-\varphi(p',q,q')=\psi(p,p',q+q')-\psi(p,p',q)-\psi(p,p',q')$.

以上 (1), (2), (3) 为 φ,ψ 的**上闭链条件** (co-cycle condition).

如果我们把截面 s 换作 $s+t$, 其中 $t:P\times Q\to E$. 这时对应于 $s+t$, 我们得到 φ',ψ'. 可以验证:

$$\varphi'(p,q,q')-\varphi(p,q,q')=t(p,q+q')-t(p,q)-t(p,q'),$$

$$\psi'(p,p',q)-\psi(p,p',q)=t(p+p',q)-t(p,q)-t(p',q).$$

这便是**上边缘条件** (co-boundary condition).

这样, 由一个从 G 得 (P,Q) 双扩张 E, 我们获得**上同调类** (φ,ψ) (cohomology class). 于是所有这样的 E 组成一个交换群, 我们记作 Bi-ext$(P\times Q,G)$.

5.2 代数群的扩张

5.2.1 一些范畴之间的关系

设 S 为局部 Noether 概形. 以 $\mathfrak{Sch}/S$ 记由 S 概形所组成的范畴. 以 $(\mathfrak{Sch}/S)^\wedge$ 记 $\mathfrak{Sch}/S$ 上的预层 (反变函子) 所组成的范畴. 在 $\mathfrak{Sch}/S$ 上我们取 fpqc 拓扑 (见附录): 对 $X\in\mathfrak{Sch}/S$, X 的覆盖是指一组 S 概形态射 $\{Y_i\to X\}_{i\in I}$ (I 可以是无限集), 它满足以下的条件: 有 X 的开子概形 $X_i\subset X$, $\bigcup X_i=X$ (集), 有忠实平坦拟紧态射 $Y_i\to X_i$. 这样可得态射 $\coprod Y_i\to X$. 这样的态射生成 $\mathfrak{Sch}/S$ 的 fpqc 拓扑. 定义在位形 $(\mathfrak{Sch}/S)_{(\mathrm{fpqc})}$ 上的**集层** (sheaf of sets) 范畴记为 $(\mathfrak{Sch}/S)^\sim$ (用 [148] 的术语, $(\mathfrak{Sch}/S)^\sim$ 是一个 topos). 在 $(\mathfrak{Sch}/S)_{(\mathrm{fpqc})}$ 上的交换群层所组成的范畴记作 $\mathfrak{F}_S$. 以 $\mathfrak{Gr}_S$ 记 S 上的拟紧分离交换群概形所定义的范畴. 我们有

$$\begin{array}{ccccc}\mathfrak{Sch}/S & \subset & (\mathfrak{Sch}/S)^\sim & \subset & (\mathfrak{Sch}/S)^\wedge\\ \cup & & \cup & & \\ \mathfrak{Gr}_S & \subset & \mathfrak{F}_S & & \end{array}$$

5.2.2 交换群概形的正合序列

我们先讨论一些序列的正合性质.

设有交换 S 群概形 $T,E,A(\in\mathfrak{Gr}_S)$. 我们说序列

$$0\longrightarrow T\xrightarrow{i}E\xrightarrow{p}A\longrightarrow 0$$

在 $\mathfrak{Gr}_S$ 内正合, 如果 i, p 是群同态, $T = \operatorname{Ker} p$, 和

$$T \times E \overset{\mu_E \cdot (i, 1_E)}{\underset{\mathrm{pr}_2}{\rightrightarrows}} E \xrightarrow{p} A$$

在 $\mathfrak{Sch}/S$ 内正合 ($\mu_E : E \times E \to E$ 为 E 的群运算).

($X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{p} Z$ 在 $\mathfrak{Sch}/S$ 内正合是指: 对任一在 $\mathfrak{Sch}/S$ 内之 $Y \xrightarrow{h} T$ 使得 $hf = hg$, 必有唯一 $Z \xrightarrow{e} T$ 使得 $h = ep$.)

5.2.3 忠实平坦群同态的核

命题 5.2.1 设 $E, A \in \mathfrak{Gr}_S$ 和 $p : E \to A$ 是忠实平坦群同态. 取 $T = \operatorname{Ker} p$, 则 (1) T 是平坦, (2) 序列 $0 \to T \to E \xrightarrow{p} A \to 0$ 同时在 $\mathfrak{F}_S$ 和 $\mathfrak{Gr}_S$ 内正合.

证明 从卡氏图:

$$\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow p \\ S & \xrightarrow{0} & A \end{array}$$

(即 $T = E \times_A S$) 及 p 平坦, 得出 (1).

据 [142], 6.6.4(v), p 是拟紧的. 于是 p 是 fpqc 覆盖, 故此 p 是 $(\mathfrak{Sch}/S)^\sim$ 内的满射 (见附录). 由于 $\mathfrak{F}_S$ 是 Abel 范畴, 我们得知所求序列在 $\mathfrak{F}_S$ 内正合. 至于在 $\mathfrak{Gr}_S$ 内的正合性我们引用 [147] VIII, 5.2. □

5.2.4 交换群层的满态射

命题 5.2.2 设 $p : E \to A$ 是 $\mathfrak{F}_S$ 内的满态射. 则 p 为 $(\mathfrak{Sch}/S)^\sim$ 内的满态射.

证明 以 $T \xrightarrow{i} E$ 记 $\operatorname{Ker} p$. 在 $\mathfrak{Sch}/S$ 内取 $\operatorname{Coker}(\mathrm{pr}_2, \mu_E \cdot (i, 1_E))$, 记为 $A \xrightarrow{q} C$. 则 C 为 $\mathfrak{Sch}/S$ 内的群对象 ([147]$_1$ IV.5.2.1). 于是在 $\mathfrak{F}_S$ 内有交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} T & \longrightarrow & E & \xrightarrow{p} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & & \searrow^{q} & \downarrow g & & \\ & & & & C & & \end{array}$$

和在 $(\mathfrak{Sch}/S)^\sim$ 内有交换图:

$$\begin{array}{ccccc} T \times E & \overset{\mu_E \cdot (i, 1_E)}{\underset{\mathrm{pr}_2}{\rightrightarrows}} & E & \xrightarrow{q} & C \\ & & & \searrow^{p} & \downarrow h \\ & & & & A \end{array}$$

其中 h 是集层态射. 我们需要证明 h 是群层同态 (即是 $\mathfrak{F}_S$ 内的态射). 为此考虑 $\mathfrak{Sch}/S$ 内图:

$$
\begin{array}{ccccc}
E\times E & \xrightarrow{(q,q)} & C\times C & & \\
& \searrow^{(p,p)} & & \searrow^{(h,h)} & \\
\downarrow{\scriptstyle \mu_E} & & \downarrow & & A\times A \\
E & \xrightarrow{q} & C & & \downarrow \\
& \searrow_{p} & & \searrow^{h} & \\
& & & & A
\end{array}
$$

因为 q,p 为同态:

$$\mu_E\cdot(h,h)\cdot(q,q)=\mu_E\cdot(p,p)=p\cdot\mu_E=h\cdot q\cdot\mu_E=h\cdot\mu_C(q,q).$$

因为 q 是 $\mathfrak{Sch}/S$ 内的满, 故 (q,q) 是满射. 于是从上得 $\mu_E\cdot(h,h)=h\cdot\mu_C$. 如此得知 h 为群层同态.

由 $q=gp=ghq$ 和 q 是 $(\mathfrak{Sch}/S)^\sim$ 内满态射, 故亦是 $\mathfrak{F}_S$ 内满射. 于是得 $gh=1_C$. 因为 g 和 h 是同态, p 是 $\mathfrak{F}_S$ 内满射, 由 $p=hq=hgp$ 得 $hg=1_A$. 由 Coker 的定义, 我们得 $A=C$, 即是说 p 是 $(\mathfrak{Sch}/S)^\sim$ 内的满射. □

5.2.5　平坦概形满射

命题 5.2.3　设 $E,A\in\mathfrak{Gr}_S$, $E\xrightarrow{p}A$ 为 $\mathfrak{F}_S$ 内满射, p 为平坦概形态射, 则 p 是忠实平坦态射.

证明　以 T 为 Ker p, 即 $T=E\times_A S\in\mathfrak{Gr}_S$. 因为在 $(\mathfrak{Sch}/S)^\sim$ 内 p 为满射, 所以 p 为 fpqc 覆盖 ([147]$_1$ IV.4.4.3). 于是有 S 态射 $X\xrightarrow{y}E$ 使得 $x=yp:X\xrightarrow{y}E\xrightarrow{p}A$ 是忠实平坦拟紧态射 (加细). 取纤维积:

$$
\begin{array}{ccc}
E\times_A X & \xrightarrow{q} & X \\
\downarrow{\scriptstyle z} & & \downarrow{\scriptstyle x} \\
E & \xrightarrow{p} & A
\end{array}
$$

则 $T\times_A X\cong E\times_A X$. 于是由 $T\to S$ 是忠实平坦拟紧态射得知 q 亦是.

由 x 得知 z 是忠实平坦 ([145]$_2$ 2.2.13i).

由 xq 及 z 是忠实平坦得 p 是忠实平坦 ([145]$_2$ 2.2.13iii). □

5.2.6 交换群层的正合序列

命题 5.2.4 设有 $\mathfrak{F}_S$ 内正合序列 $0 \to T \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} A \to 0$, $T, A \in \mathfrak{Gr}_S$ 和 $T \to S$ 是仿射态射, 则 $E \in \mathfrak{Gr}_S$.

证明 由假设, p 是 $\mathfrak{F}_S$ 内满射. 由 fpqc 拓扑性质, 此说是有 $X \in \mathfrak{Sch}/S$ 和交换图:

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \swarrow^{y} & \downarrow x \\ E & \xrightarrow{p} & A \end{array}$$

其中 x 是忠实平坦拟紧态射. 于是 $E \times_A X \cong T \times X \in \mathfrak{Sch}/S$.

由 $T \to S$ 是仿射态射得 $E \times_A X \xrightarrow{q} X$ 是仿射态射. 以 y 记 $E \times_A X$. 考虑图:

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & E \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{x} & A \end{array}$$

按 [141], 190-19, thm 2 = Sem. Bourbaki 1959/1960, n°190, 对于仿射态射 q 来说, x 是有效下降态射, 即有 $Z \in \mathfrak{Sch}/S$, 使得 $x^*Z = Y$. 这就是说 Z 同构于 E, 即 $E(\in \mathfrak{F}_S)$ 为可表, 也就是我们在命题中指 $E \in \mathfrak{Gr}_S$ 的意思. □

5.2.7 正合序列的等价类

给定 $T, A \in \mathfrak{Gr}_S$. 假定 $T \to S$ 为平坦. 我们考虑正合序列 $\xi : 0 \to T \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} A \to 0$, 其中 $E \in \mathfrak{Gr}_S$ 和 p 是忠实平坦拟紧. 我们称两个这样的正合序列 ξ, ξ' 为等价, 若有交换图:

$$\begin{array}{ccccccccc} \xi: & 0 & \longrightarrow & T & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{p} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & & \| & & \downarrow \approx & & \| & & \\ \xi': & 0 & \longrightarrow & T & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

这些等价类所组成的集合记作 $\mathrm{Ext}_S(A, T)$.

5.2.8 两种等价类的一一对应

命题 5.2.5 设 $T, A \in \mathfrak{Gr}_S$ 和 $T \to S$ 是仿射平坦. 则有双射 $\mathrm{Ext}_S(A, T) \to \mathrm{Ext}_{\mathfrak{F}_S}(A, T)$.

注 在这里我们把 A,T 看作交换群层, 然后在 Abel 范畴 $\mathfrak{F}_S$ 内计算 $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{F}_S}(A,T)$.

证明 由命题 5.2.1, $\mathrm{Ext}_S(A,T)$ 内的 $0 \to T \to E \to A \to 0$ 定义 $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{F}_S}(A,T)$ 内元素, 故知可把 $\mathrm{Ext}_S(A,T)$ 看成 $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{F}_S}(A,T)$ 的子集, 再由命题 5.2.4, 5.2.3 知 $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{F}_S}(A,T)$ 内的正合序列中间的层可表. 故此序列确实在 $\mathrm{Ext}_S(A,T)$ 内. □

5.3 挠 子

5.3.1 定义

固定概形 S. 设 G 是 S 概形. 我们称一个 S 概形 P 为 G **主齐性纤维丛** (principal homogeneous bundle) 或 S 上的 G **挠子** (G-torsor over S), 如果透过 S 态射 $\alpha : P \times_S G \to P$, G 作用在 P 上, 并且有开集 U_i 满足 $\bigcup U_i = S$ 和对每个 i 有忠实平坦拟紧态射 $S'_i \to U_i$, 使得 $P'_i = P \times_S S'_i$ 带上作用 $G'_i = G \times_S S'_i$ 同构于 G'_i 带上平移作用 G'_i. 我们可以把 G 看作 $(\mathfrak{Sch}/S)^\sim$ 内的元. 同样地, 我们称带 G 作用的集层 $P \in (\mathfrak{Sch}/S)^\sim$ 为 S 上的 G 挠子, 如果如上: $P|_{S'_i}$ 同构于 G' (作为 $(\mathfrak{Sch}/S'_i)^\sim$ 内的元). ([146] XI.4.1, $[147]_1$ IV.5.1, $[147]_2$ VIII §4). 我们说 P 是**局部平凡的** (locally trivial), 如果可以选 $S'_i = U_i \xrightarrow{\mathrm{id}} U_i$. ([146] XI.4.7)

5.3.2 挠子的充要条件

命题 5.3.1 设 $G \to S$ 平坦和拟紧, G 作用在 S 概形 P 上. 则 P 为 S 上的 G 挠子当且仅当: (1) $\mathrm{pr}_1 \times \alpha : P \times_S G \to P \times_S P$ 是同构和 $P \to S$ 是忠实平坦拟紧态射.

证明 设 P 是 S 上 G 挠子. 引用定义中的记号. 设 $S' = \coprod S_i$, $P' = P \times_S S'$, $G' = G \times_S S'$. 则 $S' \approx_S G'$. 从 $G' \to S'$ 是忠实平坦拟紧得知 $P' \to S'$, 于是 $P \to S$ 亦是忠实平坦拟紧的 ($[145]_2$ 2.6, 2.7). 同样地按下降理论, 从 $(P \times_S G)_{S'} \to (P \times_S P)_{S'}$ 为同构得知 $P \times_S G \to P \times_S P$ 亦同构.

反过来, 取 $P \to S$ 为 fpqc 覆盖. 则 (1) 给出这覆盖的同构, 这就是定义中所要求的 $P' = P \times_S P \approx G' = G \times_S P$. □

5.3.3 挠子与正合序列

设 A,T 为 (拟紧分离) 交换 S 群概形. 取 $\mathrm{Ext}(A,T)$ 中的元 $\xi : 0 \to T \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} A \to 0$. 则 ξ 亦为 $\mathfrak{F}_S$ 中的正合序列 (fpqc 拓扑). 所以有忠实平坦拟紧 S 态

射 $X \xrightarrow{x} A$ 使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \swarrow^{y} & \downarrow{x} \\ E & \xrightarrow[p]{} & A \end{array}$$

(意谓：取 fpqc 覆盖后 "得"p 的截面), 并且 $E \times_A X \approx T \times_A X$. 按定义这就等于说：$E$ 是 A 上的 T 挠子.

5.3.4 挠子与上同调

我们以 $H^1(S,G)$ 记所有 S 上的 G 挠子的同构类所组成的集合. 由 S 上的局部平凡 G 挠子的同构类所组成的子集与上同调群 $H^1(S,\mathcal{O}_S(G))$ 成一一对应, 其中 $\mathcal{O}_S(G)$ 是由 G 在 S 上的截面所决定的层. ([146] XI, 4.7; [136] Prop. 5.1.1; [329].) 而且 $0 \in H^1(S,\mathcal{O}_S(G))$ 对应于平凡 G 挠子.

5.4 Abel 概形的扩张

5.4.1 本原上同调类

设 A_i 是 Abel S 概形. 以 $\mathrm{pr}_i : A_1 \times A_2 \to A_i$ 记投射. 设 $\sigma_1 = 1 \times 0 : A_1 \to A_1 \times A_2$, $\sigma_2 = 0 \times 1$. 若 $f : A \to B$ 是态射, 则有同态 $f^* : H^1(B,\mathcal{O}_B^\times) \to H^1(A,\mathcal{O}_A^\times)$. 因为 $\mathrm{pr}_i \circ \sigma_i = \mathrm{id}$, $\mathrm{pr}_i \circ \sigma_j$ $(i \neq j)$ 是常态射, 我们便得

$$\sigma_i^* \circ \mathrm{pr}_i^* = 1, \qquad \sigma_j^* \circ \mathrm{pr}_i^* = 0 \quad (i \neq j).$$

于是 σ_i^* 为 $(\mathrm{pr}_1^*, \mathrm{pr}_2^*) : H^1(A_1,\mathcal{O}_{A_1}^\times) \times H^1(A_2,\mathcal{O}_{A_2}^\times) \to H^1(A_1 \times A_2, \mathcal{O}_{A_1\times A_2}^\times)$ 的左逆元. 这就是说, $H^1(A_1,\mathcal{O}_{A_1}^\times) \times H^1(A_2,\mathcal{O}_{A_2}^\times)$ 是 $H^1(A_1 \times A_2, \mathcal{O}_{A_1\times A_2}^\times)$ 的直和因子.

以 $\mu : A \times A \to A$ 记 A 的运算. 设 $x \in H^1(A,\mathcal{O}_A^\times)$, 则 $\mu^*(x) \in H^1(A \times A, \mathcal{O}_{A\times A}^\times)$. 我们把 $\mu^*(x) = y + z$, 其中 $y \in (\mathrm{pr}_1^*, \mathrm{pr}_2^*)(H^1(A,\mathcal{O}_A^\times)^2)$, 由于 $\mu \circ \sigma_i = \mathrm{id}$, 可见 $y = \mathrm{pr}_1^* x + \mathrm{pr}_2^* x$.

我们说 x 是本原上同调类, 如果 $\mu^* x = \mathrm{pr}_1^* x + \mathrm{pr}_2^* x$. 设有同态 $\varphi : A \to B$, 则 φ^* 把 A 的本原上同调类映作 B 的本原上同调类. 又若有同态 $\varphi, \psi, \theta : A \to B$ 使得 $\theta = \varphi + \psi$, 即是说 $\theta = \mu_B \circ (\varphi, \psi)$. 如果 x 是 A 的本原上同调类, 则 $\theta^* x = \varphi^* x + \psi^* x$ (事实上有 $\theta^* x = \chi^* \mu_B^* x = \chi^*(\mathrm{pr}_1^* x + \mathrm{pr}_2^* x) = \varphi^* x + \psi^* x$). 于是对 $i_A : A \to A : a \mapsto -a$ 有 $i_A^* x = -x$.

5.4.2 正合序列与本原上同调类

命题 5.4.1 设 X 是 Abel S 概形. 则有单射 $\eta_{X/S}: \mathrm{Ext}_S(X, \mathbb{G}_{mS}) \to H^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$. 并且 $\eta_{X/S}$ 的像等于 $H^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$ 内所有的本原上同调类.

证明 取 $\xi \in \mathrm{Ext}_S(X, \mathbb{G}_{mS})$ 所决定的正合序列

$$0 \to \mathbb{G}_{mS} \to Y \xrightarrow{p} X \to 0,$$

其中 p 是忠实平坦拟紧态射. 这时, Y 是 X 上的 $\mathbb{G}_m$ 挠子. 按 [147]$_2$ VIII Cor. 4.5, 所有 $\mathbb{G}_m$ 挠子均是局部平凡. 所以决定 $H^1(X, \mathcal{O}_X(\mathbb{G}_{mS})) = H^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$ 内的一个元 $\eta_{X/S}(\xi)$. 可以验证 $X, S \mapsto \eta_{X/S}$ 是个函子, 所以 η 是同态.

如果 $\eta_{X/S}(\xi) = 0$, 则 $Y \xrightarrow{p} X$ 是平凡 $\mathbb{G}_m$ 挠子. 所以可以选取 p 的截面 $Y \xleftarrow{q} X$ 使得下图交换.

$$\begin{array}{ccc} Y & \xleftarrow{\quad q \quad} & X \\ & {}_{0}\nwarrow \quad \nearrow_{0} & \\ & S & \end{array}$$

于是因为 X 是 Abel 概形, 所以 q 是群同态. 因此 ξ 是分裂扩张, 即 $\xi = 0$. 这就证明了 $\eta_{X/S}$ 是单射.

取 $\xi \in \mathrm{Ext}_S(X, \mathbb{G}_{mS})$. 设 $x = \eta_{X/S}(\xi)$. 因为 $X, S \mapsto \eta_{X/S}$ 是函子, 于是与 f^* 交换. 其中 $f: X \to A$ 是同态. 以 $\mu: X \times X \to X$ 记群运算. 所以

$$\begin{aligned} \mu^*(x) &= \mu^*\eta(\xi) = \eta\mu^*\xi = \eta(\mathrm{pr}_1^*\xi + \mathrm{pr}_2^*\xi) \\ &= \mathrm{pr}_1^*\eta\xi + \mathrm{pr}_2^*\eta\xi = \mathrm{pr}_1^*x + \mathrm{pr}_2^*x. \end{aligned}$$

于是得知 η 的像为本原上同调类.

反过来, 设有本原上同调类 $x \in H^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$, 置 $Y \xrightarrow{p} X$ 为对应于 x 的 $\mathbb{G}_m$ 挠子. 以 $\mu: X \times X \to X$ 把 Y 拉回为 Y':

$$\begin{array}{ccc} Y' & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \times X & \xrightarrow{\mu} & X \end{array}$$

另一方面利用同态 $\mu: \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$ 换群得 $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$ 挠子 $Y \times Y$. 由假设 x 是本原上同调得知 Y' 与 $Y \times Y$ 同构. 用以上所得态射 $Y \times Y \to Y' \to Y$ 得 $Y \times Y \to Y$ 使下图交换,

$$\begin{array}{ccc} Y \times Y & \xrightarrow{g} & Y \\ {\scriptstyle (p,p)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X \times X & \xrightarrow{\mu} & X \end{array}$$

并且 $g(y+t,y'+t')=g(y,y')+t+t'$ $(y,y'\in Y,\ t,t'\in\mathbb{G}_{\mathrm{m}},\ y+t$ 指 t 作用在 y 上). 取 $e\in Y$ 使 $p(e)=X$ 的单位元. 在适当地用 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ 的元平移后, 可以假设 $g(e,e)=e$. 这样只要证明 Y 是群概形, 便知 Y 是从 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ 得 X 的扩张.

以下证明 Y 是群概形.

首先证明: $g(y,e)=g(e,y)=y,\ y\in Y$.

由 $pg(y,e)=py+pe=py$, 即 $g(y,e)-y\in\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$, 故得态射 $h:Y\to\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ 使得 $g(y,e)=y+h(y)$. 由 $g(y+t,e)=g(y,e)+t$ 得 $h(y+t)=h(y)$ 对所有 $t\in\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ 成立. 于是 h 分解为 $Y\to X\xrightarrow{\overline{h}}\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$. 但 $X\to S$ 是固有态射而 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}\to S$ 是仿射, 所以 $\overline{h}$ 为常值映射. 由 $g(e,e)=e$ 得 $h(e)=1$. 所以 $h(y)=1$, 即 $g(y,e)=y$ (留意在这里 $y+t$ 是指 t 作用在 y 上, 即是 $y+1$ 是 $y\cdot 1=y$).

其次证明: 对所有 $y,y'\in Y$ 有 $g(y,y')=g(y',y)$.

如前计算 $pg(y,y')$ 得知有态射 $k:Y\times Y\to\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ 使得 $g(y,y')=g(y',y)+k(y,y')$. 由 $g(y+t,y')=g(y,y')+t$, 见 $k(y+t,y')=k(y,y')$. 同样的, 知 $k(y,y'+t)=k(y')$. 于是 k 分解为 $Y\times Y\xrightarrow{(p,p)}X\times X\xrightarrow{\overline{k}}\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$. 同理 $\overline{k}$ 为常射, 并且 $k(y,y')=1$.

显然, 对所有 $y,y',y''\in Y$ 有 $g(y,g(y',y''))=g(g(y,y'),y'')$. 同样 $g(y,g(y',y''))=g(g(y,y'),y'')+l(y,y,y')$, 然后如上得 $l(y,y',y'')=1$.

最后证明: 存在态射 $i:Y\to Y$ 使得 $g(y,i(y))=e$.

记逆运算为 $i_X:X\to X:x\mapsto -x$, $i_{\mathbb{G}}:\mathbb{G}_{\mathrm{m}}\to\mathbb{G}_{\mathrm{m}}:t\mapsto t^{-1}$. 我们的 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ 挠子 $Y\xrightarrow{p}X$ 是由 $x\in H^1(X,\mathbb{G}_{\mathrm{m}}(X))$ 所决定. 显然 $i_{\mathbb{G}*}(x)=-x$. 又由于 x 是本原上同调类, 便得 $i_X^*(x)=-x$.

因为 $i_X^*(x)=i_{\mathbb{G}*}(x)$, 故有态射 $Y\xrightarrow{i}Y$ 使下图交换,

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{i} & Y \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow{i_X} & X \end{array}$$

并且 $i(y+t)=i(y)-t$, 其中 $y\in Y,\ t\in\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$. 可以假设 $i(e)=e$. 则如第 (2) 步一样可以证明 $g(y,i(y))=e$ 对所有 $y\in Y$ 成立. □

5.4.3 Abel 概形态射平凡的一个充分条件

引理 5.4.2 设 X,Y 为 Abel S 概形. 如果同态 $f:X\to Y$ 满足条件: S 每一连通分支均有一点 s 使得 $f(x_s)=0\in Y_s$, 则 $f=0$.

证明 由本篇第 三 章 3.1 节刚性引理知有截面 $\eta:S\to Y$ 使 $f=\eta\circ p$, 其中 $p:X\to S$. 所有 $\eta=(S\xrightarrow{0}X\xrightarrow{p}S\xrightarrow{\eta}Y)=0f=0$, 因为 f 同态, 所以 $f=0_p=0$. □

5.4.4　对偶保持加法

引理 5.4.3　设 X, Y 为 Abel S 概形. 又 $f, g \in \mathrm{Hom}_S(X, Y)$. 则 $(f+g)^t = f^t + g^t : Y^t \to X^t$.

证明　设 $s = (f+g)^t - f^t - g^t$. 对任意 $T \to S$ 有 $(f^t)_T = (f_T)^t$ (换基). 所以对 $s : \mathrm{Spec}(k) \hookrightarrow S$ (k 是个域) 有

$$\rho_s = (f_s + g_s)^t - f_s^t - g_s^t.$$

根据域上 Abel 簇的对偶理论, 有 $\rho_s = 0$ (见 [225], p. 125). 所以由 5.4.3 可得 $s = 0$. □

5.4.5　Picard 层的值群的正合序列

设 X 为 Abel S 概形. 记 $\mathrm{Pic}(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$. 把预层 $T \mapsto \mathrm{Pic}(X \times_S T)$ 层化得 $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$. 此层在 S 所取值是群 $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}(S)$. 记此为 $\mathrm{Pic}_S(X)$.

当 X 是 Abel S 概形时, 可以用 Grothendieck 的结果 ([141] Cor 2.4) 得正合序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}\ S \longrightarrow \mathrm{Pic}\ X \longrightarrow \mathrm{Pic}_S(X) \longrightarrow 0.$$

对 $T \in \mathfrak{Sch}/S$, 置 $X_T = X \times_S T$, 由于 $X_T \times_T T = X \times_S T$, 我们得 $\underline{\mathrm{Pic}}_{X_T/T}(T) = \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}(T)$ 和正合序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}\ T \longrightarrow \mathrm{Pic}(X_T) \longrightarrow \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}(T) \longrightarrow 0$$

(留意：层化后, $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}(T)$ 不再是预层 $T \mapsto \mathrm{Pic}(X \times_S T)$). 利用态射 $(0, 1_T) : T \to X \times_S T$ 得同态 $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}(T) \to \mathrm{Pic}(X_T)$ 分裂以上正合序列. 于是有同态 $\sigma = \sigma_{X,T/S} : \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}(T) \to \mathrm{Pic}(X \times_S T)$. 我们可以定义单射

$$\alpha_X : \mathrm{Hom}_S(S, {}^tX) \subset \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}(S) \overset{\sigma}{\hookrightarrow} \mathrm{Pic}\ X.$$

5.4.6　本原上同调的充要条件

命题 5.4.4　Pic X 的元 ξ 是本原上同调当且仅当 $\xi \in \mathrm{Im}(\alpha_X)$.

证明　考虑 (代数空间) 同态

$$\varphi = m_X^* - \mathrm{pr}_1^* - \mathrm{pr}_2^* : \mathrm{Pic}_{X/S} \longrightarrow \mathrm{Pic}_{X \times X/S},$$

其中 $m_X : X \times X \to X$ 是 X 的群运算. 由 X^t 的定义知 $X^t = \mathrm{Ker}\ \varphi$.

我们知 $X, T, S \mapsto \sigma_{X,T/S}$ 是函子. 而 $\mathrm{Hom}_S(S, {}^tX) = X^t(S)$. 所以 $\mathrm{Im}(\alpha_X)$ 的元均是本原上同调类.

反过来, 用 $(0,1_S): S \to X\times S$. 设 $\xi \in \mathrm{Pic}\ X$. 记 $(0,1_S)^*\xi = \zeta \in \mathrm{Pic}\ S$. 假设 ξ 是本原上同调类, 则得 $\zeta = \zeta+\zeta$. 故此 $\zeta = 0$. 于是知 $\xi \in \mathrm{Im}(\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}(S) \xrightarrow{\sigma} \mathrm{Pic}\ X)$. 设 $\lambda \in \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}(S)$ 使得 $\xi = \sigma(\lambda)$. 由 $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}(S) = \mathrm{Hom}_S(S, \mathrm{Pic}_{X/S})$ 及 ξ 是本原同构类, 得

$$(S \xrightarrow{\lambda} \mathrm{Pic}_{X/S} \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Pic}_{X\times X/S}) = 0.$$

由于 $\mathrm{Ker}\ \varphi = X^t$, 得 $\lambda \in \mathrm{Hom}_S(S, X^t)$, 所以 $\xi \in \mathrm{Im}(\alpha_X)$.

由 5.4.2 和 5.4.6, 我们得以下定理.

5.4.7　Weil-Barsotti 公式

定理 5.4.5(Weil-Barsotti 公式)　设 X 为 Abel S 概形, 则有函子同构 $X, S \mapsto \beta_{X/S}$, 使得有以下交换图:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_S(S, X^t) & \xrightarrow[\approx]{\beta_{X/S}} & \mathrm{Ext}_S(X, \mathbb{G}_{mS}) \\ & {\scriptstyle\sigma}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\eta} & \\ & \mathrm{Pic}(X) & \end{array}$$

5.4.8　Abel 概形的正合交换图

定理 5.4.6　设 $\varphi: X \to Y$ 是 Abel S 概形满同态, 并且 $N = \mathrm{Ker}\ \varphi$ 是有限平坦 S 群概形. 则有正合序列

$$0 \to N^D \to Y^t \xrightarrow{\varphi^t} X^t \to 0.$$

从 φ 到这个序列是个函子, 即是说: 设 $\psi: X_1 \to Y_2$ 有同样性质, 并且有交换图:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_1 & \xrightarrow{\psi} & Y_1 \end{array}$$

则有行为正合序列的交换图:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & (\mathrm{Ker}\ \varphi)^D & \longrightarrow & Y^t & \xrightarrow{\varphi^t} & X^t & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & (\mathrm{Ker}\ \psi)^D & \longrightarrow & Y_1^t & \xrightarrow{\psi^t} & X_1^t & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

证明 置 $M = \mathrm{Ker}(\varphi^t)$. 取 $T \in \mathfrak{Sch}/S$. 用纤维积得正合序列

$$0 \longrightarrow M_T \longrightarrow Y_T^t \xrightarrow{\varphi_T^t} X_T^t.$$

同理并按 5.2.3, 得正合序列

$$0 \longrightarrow N_T \longrightarrow X_T \xrightarrow{\varphi_T} Y_T \longrightarrow 0.$$

由于 $X \xrightarrow{f} S$ 是 Abel 概形, 得 $f_*\mathcal{O}_X \approx \mathcal{O}_S$, 于是有同构

$$(\varphi_T^t)^* : \mathrm{Hom}_T(Y_T, \mathbb{G}_{\mathrm{mT}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_T(X_T, \mathbb{G}_{\mathrm{mT}})$$

(两边均同构于 $\mathcal{O}_S(S)^*$). 所以从以上正合序列的长正合序列, 得正合序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_T(N_T, \mathbb{G}_{\mathrm{mT}}) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}_T(Y_T, \mathbb{G}_{\mathrm{mT}}) \xrightarrow{\varphi_T^*} \mathrm{Ext}_T(X_T, \mathbb{G}_{\mathrm{mT}}).$$

由 Weil-Barsotti 公式得交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_T(N_T, \mathbb{G}_{\mathrm{mT}}) & \xrightarrow{\delta} & \mathrm{Ext}_T(Y_T, \mathbb{G}_{\mathrm{mT}}) & \xrightarrow{\varphi_T^*} & \mathrm{Ext}_T(X_T, \mathbb{G}_{\mathrm{mT}}) \\
 & & \uparrow \vdots & & \approx \uparrow \beta_{Y_T} & & \approx \uparrow \beta_{X_T} \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_T(T, M_T) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_T(T, Y_T^t) & & \mathrm{Hom}_T(T, X_T^t)
\end{array}$$

从此得同构

$$\delta = \delta_{\varphi_T} : \mathrm{Hom}_T(T, M_T) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_T(N_T, \mathbb{G}_{\mathrm{mT}}).$$

据 Cartier 特征标群公式得同构

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Hom}_T(T, M_T) & \xrightarrow{\delta_{\varphi_T}} & \mathrm{Hom}_T(N_T, \mathbb{G}_{\mathrm{mT}}) & \xrightarrow{\psi} & \mathrm{Hom}_T(T, N_T^D) \\
* \Vert & & & & \Vert \\
\mathrm{Hom}_S(T, M) & & \xrightarrow{\approx} & & \mathrm{Hom}_S(T, N^D)
\end{array}$$

(*: 用 [142] 3.3.14, 在此把 $(N^D)_T$ 等同于 $(N_T)^D$). 于是得同构

$$\lambda_\varphi : N^D = (\mathrm{Ker}\ \varphi)^D \xrightarrow{\sim} M = \mathrm{Ker}\,(\varphi^t).$$

所以对 $s \in S$, 有满射 $\varphi_s^t : Y_s^t \to X_s^t$. 于是 φ^t 为满射. 因此按 3.2.3 节 和 5.2.3 节知

$$0 \longrightarrow N^D \longrightarrow Y^t \xrightarrow{\varphi^t} X^t \longrightarrow 0$$

是正合序列. □

5.4.9　具有有限纤维的 Abel 概形满同态的核

引理 5.4.7　设 $f: X \to Y$ 是 Abel S 概形的满同态，并且 f 的核 $K = \mathrm{Ker}(f)$ 的纤维是有限集. 则 K 是有限平坦 S 概形.

证明　K 是 X 的闭子概形. $K \to S$ 是拟有限和固有态射. 所以 $K \to S$ 是有限 ([144]₁ 4.4.2), 并且是平坦 (第三章引理 1.2.4). □

5.4.10　κ 函子

设 X 为 Abel S 概形. 对应于

$$1_{X^t} \in \mathrm{Hom}_S(X^t, X^t) \subset \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}(X^t)$$

在 $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}(X^t)$ 内的元素记为 ξ_X. 我们已定义同态

$$\sigma = \sigma_{X,X^t/S} : \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}(X^t) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X \times_S X^t).$$

置 $\mathcal{P}_X = \sigma(\xi_X) \in \mathrm{Pic}(X \times_S X^t)$ (Poincaré 丛). 以 $\mathcal{P}'_X \in \mathrm{Pic}(X^t \times_S X)$ 记交换因子后所得的元. 由

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X^t \times_S X) \longrightarrow \underline{\mathrm{Pic}}_{X^t/S}(X) \longrightarrow 0$$

得 $\rho_X = \mathcal{P}'_X \mod \mathrm{Pic}(X)$ 在 $\underline{\mathrm{Pic}}_{X^t/S}(X) = \mathrm{Hom}_S(X, \mathrm{Pic}_{X^t/S})$ 中. 此决定态射

$$\kappa_X : X \longrightarrow \mathrm{Pic}_{X^t/S}.$$

5.4.11　κ 函子的性质

引理 5.4.8　(1) $X \mapsto \kappa_X$ 是函子. κ_X 可分解为 $X \xrightarrow{\kappa_X} X^{tt} \to \mathrm{Pic}_{X^t/S}$. κ_X 为同态.

(2) 下图交换.

$$\begin{array}{ccc} X^t & \xrightarrow{\kappa_{X^t}} & X^{ttt} \\ & \searrow^{1_{X^t}} & \downarrow{\scriptstyle (\kappa_X)^t} \\ & & X^t \end{array}$$

(3) κ_{X^t} 与 $(\kappa_X)^t$ 为同构.

证明　(1) 由构造过程得知 $X \mapsto \kappa_X$ 为函子. $\mathcal{P}_X$ 限制至 $0 \times X^t$ 为零. 所以 κ_X 与零截面交换. 故 κ_X 可分解成 $X \to X^{tt} \to \mathrm{Pic}_{X^t/S}$. 由此得知 κ_X 为同态 (用推论 3.2.1).

(2) 有交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Pic}(X^t \times X) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}(X^t) \\ \downarrow{\scriptstyle (0,1)^*} & & \downarrow{\scriptstyle (\mathcal{O}_{X^t})^*} \\ \mathrm{Pic}\, X = \mathrm{Pic}(S \times X) & \xrightarrow{\sim} & \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}(S) \end{array}$$

故知 $\mathcal{P}_X$ 制限至 $X \times 0$ 为零. 所以

$$\begin{array}{ccccc} \underline{\mathrm{Pic}}_{X^t/S}(X) & \xrightarrow{\sigma} & \mathrm{Pic}(X^t \times_S X) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}(X^t) \\ \kappa_X & \longmapsto & & & 1_{X^t} \end{array}$$

此时 (2) 所求的交换图由下图推出:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Pic}(X^t \times X) & & \xrightarrow{(1,\kappa_X)^*} & & \mathrm{Pic}(X^t \times X^{tt}) \\ \downarrow\uparrow & \nwarrow\searrow & & \nearrow\swarrow & \downarrow\uparrow \\ & \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}(X^t) & \longleftarrow & \underline{\mathrm{Pic}}_{X^{tt}/S} & \\ \underline{\mathrm{Pic}}_{X^t/S}(X) & & \xleftarrow[(\kappa_X)^*]{} & & \underline{\mathrm{Pic}}_{X^t/S}(X^{tt}) \end{array}$$

(3) 由 (2) 得 κ_{X^t} 是单射. 所以 κ_{X^t} 在纤维上是单射. 在 Abel 簇上 (3) 成立. 于是 κ_{X^t} 在纤维上是满射. 因此 κ_{X^t} 是忠实平坦 (用 3.2.4).

这便得证 κ_{X^t} 在 $\mathfrak{F}_S$ (fpqc 交换群层范畴) 内是同构. 因此 κ_{X^t} 是同构 (用引理 3.2.4). □

5.4.12　双对偶定理

定理 5.4.9(双对偶定理 (Biduality))　$\kappa_X : X \to X^{tt}$ 是同构.

证明 (Cartier-Nishi-Oort)　设 S 是域时 κ_X 是同构 (见 [264], §13, Cor. p.132). 所以对 $s \in S$, 在纤维上有 $(\kappa_X)_s : X_s \to (X^{tt})_s$ 是满射. 因此 κ_X 是忠实平坦 (用第三章引理 1.2.4).

由引理 5.4.7 得 K 是在 S 上有限平坦. 按 5.2.3 得正合序列

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow X \xrightarrow{\kappa_X} X^{tt} \longrightarrow 0.$$

用 5.4.8 得正合序列

$$0 \longrightarrow K^D \longrightarrow X^{ttt} \xrightarrow{\kappa_{X^t}} X^t \longrightarrow 0.$$

由于 5.4.11 (3) 得 $K^D = 0$. 所以 $K \cong K^{DD} = 0$, 得证 κ_X 为同构. □

5.5 群概形的双扩张

5.5.1 双挠子

我们选定一个 Grothendieck 拓扑 (如固定基概形 S, 选 S 上的 fpqc 拓扑). 用这个拓扑所定义的**集层** (sheaf of sets) 所组成的范畴记作 $\mathcal{T}$ (用 [148]$_1$ 的术语, 这是一个 topos).

我们常以 $0_{\mathcal{T}}$ 记这个范畴的一个**终对象** (final 或 terminal object), 即是说, $\mathcal{T}$ 的每个对象 F 有唯一态射 $F \to 0_{\mathcal{T}}$. 在 $(\mathfrak{Sch}/S)_{\text{fpqc}}$ 中的终对象是 id_S 或 S.

设有群 $A, B \in \mathcal{T}$. 设透过态射 $F \times B \to E$ 从右作用在 $E \in \mathcal{T}$ 上. 又设 A 从左作为 B 自同构作用 E 上 (即有群同态 $A \to \text{Aut}_B E$). 则以下条件等价:

(1) E 是右 B 挠子和左 A 挠子,

(2) E 是右 B 挠子和有同构 $A \to \text{Aut}_B E$.

如果以上条件成立, 则我们说 E 是 A-B **双挠子** (bi-torsor). 当 $A = B = G$, 我们就简称 E 为 G 双挠子 ([130] §1.5.3).

取 $\mathcal{T}$ 内交换群 P, Q, G. 以 e 或 $0_{\mathcal{T}}$ 记 $\mathcal{T}$ 内终对象. 有卡氏交换图:

$$\begin{CD} P @<<< P \times Q \\ @VVV @VVV \\ e @<<< Q \end{CD}$$

又定义 G_P, G_Q:

$$\begin{CD} G @<<< G_P \\ @VVV @VVV \\ e @<<< P \end{CD} \qquad \begin{CD} G @<<< G_Q \\ @VVV @VVV \\ e @<<< Q \end{CD}$$

我们把 $G_{P\times Q}$ 等同于 $(G_P)_{P\times Q}$ 和 $(G_Q)_{P\times Q}$:

$$\begin{CD} G @<<< G_{P\times Q} \\ @VVV @VVV \\ e @<<< P \times Q \end{CD}$$

$$\begin{array}{ccccc} G & \longleftarrow & G_P & & \\ \downarrow & & \downarrow & \nwarrow & \\ e & \longleftarrow & P & & (G_P)_{P\times Q} \\ & \nwarrow & & \nwarrow^{\text{pr}_1} & \downarrow \\ & & Q & \longleftarrow & P \times Q \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} G & \longleftarrow & G_Q & & \\ \downarrow & & \downarrow & \nwarrow & \\ e & \longleftarrow & Q & & (G_Q)_{P\times Q} \\ & \nwarrow & & \nwarrow^{\text{pr}_2} & \downarrow \\ & & P & \longleftarrow & P \times Q \end{array}$$

在本节将不会用两个群 P, Q 的直积群结构. 我们将把 $P \times Q$ 看作 P 群 Q_P 或 Q 群 P_Q. 意思是这样: Q_P 看作从 $Q \to e$ (透过 $e \leftarrow P$) 的逆像:

$$\begin{array}{ccc} Q & \longleftarrow & Q_P \\ \downarrow & & \downarrow \\ e & \longleftarrow & P \end{array}$$

是带有 P 从左的作用. 同理我们有 $(G_P)_{Q_P} = G_{P\times Q}$.

设有群 $G \in \mathcal{T}$ 从右作用在 P $(\in \mathcal{T})$ 上和从左作用在 Q $(\in \mathcal{T})$ 上. 则 G 对角作用在 $P \times Q$ 上:

$$\begin{aligned} P \times Q \times G &\longrightarrow P \times Q \\ (p, q, g) &\longmapsto (pg, g^{-1}q). \end{aligned}$$

由 $P \times G$ 用 G 对角作用所得的商记为 $P \overset{G}{\wedge} Q$, 称为**缩积** (produit contracté). **用直极限得知** $P \overset{G}{\wedge} Q$ 在 $\mathcal{T}$ 内存在并且表示函子 $T \mapsto \mathrm{Hom}(P \times Q, T)^G$, 其中 $\mathrm{Hom}(\bullet)^G$ 是指 G 不变同态. (见 [130] III §1–1.3). 我们常把 $P \overset{G}{\wedge} Q$ 写作 PQ (见 $[151]_1$ VII, 1.14 p7).

5.5.2　群扩张和双挠子

定理 5.5.1　*给定群 $P, Q \in \mathcal{T}$ 和态射 $j : E \to P$, 存在群运算使 E 是从 G 得 P 的扩张*

$$1 \longrightarrow G \stackrel{i}{\longrightarrow} E \stackrel{j}{\longrightarrow} P \longrightarrow 1$$

当且仅当 E 是 G_P 双挠子和对任意对象 $T \in \mathcal{T}$ 存在与换基相容的双挠子同构

$$\varphi_{p,p'} : E_p E_{p'} \stackrel{\sim}{\longrightarrow} E_{pp'} \qquad (p, p' \in P(T)),$$

并且 (5.1) 图交换.

$$\begin{array}{ccccc} & & E_{pp'}E_{p''} & & \\ & \overset{\varphi_{p,p'}\wedge \mathrm{id}}{\nearrow} & & \overset{\varphi_{pp',p''}}{\searrow} & \\ E_pE_{p'}E_{p''} & & & & E_{pp'p''} \\ & \underset{\mathrm{id}\wedge\varphi_{p',p''}}{\searrow} & & \underset{\varphi_{p,p'p''}}{\nearrow} & \\ & & E_pE_{p'p''} & & \end{array} \tag{5.1}$$

在以上公式我们把缩积 $E_p \overset{G_T}{\wedge} E_{p'}$ 简写为 $E_pE_{p'}$. 在描述扩张的序列中: j 是群满同态, i 是从 G 到 $\mathrm{Ker}\, j$ 的同构. 如果暂把 $\varphi_{p,p'}$ 记作 $\varphi^T_{p,p'}$. 则 "与换基相容" 是指: $T \mapsto \varphi^T_{p,p'}$ 是函子.

证明 设有运算使 E 为从 G 得 P 的扩张. 则利用 i, G 从左和右作用在 E 上: $x \mapsto i(g)xi(g')$, $x \in E(T)$, $g, g' \in G(T)$, $T \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{T}$. 利用 $e \leftarrow P$ 换基从 $\mathcal{T}$ 得 $\mathcal{T}_P$. 用 j 把 E 看作 $\mathcal{T}_P$ 的对象, 则 E 为 $\mathcal{T}_P$ 内的 G_P 双挠子.

不单如此, 我们还需顾及 E 的群运算. 取截面 $p, p' : e \to P$. 则 E 的群运算诱导出态射 $\varphi : E_p \times E_{p'} \to E_{pp'}$, 并满足以下等式:

$$\varphi(gx, x') = g\varphi(x, x'), \qquad \varphi(x, x'g') = \varphi(x, x')g',$$

$$\varphi(xg, x') = \varphi(x, gx'),$$

其中 T 为 $\mathcal{T}$ 的任意对象, $g, g' \in G(T)$, $x \in E_p(T)$, $x' \in E_{p'}(T)$, E_p 如下定出:

$$\begin{array}{ccc} E_p & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ e & \xrightarrow{p} & P \end{array}$$

以上第三等式指出 φ 可分解如下

$$E_p \times E_{p'} \xrightarrow{\pi} E_p \overset{G}{\wedge} E_{p'} \xrightarrow{\varphi_{p,p'}} E_{pp'},$$

其中 π 为对商投射, 这样 E 的运算满足结合律就等同要求 $\varphi_{p,p'}$ 满足定理中的交换图 (5.1) 了.

以上应对 P 的任意点讨论, 即对任意 $\mathcal{T}$ 的对象 T, 换基从 $\mathcal{T}$ 得 $\mathcal{T}_T$ (在 $\mathcal{T}_T$ 中 T 为终对象). 考虑 P 的 T 值点 $p, p' : T \to P$. 如上得 $\varphi_{p,p'}$. 这时我们还需要求 $\varphi_{p,p'}$ 的构造与换基 $T' \to T$ 相容. 这等同以下的要求: 置 $T = P \times P$, $p = \mathrm{pr}_1 : P \times P \to P$, $P' = \mathrm{pr}_2$, $\mu : P \times P \to P$ 为 P 的群运算, 则我们有双挠子的同构

$$\varphi : \mathrm{pr}_1^* E \wedge \mathrm{pr}_2^* E_2 \xrightarrow{\sim} \mu^* E.$$

余下证明我们留给读者. (参考 [151]$_1$ VII p.8).

5.5.3 群的双扩张

设 P, Q, G 为 $\mathcal{T}$ 内交换群. E 为 $G_{P\times Q}$ 挠子. 同时 E 是从 G_P 得 Q_P 的扩张. E 又是从 G_Q 得 P_Q 的扩张. 即是说对 $\mathcal{T}$ 的任一对象 T 和任意 $p, p' \in P(T)$, $q \in Q(T)$, 有 G_T 挠子同构

$$\varphi_{p,p';q} : E_{p,q} E_{p',q} \xrightarrow{\sim} E_{pp',q}.$$

此时, $(p,q)\in(P\times Q)(T)=P(T)\times Q(T)$, 卡氏图定义:

$$\begin{array}{ccc} E_{p,q} & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ T & \xrightarrow{(p,q)} & P\times Q \end{array}$$

我们要求 $\varphi_{p,p';q}$ 与换基相容并且要求下图交换 (结合律):

$$\begin{array}{ccccc} & & E_{pp',q}E_{p'',q} & & \\ & \nearrow^{\varphi_{p,p';q}\wedge \mathrm{id}} & & \searrow^{\varphi_{pp',p'';q}} & \\ E_{p,q}E_{p',q}E_{p'',q} & & & & E_{pp'p'',q} \\ & \searrow_{\mathrm{id}\wedge\varphi_{p',p'';q}} & & \nearrow_{\varphi_{p,p'p'';q}} & \\ & & E_{p,q}E_{p'p'',q} & & \end{array}$$

(交换律)

$$\begin{array}{ccc} E_{p,q}E_{p',q} & \xrightarrow{\varphi_{p,p';q}} & E_{pp',q} \\ \mathrm{sym}\downarrow & & \downarrow\mathrm{id} \\ E_{p',q}E_{p,q} & \xrightarrow{\varphi_{p',p;q}} & E_{p'p,q} \end{array}$$

同时对 $p\in P(T)$, $q,q'\in Q(T)$ 有 G_T 挠子同构

$$\psi_{p;q,q'}: E_{p,q}E_{p,q'}\xrightarrow{\sim} E_{pp',q},$$

并有交换图:

$$\begin{array}{ccccc} & & E_{p,qq'}E_{p,q''} & & \\ & \nearrow^{\psi_{p;q,q'}\wedge \mathrm{id}} & & \searrow^{\psi_{p;qq',q''}} & \\ E_{p,q}E_{p,q'}E_{p,q''} & & & & E_{p,qq'q''} \\ & \searrow_{\mathrm{id}\wedge\psi_{p;q',q''}} & & \nearrow_{\psi_{p;q,q'q''}} & \\ & & E_{p,q}E_{p,q'q''} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} E_{p,q}E_{p,q'} & \xrightarrow{\psi_{p;q,q'}} & E_{p,qq'} \\ \mathrm{sym}\downarrow & & \downarrow\mathrm{id} \\ E_{p,q'}E_{p,q} & \xrightarrow{\psi_{p;q',q}} & E_{p,q'q} \end{array}$$

我们说以上两个在 E 中的扩张结构相容, 如果对 $\mathcal{T}$ 的任意对象 T, 任意 $p,p'\in P(T)$, $q,q'\in Q(T)$ 有交换图:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & E_{p,qq'}E_{p',qq'} & & \\
 & \nearrow^{\psi_{p;q,q'}\wedge\psi_{p';q,q'}} & & \searrow^{\varphi_{p,p';qq'}} & \\
E_{p,q}E_{p,q'}E_{p',q}E_{p',q'} & & & & \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{sym}} & & & & \\
E_{p,q}E_{p',q}E_{p,q'}E_{p',q'} & & & & E_{pp',qq'} \\
 & \searrow_{\varphi_{p,p';q}\wedge\varphi_{p,p';q'}} & & \nearrow_{\psi_{pp';q,q'}} & \\
 & & E_{pp',q}E_{pp',q'} & &
\end{array}
$$

当以上所有条件都满足时我们说 E 是从 G 得 (P,Q) 的**双扩张** (bi-extension) (见 [151]$_1$ VII, Def. 2.1). 由这样的双扩张所决定的范畴我们记作 BIEXT$(P,Q;G)$ (见 [151]$_1$ VII, (2.4.1)).

5.5.4 挠子的刚化

设有 $\mathcal{T}$ 的对象 P, 又设 P 有截面 $e_P : e \to P$. 设 G 为 $\mathcal{T}$ 内的群, E 为 G_P 挠子. E 关于 e_P 的**刚化** (rigidification) 是指 G 挠子 e_P^*E 的**平凡化** (trivialization), 即 e_P^*E 的一个截面.

又设有 $\mathcal{T}$ 的对象 Q 和 Q 的截面 e_Q. 现设 E 为 $G_{P\times Q}$ 挠子. 用 e_Q 得 $P\times Q\to P$ 的截面 $e_{P\times Q/P}$. 设 α 为 $e^*_{P\times Q/P}E\to P$ 的截面. 同样用 e_P 得 $P\times Q\to Q$ 的截面 $e_{P\times Q/Q}$. 设 β 为 $e^*_{P\times Q/Q}E\to Q$ 的截面. 如果 (α,β) 是 $(e_P\times e_Q)^*E$ 的截面. 我们称 (α,β) 为 E 关于 (e_P,e_Q) 的**双刚化** (birigidification). 双刚化 $G_{P\times Q}$ 挠子所决定的范畴我们记作 TORSBIRIG$(P,Q;G)$ ([151]$_1$, VII, 1.3 节).

利用双扩张 E 的单位截面可以得到 E 的双刚化. 于是有函子

$$\mathrm{BIEXT}(P,Q;G)\longrightarrow \mathrm{TORSBIRIG}(P,Q;G)$$

([151]$_1$, VII, 2.2, 2.9). 当 $G=\mathbb{G}_\mathrm{m}$ 时, Grothendieck ([151]$_1$, VIII, 7.5) 给出一些条件使这个函子是范畴等价. (这是他在 [151] 的两篇共 190 页的文章的最后的一个结果.)

5.6 立方挠子

5.6.1 一般情形

我们选定一个 Grothendieck 拓扑. 用这个拓扑所定义的集层所组成的范畴记作 $\mathcal{T}$ (用 [148]$_1$ 的术语这是一个 topos).

设 A 和 G 是 $\mathcal{T}$ 内的交换群. 设 L 为 A 上的 G 挠子. 对 $n \geqslant 0$, 我们用以下公式定义在 A^n 上的 G 挠子

$$\mathscr{D}_{n,A,G}(L) = \bigotimes_{\substack{I \subset \{1,\cdots,n\} \\ I \neq \emptyset}} (m_I^* L)^{\otimes(-1)^{n+\mathrm{Card}\, I}}$$

其中 $\mathrm{Card}\, I$ 是 I 的元的个数, $m_I : A^n \to A : (x_1, \cdots, x_n) \mapsto \sum_{i \in I} x_i = x_I$, 而 $\otimes$ 是指 G 挠子的和. 我们常简写 $\mathscr{G}_{n,A,G}$ 为 $\mathscr{D}_n$.

为了方便理解, 我们取 A 的 T 点, 即 $x : T \to A$. 以 L_x 记 T 上 G 挠子 $x^* L$. 如此,

$$\mathscr{D}_n(L)_{(x_1,\cdots,x_n)} = \bigotimes_{\substack{I \subset \{1,\cdots,n\} \\ I \neq \emptyset}} L_{x_I}^{\otimes(-1)^{n+\mathrm{Card}\, I}}.$$

$\mathscr{D}_n(L)$ 有以下的性质.

(1) 加性: 如果 L 和 M 为 A 上的 G 挠子, 则有 A^n 上的 G 挠子的自然同构

$$\mathscr{D}_n(L \otimes M) \xrightarrow{\sim} \mathscr{D}_n(L) \otimes \mathscr{D}_n(M).$$

(2) $A \mapsto \mathscr{D}_{n,A,G}(L)$ 是函子 (functoriality in A):

如果 $\varphi : A' \to A$ 是 $\mathcal{T}$ 内交换群同态, 定义

$$\varphi^{(n)} : A^n \longrightarrow A^n : (x_1, \cdots, x_n) \longmapsto (\varphi(x_1), \cdots, \varphi(x_n)),$$

则有自然同构

$$\mathscr{D}_n(\varphi^* L) \xrightarrow{\sim} (\varphi^{(n)})^* \mathscr{D}_n(L).$$

(3) $G \mapsto \mathscr{D}_{n,A,G}(L)$ 是函子: 如果 $\psi : G \to G'$ 是 $\mathcal{T}$ 内交换群同态, 用 ψ 换群从 L 得 A 上 G' 挠子 L^ψ. 则有 A^n 上 G' 挠子自然同构

$$\mathscr{D}_n(L^\psi) \xrightarrow{\sim} \mathscr{D}_n(L)^\psi.$$

(4) $L \mapsto \mathscr{D}_{n,A,G}(L)$ 是函子: 如果 $u : L \to M$ 是 A 上 G 挠子同态, 则有 A^n 上 G 挠子自然同构

$$\mathscr{D}_n(u) : \mathscr{D}_n(L) \xrightarrow{\sim} \mathscr{D}_n(M).$$

(5) 对称性: 以 $\mathfrak{S}_n$ 记 n 个元上的对称群. 对 $\gamma \in \mathfrak{S}_n$, 则 γ 对 A^n 的因子置换, 我们仍记此为 $\gamma : A^n \to A^n$. 我们有 G 挠子的自然同构

$$\chi_\gamma : \mathscr{D}_n(L) \xrightarrow{\sim} \gamma^* \mathscr{D}_n(L).$$

(6) 以 G_A 记 A 上的平凡 G 挠子 $G \times A$. 有同然同构

$$\mathscr{D}_n(G_A) \xrightarrow{\sim} G_{A^n}.$$

(7) 平凡化 (trivialization): $L \to A$ 的截面 σ 对应于 L 的平凡化, 即同构 $u_\sigma : G_A \to L : g \cdot a \mapsto g \cdot \sigma a$, 其中 G_A 为平凡挠子 $G \times A$. 按性质 (4), (6), 从 σ 得挠子 $\mathscr{D}_n(L) \to A^n$ 的截面 $\mathscr{D}_n(\sigma)$, 并且有

$$\mathscr{D}_n(f\sigma) = \mathscr{D}_n(f)\mathscr{D}_n(\sigma),$$

其中 $f : A \to G$ 为 $\mathcal{T}$ 内态射.

(8) 刚化 (rigidification): 以 $0_{\mathcal{T}}$ 记 $\mathcal{T}$ 的终对象, 以 $e_A : 0_{\mathcal{T}} \to A$ 为"零截面". 对 $1 \leqslant i \leqslant n$, 以 $\eta_i : A^{n-1} \to A$ 记在 A^n 的 i 位为 e_A 的态射. 则有自然同构

$$\eta_i^* \mathscr{D}_n(L) \xrightarrow{\sim} p^* e_A^*(L)^{\otimes(-1)^{n+1}},$$

其中 $p : A^{n-1} \to 0_{\mathcal{T}}$ 为结构态射, 并且 η_i 与 η_j 在 $\eta_i(A^{n-1}) \cap \eta_j(A^{n-1})$ 上等同.

5.6.2 平方挠子

本小节我们考虑 $\mathscr{D}_2$. 按定义,

$$\mathscr{D}_2(L)_{x,y} = L_{x+y} \otimes L_x^{-1} \otimes L_y^{-1}.$$

$\mathscr{D}_2$ 的对称性是指有同构

$$\xi_{x,y} : \mathscr{D}_2(L)_{x,y} \xrightarrow{\sim} \mathscr{D}_2(L)_{y,x},$$

并满足: $\xi_{x,x} = \mathrm{id}$ 和 $\xi_{x,y} \circ \xi_{y,x} = \mathrm{id}$. 从直接计算得

$$\varphi_{x,y,z} : \mathscr{D}_2(L)_{x+y,z} \otimes \mathscr{D}_2(L)_{x,y} \xrightarrow{\sim} \mathscr{D}_2(L)_{x,y+z} \otimes \mathscr{D}_2(L)_{y,z}$$

(两边同构于 $L_{x+y+z} \otimes L_x^{-1} \otimes L_y^{-1} \otimes L_z^{-1}$). 此时 $p^* e_A^* L^{-1} = L_0^{-1}$, 其中 L_0 是 L 在原点 0 的纤维. 而刚性则由以下两个同构给出

$$\mathscr{D}_2(L)_{0,y} \overset{\rho_y}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} L_0^{-1} \overset{\rho_x}{\underset{\sim}{\longleftarrow}} \mathscr{D}_2(L)_{x,0}.$$

同构 ξ, φ, ρ 相容是指下图交换:

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{D}_2(L)_{y,z} \otimes \mathscr{D}_2(L)_{0,y} & \xrightarrow{\varphi_{0,y,z}} & \mathscr{D}_2(L)_{0,y+z} \otimes \mathscr{D}_2(L)_{y,z} \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & L_0^{-1} \otimes \mathscr{D}_2(L)_{y,z} & \end{array}$$

从 ρ_y, ρ_x 可得 $p^* e_A^* L$ 两个截面, 即有态射 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 : A \to L_0 = e_A^* L$. 从以上相容性推得 $\varepsilon_1(0) = \varepsilon_2(0)$. 记此作 $\varepsilon : 0_T \to L_0$.

引理 5.6.1 设 L 为 A 上 G 挠子. 则 $\mathscr{D}_2(L) \to A \times A$ 的截面一一对应于 L 上的运算 $L \times L \xrightarrow{*} L$, 并满足条件

$$\varepsilon_1(x) * \tilde{x} = \tilde{x}, \qquad \tilde{x} * \varepsilon_2(x) = \tilde{x},$$

其中 $x \in A$, $\tilde{x} \in L$ 在 x 上.

证明 给出截面 $\sigma : \mathscr{D}_2(L) \longleftarrow A \times A$. 对 $(x, y) \in A^2$, 有 $L_{x+y} \otimes L_x^{-1} \otimes L_y^{-1}$ 的平凡化. 即有同构 $L_x \otimes L_y \to L_{x+y}$, 于是得运算 $L \times L \to L : (a, b) \mapsto a * b$. 透过 $L \to A$, 此运算与 A 的群律相容. 并且对 $a \in L$, $b \in L$, $g \in G$, 有

$$(ga) * b = a * (gb) = g(a * b).$$

反过来, 从 $*$ 得用以下公式定义截面:

$$\sigma(\pi(a), \pi(b)) = a * b \otimes a^{-1} \otimes b^{-1},$$

其中 $a, b \in L$, $\pi : L \to A$ 为结构同态. □

命题 5.6.2 给定 A 上的 G 挠子 L. 则 $\mathscr{D}_2(L) \to A \times A$ 的截面 σ 满足:

对称条件: $\sigma(y, x) = \xi_{x,y}(\sigma(x, y))$,

和

2 上闭链条件: $\varphi_{x,y,z}(\sigma(x+y, z) \otimes \sigma(x, y)) = \sigma(x, y+z) \otimes \sigma(y, z)$ 当且仅当对应于 σ 的运算 $L \times L \xrightarrow{*} L$ 是交换的和满足结合律. 此时 $(L_0, *)$ 与群 G 同构. 亦即 $(L, *)$ 是从 G 得 A 的扩张.

5.6.3　立方挠子

设 L 为 A 上的 G 挠子. 考虑 $\mathscr{D}_3(L)$. 按定义

$$\mathscr{D}_3(L)_{x,y,z} = L_{x+y+z} \otimes L_{x+y}^{-1} \otimes L_{x+z}^{-1} \otimes L_{y+z}^{-1} \otimes L_x \otimes L_y \otimes L_z.$$

对称性是指对 $\gamma \in \mathfrak{S}_3$, $(x_1, x_2, x_3) \in A^3$ 有同构

$$(\chi_\gamma)_{x_1,x_2,x_3} : \mathscr{D}_3(L)_{x_1,x_2,x_3} \xrightarrow{\sim} \mathscr{D}_3(L)_{x_{\gamma(1)},x_{\gamma(2)},x_{\gamma(3)}}.$$

直接计算得同构

$$\psi_{x,y,z,t} : \mathscr{D}_3(L)_{x+y,z,t} \otimes \mathscr{D}_3(L)_{x,y,t} \xrightarrow{\sim} \mathscr{D}_3(L)_{x,y+z,t} \otimes \mathscr{D}_3(L)_{y,z,t}.$$

定义 5.6.1 我们说 A 上的 G 挠子 L 是立方挠子或说有**立方结构** (cubical structure), 如果 $\mathscr{D}_3(L) \to A^3$ 有满足以下条件的截面 τ:

(i) τ 在对称群 $\mathfrak{S}_3$ 下不变, 即, 对 $\gamma \in \mathfrak{S}_3$, 有

$$\chi_\gamma(\tau) = \gamma^*(\tau).$$

(ii) τ 满足上闭链条件:

$$\psi_{x,y,z,t}(\tau(x+y,z,t) \otimes \tau(x,y,t)) = \tau(x,y+z,t) \otimes \tau(y,z,t).$$

立方挠子 (L,τ) 的平凡化是指 $L \to A$ 的截面 σ 使得 $\mathscr{D}_3(\sigma) = \tau$.

从直接计算得同构

$$\begin{array}{c}
\mathscr{D}_2(L)_{x+y,z} \otimes \mathscr{D}_2(L)^{-1}_{x,z} \otimes \mathscr{D}_2(L)^{-1}_{y,z} \\
\searrow^{(\alpha_1)_{x,y,z}}_{\sim} \\
\mathscr{D}_2(L)_{x,y,z} \\
\nearrow^{\sim}_{(\alpha_2)_{x,y,z}} \\
\mathscr{D}_2(L)_{x,y+z} \otimes \mathscr{D}_2(L)^{-1}_{x,y} \otimes \mathscr{D}_2(L)^{-1}_{x,z}
\end{array}$$

设 τ 为 $\mathscr{D}_3(L) \to A^3$ 的截面. 则用 α_1, α_2 得 $\mathscr{D}_2(L)_{x+y,z} \otimes \mathscr{D}_2(L)^{-1}_{x,z} \otimes \mathscr{D}_2(L)^{-1}_{y,z}$ 和 $\mathscr{D}_2(L)_{x,y+z} \otimes \mathscr{D}_2(L)^{-1}_{x,y} \otimes \mathscr{D}_2(L)^{-1}_{x,z}$ 的截面 σ_1 和 σ_2. 此时有

$$\alpha_1\sigma_1 = \tau = \alpha_2\sigma_2. \tag{5.2}$$

如前一小节, 从 σ_1, σ_2 得挠子 $\mathscr{D}_2(L)$ 上的运算:

$$*_1 : \mathscr{D}_2(L)_{x,z} \otimes \mathscr{D}_2(L)_{y,z} \longrightarrow \mathscr{D}_2(L)_{x+y,z},$$

$$*_2 : \mathscr{D}_2(L)_{x,y} \otimes \mathscr{D}_2(L)_{x,z} \longrightarrow \mathscr{D}_2(L)_{x,y+z}.$$

命题 5.6.3 设有 A 上的 G 挠子. 则 L 的立方结构一一对应于从 G 得 (A, A) 的双扩张 $(\mathscr{D}_2(L), *_1, *_2)$, 其中由 $*_1, *_2$ 所决定的截面满足条件 5.2.

证明 见 [63] 2.5 节. □

固定基概形 S, 取 $(\mathfrak{Sch}/S)_{(\text{fppf})}$ 拓扑. 我们把概形 X 上的 $\mathbb{G}_m$ 挠子看作 X 上的可逆层 $\mathcal{L}$ 使得 $L = \mathbf{Isom}(\mathcal{O}_X, \mathcal{L})$.

设 A 为 Abel S 概形, 由 A 上的立方 $\mathbb{G}_m$ 挠子所决定的范畴记为 $\text{CUB}(A, \mathbb{G}_m)$. 由 A 上关于 A 的单位截面刚化的 $\mathbb{G}_m$ 挠子所决定的范畴记为 $\text{TORSRIG}(A, \mathbb{G}_m)$. 则忘记函子

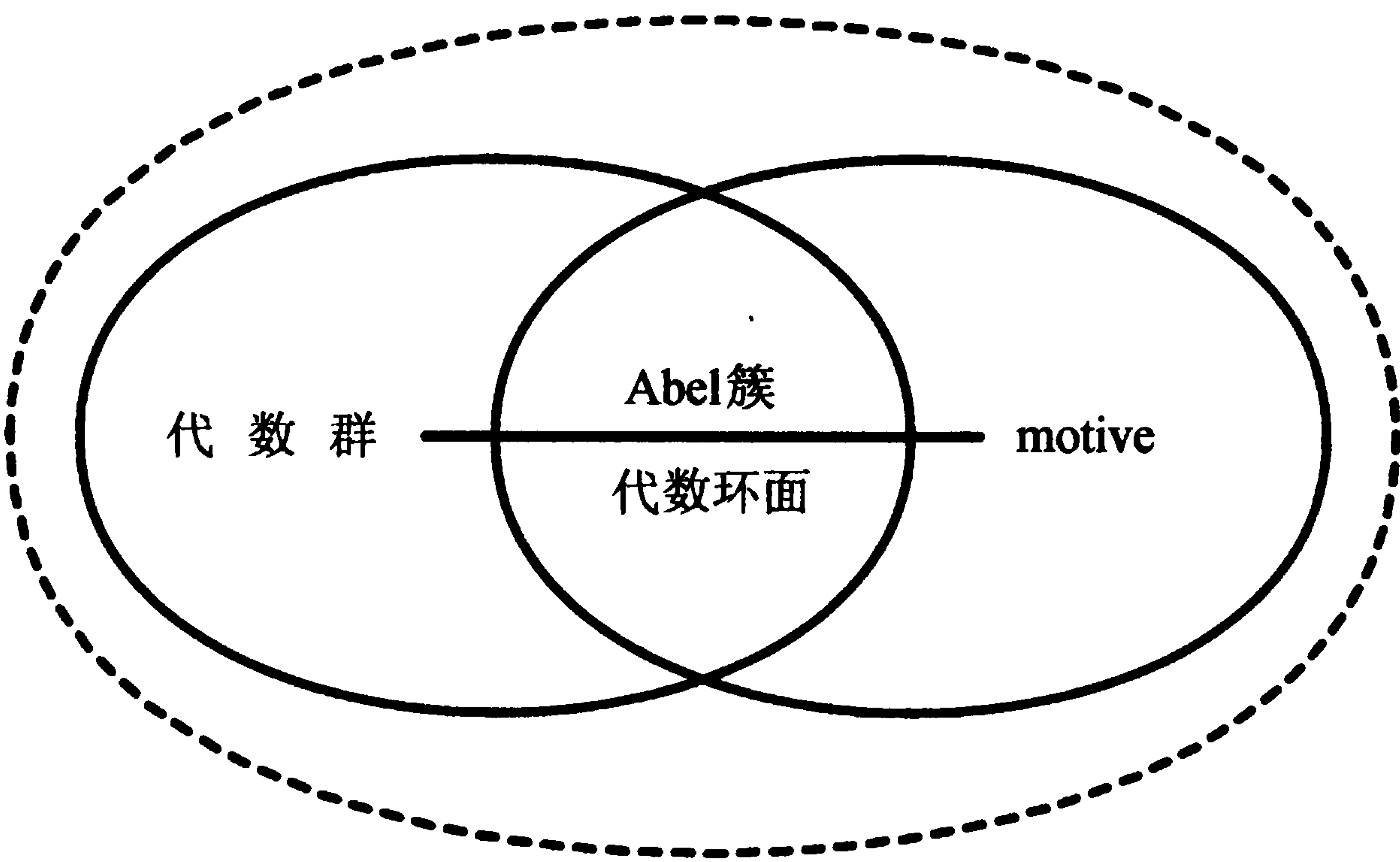
$$\text{CUB}(A, \mathbb{G}_m) \longrightarrow \text{TORSRIG}(A, \mathbb{G}_m)$$

是范畴等价. 证明用 Grothendieck 的结果 ([151]$_1$ VIII, 7.5), 详情见 [256] Chap. I 2.6 节.

第三篇　环面的算术

本篇的目的是讨论代数数域 K 上的环面的算术. 最简单的环面就是 $K^\times$, 而类域论便是 $K^\times$ 的重要的算术理论. 在本篇中我们将把 $K^\times$ 的一些算术性质推广到环面上去. 在第一篇中我们已经看到环面对于线性代数群的结构——因而对于它的算术具有重要的影响; 另一方面, 与作为射影交换群的 Abel 簇相对照, 环面是仿射交换群. 基于这两个原因, 我们有必要了解环面的算术. 这方面的早期成果是由 Tate, Ono 和 Langlands 作出的.

Bloch-Kato[45] 提出了著名的 motive 的玉河数猜想, 并画了以下的图:



他们把外围虚线的圈称做 grand unification. 我们在他们的圈里加了一条线 “——” 以代表自守形式理论中的 Fontaine-Mazur[123] 猜想. 也许从这个图读者可以了解这部书中的结构吧.

第一章　群的上同调

本篇的主题是环面的上同调群. 作为预备我们先给出有关同调代数的背景知识. 读者可以参看 [23] 和 [12].

1.1　基本性质

1.1.1　诱导模和上诱导模

设 G 是群. 以下我们所说的 G 模都是指左模. 如果 A 是一个 G 模, 我们在 A 上可以定义一个右模结构, 为此只要规定 $a\cdot\sigma=\sigma^{-1}a\ (a\in A,\ \sigma\in G)$. 令

$$A^G=\{a\in A|\sigma a=a,\ \forall\,\sigma\in G\}.$$

则有 $\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z},A)$, 这里将 $\mathbb{Z}$ 视为平凡 G 模, 即对于 $g\in G$, $n\in\mathbb{Z}$, 规定 $g\cdot n=n$. 以 $\mathbb{Z}[G]$ 记 G 的群环. 对于任意给定的 Abel 群 X, $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[G],X)$ 构成一个 G 模: G 在其上的作用为 $(\sigma f)(r)=f(r\sigma)$ $(\sigma\in G,\ f\in\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[G],X),\ r\in\mathbb{Z}[G])$. 此模称为**上诱导模** (co-induced module).

以 I_G 记 $\mathbb{Z}[G]$ 的由所有 $\sigma-1$ $(\sigma\in G)$ 生成的理想. 令 $A_G=A/I_GA$. 则 $\mathbb{Z}\otimes_G A\cong A_G$. 对于任意给定的 Abel 群 X, 张量积 $\mathbb{Z}[G]\otimes X$ 构成一个 G 模: G 在其上的作用为 $\sigma(r\otimes x)=\sigma r\otimes x$ $(\sigma\in G,\ r\in\mathbb{Z}[G],\ x\in X)$. 此模称为**诱导模** (induced module).

对于有限群 G, 以 N_G 记 $\mathbb{Z}[G]$ 中的元素 $\sum_{\sigma\in G}\sigma$. 用 N_G 作乘法定义了 A 上的自同态 $\mathrm{N}_G:\ A\to A$. 显然 $I_GA\subseteq\mathrm{Ker}\,\mathrm{N}_G$, $\mathrm{Im}\,N_G\subseteq A^G$. 如果 H 是 G 的指数有限的子群, $G/H=\{\sigma_1H,\cdots,\sigma_mH\}$, 则 $\mathrm{N}_{G/H}(a)=\sum_{i=1}^m\sigma_ia$ 定义了一个同态 $\mathrm{N}_{G/H}:\ A^H\to A^G$. 此同态不依赖于陪集代表 $\{\sigma_i\}$ 的选取. 显然 $\mathrm{N}_G=\mathrm{N}_{G/H}\circ\mathrm{N}_H$, 于是 $\mathrm{N}_GA\subset\mathrm{N}_HA$.

1.1.2　同调群和上同调群

设 R 是环. 由 R 模所组成的范畴记为 ${}_R\mathrm{Mod}$. 若 A,B 是 R 模, 则从 A 到 B 的 R 模同态所组成的群记为 $\mathrm{Hom}_R(A,B)$. 取定一个 R 模 A. 考虑函子

$$\begin{aligned}D:\ {}_R\mathrm{Mod}&\longrightarrow{}_R\mathrm{Mod}\\ C&\longmapsto\mathrm{Hom}_R(A,C),\end{aligned}$$

则 D 是左正合共变函子, 故可以取 D 的右导出函子 R^nD. 我们以 $\mathrm{Ext}^n_R(A,C)$ 记 $R^nD(C)$. 另一方面, 考虑张量积. 同样取定 R 模 A. 定义函子

$$\begin{aligned} T:\ {}_R\mathrm{Mod} &\longrightarrow \mathfrak{Ab} \\ B &\longmapsto A\otimes_R B, \end{aligned}$$

则 T 是右正合共变函子, 故可以取 T 的左导出函子 L^nD. 我们以 $\mathrm{Tor}^R_n(A,B)$ 记 $L^nT(B)$.

设 A 为 G 模. 将 $\mathbb{Z}$ 看作平凡 G 模, 即对于 $g\in G$, $n\in\mathbb{Z}$, 定义 g 在 n 上的作用为 $g\cdot n=n$. 则 G 的取值在 A 中的**同调群** (homology group) 以及**上同调群** (cohomology group) 分别定义为

$$\begin{aligned} H_n(G,A) &= \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}[G]}_n(\mathbb{Z},A), \\ H^n(G,A) &= \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},A), \quad n\geqslant 0 \end{aligned}$$

(参见 [69] Chap. XII). 特别地, $H_0(G,A)=A_G$, $H^0(G,A)=A^G$. 有限群 G 的 **Tate 上同调群** (Tate cohomology group) $\hat{H}^n(G,A)$ $(n\in\mathbb{Z})$ 定义为

$$\begin{aligned} \hat{H}^n(G,A) &= H^n(G,A), \quad n\geqslant 1, \\ \hat{H}^0(G,A) &= A^G/\operatorname{Im}\mathrm{N}_G, \\ \hat{H}^{-1}(G,A) &= \operatorname{Ker}\mathrm{N}_G/I_GA, \\ \hat{H}^{-n}(G,A) &= H_{n-1}(G,A), \quad n\geqslant 2. \end{aligned}$$

以后凡是见到 $\hat{H}^n(G,A)$, 除特别声明外, 我们总是假定 G 是有限群.

函子 $H_n(G,-)$, $H^n(G,-)$ 和 $\hat{H}^n(G,-)$ 的第一个重要性质是：从任一 G 模的正合列

$$0\longrightarrow A\longrightarrow B\longrightarrow C\longrightarrow 0$$

出发, 我们可以构造长正合列

$$\cdots\longrightarrow H_n(G,A)\longrightarrow H_n(G,B)\longrightarrow H_n(G,C)\xrightarrow{\partial} H_{n-1}(G,A)\longrightarrow\cdots$$

$$\cdots\longrightarrow H^n(G,A)\longrightarrow H^n(G,B)\longrightarrow H^n(G,C)\xrightarrow{\delta} H^{n+1}(G,A)\longrightarrow\cdots$$

$$\cdots\longrightarrow \hat{H}^n(G,A)\longrightarrow \hat{H}^n(G,B)\longrightarrow \hat{H}^n(G,C)\xrightarrow{\hat{\delta}} \hat{H}^{n+1}(G,A)\longrightarrow\cdots.$$

上同调函子与直积可交换, 即

$$H^n\left(G,\prod_\alpha A_\alpha\right)\cong\prod_\alpha H^n(G,A_\alpha)$$

(参见 [69] Chap. V §9 Th 9.4: $H^n(G,-)$ 是 RH 型的).

同调函子与直和以及直极限可交换, 即

$$H_n(G,\sum_\alpha A_\alpha)\cong\sum_\alpha H_n(G,A_\alpha),$$

$$H_n(G,\varinjlim A_\alpha)\cong\varinjlim H_n(G,A_\alpha)$$

(参见 [69] Chap. V §9 Th 9.4, 9.4*: $H_n(G,-)$ 是 LΣ 和 LΣ* 型的). 由于 $\hat{H}^n(G,-)$ 可被视为上同调, 所以它与直积可交换, 而它又可被视为同调, 故也与直和以及直极限可交换.

1.1.3 同调群和上同调群的计算

群 H_n, H^n, $\hat{H}^n$ 可以用下述的标准复形来计算:

$$P_\bullet:\qquad \cdots\longrightarrow P_2\xrightarrow{\mathrm{d}}P_1\xrightarrow{\mathrm{d}}P_0\xrightarrow{\varepsilon}\mathbb{Z}\longrightarrow 0,$$

其中 $P_i=\mathbb{Z}[G^{i+1}]$, 即 P_i 是以 $\underbrace{G\times\cdots\times G}_{i+1\text{个}}$ 为基的自由 $\mathbb{Z}$ 模, G 在每个基元素上的作用为

$$\sigma(\sigma_0,\sigma_1,\cdots,\sigma_i)=(\sigma\sigma_0,\sigma\sigma_1,\cdots,\sigma\sigma_i),$$

同态 $\mathrm{d}: P_i\to P_{i-1}$ 由熟知的下述公式给出:

$$\mathrm{d}(\sigma_0,\cdots,\sigma_i)=\sum_{j=0}^{i}(-1)^j(\sigma_0,\cdots,\sigma_{j-1},\sigma_{j+1},\cdots,\sigma_i),$$

映射 $\varepsilon: P_0\to\mathbb{Z}$ 将每个生成元 (σ_0) 映为 $1\in\mathbb{Z}$. 于是有

$$H_n(G,A)=H_n(P_\bullet\otimes_G A),$$

$$H^n(G,A)=H^n(\mathrm{Hom}_G(P_\bullet,A)).$$

令 $P_n=\mathrm{Hom}(P_{n-1},\mathbb{Z})$, 再进行连接, 得到复形

$$\hat{P}_\bullet:\quad \cdots\quad P_2\xrightarrow{\mathrm{d}}P_0\longrightarrow P_{-1}\xrightarrow{t_d}P_{-2}\quad\cdots$$

(其中 $P_0\xrightarrow{\varepsilon}\mathbb{Z}\xrightarrow{t_\varepsilon}P_{-1}$)

则有

$$\hat{H}^n(G,A)=H^n(\mathrm{Hom}_G(\hat{P}_\bullet,A))$$

(根据以下的引理：如果 A 是 G 模, C 是有限生成自由 G 模, 则有同构 f : $A \otimes_G C \to \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Hom}(C, \mathbb{Z}), A)$, 其定义为 $f(a \otimes c)(\varphi) = \sum_{\sigma \in G} \varphi(\sigma c)\sigma a$, 其中 $a \in A$, $c \in C$, $\varphi \in \mathrm{Hom}(C, \mathbb{Z})$).

我们也可以用非齐次复形来计算 H_n, H^n 以及 $\hat{H}_n$.

对于 $i > 0$, 令 N_i 为以 $\{[\sigma_1, \cdots, \sigma_i] \mid \sigma_1, \cdots, \sigma_i \in G\}$ 为基的自由 G 模, 即 N_i 的任一元素是有限和 $\sum r[\sigma_1, \cdots, \sigma_i]$ $(r \in \mathbb{Z}[G])$. 令 N_0 为由 $[\,]$ 生成的自由 G 模. 规定 $\partial([\,]) = 0$ 以及

$$\begin{aligned}&\partial[\sigma_1, \cdots, \sigma_i]\\ =&\sigma_1[\sigma_2, \cdots, \sigma_i] + \sum_{j=1}^{i-1}(-1)^j[\sigma_1, \cdots, \sigma_j\sigma_{j+1}, \cdots, \sigma_i] + (-1)^i[\sigma_1, \cdots, \sigma_{i-1}].\end{aligned}$$

则下述对应：

$$\sigma \longmapsto \sigma[\,],$$
$$[\sigma_0, \cdots, \sigma_i] \longmapsto \sigma_0[\sigma_0^{-1}\sigma_1, \sigma_1^{-1}\sigma_2, \cdots, \sigma_{i-1}^{-1}\sigma_i]$$

定义了使得下面的图交换的同构 f : $P_i \to N_i$:

$$\begin{array}{ccc} P_i & \xrightarrow{d} & P_{i-1} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ N_i & \xrightarrow{\partial} & N_{i-1} \end{array}$$

1.1.4 维数移动

应用上一小节的复形 $P_\bullet$ 容易证明：对于 $n \geqslant 1$, 如果 A 是诱导 G 模, 则 $H_n(G, A) = 0$; 如果 A 是上诱导 G 模, 则 $H^n(G, A) = 0$. 事实上, 如果 A 是上诱导模, 比如说 $A = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[G], X)$, 其中 X 是 Abel 群, 则对于任一 G 模 B, 我们有同构

$$\mathrm{Hom}_G(B, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(B, X),$$

其定义为：如果 φ : $B \to A$ 是一个 G 同态, 则 φ 的像为由 $b \mapsto \varphi(b)(1)$ 所定义的映射 $B \to X$, 其中 1 是 G 的恒等元. 所以复形 $\mathrm{Hom}_G(P_\bullet, A)$ 等同于

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(P_0, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(P_1, X) \longrightarrow \cdots$$

此复形在第一个位置以后都是正合的 (因为 P_i 是 $\mathbb{Z}$ 自由的), 故 $H^n(G, A) = 0$ $(\forall\, n \geqslant 1)$. 诱导模的情形类似.

一个直接的推论是下述的所谓**维数移动** (dimension-shifting) 引理：设 A 为 G 模, 则我们有满同态 $\mu: \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} A \to A$：$\sigma \otimes a \mapsto \sigma a$ 和单同态 $\iota: A \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G], A)$：$a \mapsto \iota_a$, 其中 $\iota_a(\sigma) = \sigma a$. 进一步, 对于 $n \geqslant 2$, 我们有同构

$$H_n(G, A) \cong H_{n-1}(G, \mathrm{Ker}\, \mu),$$

$$H^n(G, A) \cong H^{n-1}(G, \mathrm{Coker}\, \iota)$$

(参见 [175], p.20). 通常, 如果我们能够先证明关于 $n = 1$ 的一个结果, 则可以用上述同构做归纳法从而得到关于一般的 n 的结果.

我们再陈述一个关于上同调消失的结果.

对于一个 G 模 A, 我们可以考虑以下的性质：(i) A 是自由的, (ii) A 是投射的, (ii′) A 是内射的, (iii) A 是弱投射的 (参见 [69] p.200), (iv) A 是**上同调平凡的** (cohomologically trivial), 即对于 G 的所有子群 H 和所有整数 n, 都有 $\hat{H}^n(H, A) = 0$. 下面的蕴涵关系是已经知道的：

$$\begin{array}{ccccccc} \text{(i)} & \Longrightarrow & \text{(ii)} & \Longrightarrow & \text{(iii)} & \Longrightarrow & \text{(iv)} \\ & & & & \Uparrow & & \\ & & & & \text{(ii}') & & \end{array}$$

进而言之, 设 G 模 A, B 之一是上同调平凡的, (i) 如果 A 或 B 是 $\mathbb{Z}[G]$ 无扭的, **则** $A \otimes B$ 是上同调平凡的, 如果 A 是 $\mathbb{Z}[G]$ 自由的, 或 A 有限生成并且是 $\mathbb{Z}[G]$ 无扭的, 则 $\mathrm{Hom}(A, B)$ 是上同调平凡的 (参见 Rim [1]).

1.1.5 Shapiro 引理与限制 - 膨胀序列

设 $f: G' \to G$ 是群同态, 则它诱导出标准复形的同态 $P'_\bullet \to P_\bullet$. 因此对于任一 G 模 A, 有同态

$$f^*: H^n(G, A) \longrightarrow H^n(G', A),$$

$$f_*: H_n(G', A) \longrightarrow H_n(G, A),$$

在这里我们通过 f 把 A 视为 G' 模.

对于 G 的子群 H, 取 $f: H \to G$ 为含入映射. 此时的 f^* 称为**限制同态** (restriction homomorphism), 记为

$$\mathrm{Res}: H^n(G, A) \longrightarrow H^n(H, A), \tag{1.1}$$

同时称 f_* 为**上限制同态** (corestriction homomorphism), 记为

$$\mathrm{Cor}: H_n(H, A) \longrightarrow H_n(G, A). \tag{1.2}$$

设 $[G:H]<\infty$, $\{\xi_j\}$ 是 G 关于 H 的陪集 $H\backslash G$ 的完全代表系. 1.1.3 中的标准 G 复形 $P_\bullet$ 也是自由 H 复形. 映射

$$\begin{aligned} P_i \otimes_G A &\longrightarrow P_i \otimes_H A \\ x \otimes a &\longmapsto \sum_i \xi_j x \otimes \xi_j a \end{aligned}$$

诱导出 (同调函子) 态射

$$\mathrm{Res}:\ H_n(G,A) \longrightarrow H_n(H,A),$$

使得 Res : $H_0(G,A) \to H_0(H,A)$ 由映射

$$a \longmapsto \sum_j \xi_j a$$

给出 (显然此映射与 ξ_j 的选取无关). 此同态与 (1.1) 式一起定义了上同调函子的同态

$$\mathrm{Res}:\ \hat{H}^n(G,A) \longrightarrow \hat{H}^n(H,A) \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

类似地, 如果 G/H 是有限集, 则映射 $\mathrm{N}_{G/H}:\ A^H \to A^G$ 可以扩充为上同调函子

$$\mathrm{Cor}:\ H^n(H,A) \longrightarrow H^n(G,A).$$

结合 (1.2) 式, 我们得到同态

$$\mathrm{Cor}:\ \hat{H}^n(H,A) \longrightarrow \hat{H}^n(G,A) \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

将 Res 和 Cor 联合起来, 我们 $\mathrm{Cor}\circ\mathrm{Res} = [G:H]$. 又如果令 B 为 H 模, A 为与 $\mathrm{Ind}_H^G B$ 同构的 G 模, 则有 **Shapiro 引理**, 即：存在一对 H 同态

$$A \underset{i}{\overset{j}{\rightleftarrows}} B$$

使得 $j\circ i$ 是 H 上的恒同映射, 并且 $A=\sum_{\sigma\in G/H}\sigma iB$. 于是下面的两个映射

$$\hat{H}^n(G,A) \underset{\mathrm{Cor}\circ i}{\overset{j\circ\mathrm{Res}}{\rightleftarrows}} \hat{H}^n(H,B)$$

是自然的互逆的同构 (见 [167], Lem. 1.1).

对于给定的 $\tau\in G$, G 的内自同构 $\sigma\mapsto\tau\sigma\tau^{-1}$ 使得 A 成为一个新的 G 模, 记为 A^τ, 并且有同态

$$\hat{H}^n(G,A) \longrightarrow \hat{H}^n(G,A^\tau).$$

另一方面, $A^\tau \to A$: $a \mapsto \tau^{-1}a$ 诱导出同态

$$\hat{H}^n(G, A^\tau) \longrightarrow \hat{H}^n(G, A).$$

用维数移动一类的讨论可以证明：上面的两个同态的复合是 $\hat{H}^n(G, A)$ 上的恒同映射.

设 H 是 G 的正规子群, $f: G \to G/H$ 是典范同态. 对于任一 G 模 A, 我们有 G/H 模 A^H, 因此有同态 $H^n(G/H, A^H) \to H^n(G, A^H)$. 将此同态与由 $A^H \to A$ 诱导的同态复合, 我们得到所谓的**膨胀同态** (inflation homomorphism):

$$\mathrm{Inf}: H^n(G/H, A^H) \longrightarrow H^n(G, A).$$

现在我们证明关于限制 – 膨胀序列的命题.

命题 1.1.1 设 H 是 G 的正规子群, A 是 G 模. 则

(1) 下面的序列正合:

$$0 \longrightarrow H^1(G/H, A^H) \xrightarrow{\mathrm{Inf}} H^1(G, A) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^1(H, A).$$

(2) 对于 $n \geqslant 1$, 如果 $H^i(H, A) = 0\ (\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n-1)$, 则下面的序列正合:

$$0 \longrightarrow H^n(G/H, A^H) \xrightarrow{\mathrm{Inf}} H^n(G, A) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^n(H, A).$$

(3) 在 (ii) 中所述的条件下, 有

$$H^i(G/H, A^H) \cong H^i(H, A), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1.$$

证明 直接计算上闭链可以证明 (1). 详述如下:

第 1 步. 在 $H^1(G/H, A^H)$ 处正合. 设 $f: G/H \to A^H$ 是一个 1 上闭链. 则 f 诱导出 $\overline{f}: G \to G/H \to A$. 它是一个 1 上闭链, 其所在的类是 f 的类的膨胀. 如果 $\overline{f}$ 是一个上边缘, 则存在 $a \in A$ 使得 $\overline{f}(\sigma) = \sigma a - a\ (\forall\, \sigma \in G)$. 但是 $\overline{f}$ 在 H 的陪集上取常值, 所以 $\sigma a - a = \sigma\tau a - a\ (\forall\, \tau \in H)$. 于是 $\tau a = a\ (\forall\, \tau \in H)$, 即 $a \in A^H$. 故 f 是上边缘.

第 2 步. $\mathrm{Res} \circ \mathrm{Inf} = 0$. 设 $\varphi: G \to A$ 是一个 1 上闭链, 则 $\varphi|_H: H \to A$ 的类是 φ 的类的限制. 如果 $\varphi = \overline{f}$, 则 $\overline{f}|_H$ 显然是常值映射, 且取值为 $f(1) = 0$.

第 3 步. 在 $H^1(G, A)$ 处正合. 设 $\varphi: G \to A$ 是一个 1 上闭链, 它在 H 上的限制是一个上边缘. 则存在 $a \in A$ 使得 $\varphi(\tau) = \tau a - a\ (\forall\, \tau \in H)$. 从 φ 中减去上边缘 $\sigma \mapsto \sigma a - a$, 则简化到 $\varphi|_H = 0$ 的情形. 由

$$\varphi(\sigma\tau) = \varphi(\sigma) + \sigma \cdot \varphi(\tau)$$

知 (取 $\tau \in H$) φ 在 H 的陪集上取常值, 故 (取 $\sigma \in H$, $\tau \in G$) φ 的像含于 A^H. 所以 φ 是一个上闭链 $G/H \to A^H$ 的膨胀. 这样就完成了 (1) 的证明.

用维数移动可以证明 (2). 我们把 (2) 归结为 $n=1$ 的情形, 这就是结论 (1).

令 $A^* = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[G], A)$. 则有自然的单射 $\iota: A \to A^*$, 它将 $a \in A$ 映为 ι_a, 其中 ι_a 的定义为 $\iota_a(\sigma) = \sigma a$. 于是我们有 G 模的正合序列

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow A^* \longrightarrow A' \longrightarrow 0,$$

其中 $A' = A^*/A$. G 模 A^* 作为 H 模是上诱导的 (因为 $\mathbb{Z}[G]$ 是自由 $\mathbb{Z}[H]$ 模), 所以

$$H^i(H, A') = H^{i+1}(H, A) = 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant n-2).$$

此外, 因为 $H^1(H, A) = 0$, 所以序列

$$0 \longrightarrow A^H \longrightarrow (A^*)^H \longrightarrow (A')^H \longrightarrow 0$$

正合, 同时 $(A^*)^H$ 是上诱导模 (因为 $(A^*)^H \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[G/H], A)$). 所以在交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & H^{n-1}(G/H, (A')^H) & \longrightarrow & H^{n-1}(G, A') & \longrightarrow & H^{n-1}(H, A') \\
& \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta \\
0 \longrightarrow & H^n(G/H, A^H) & \longrightarrow & H^n(G, A) & \longrightarrow & H^n(H, A)
\end{array}$$

中三个竖直的箭头都是同构. 对于 A' 应用归纳假设, 知此图的上面一行正合. 于是下面一行也正合. 这就证明了 (2).

(3) 是 (2) 的直接推论. □

1.2　低维同调群和上同调群

在本节我们将计算一些低维的同调群和上同调群, 得到一些精确的公式, 并建立限制映射与转移的联系, 以及 H^2 与群扩张的联系.

1.2.1　一维同调群的计算

$P_i \otimes_G A$ 的一个元素 x 可以被视为取值在 A 中的一个函数 $x(\sigma_1, \cdots, \sigma_{i+1})$, 它只在 G^{i+1} 的有限多个元素处取值不为零. 于是有

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x(\sigma_1, \cdots, \sigma_i) = &\sum_{\sigma \in G} \sigma^{-1} x(\sigma, \sigma_1, \cdots, \sigma_i) \\
&+ \sum_{j=1}^{i} (-1)^j \sum_{\sigma \in G} x(\sigma_1, \cdots, \sigma_j \sigma, \sigma^{-1}, \sigma_{j+1}, \cdots, \sigma_i) \\
&+ (-1)^{j+1} \sum_{\sigma \in G} x(\sigma_1, \cdots, \sigma_i, \sigma).
\end{aligned}$$

特别地, G 的取值在 A 中的 1 闭链是一个函数 $x:\ G\to A$, 满足: 对于几乎所有的 $\sigma\in G$ 都有 $x(\sigma)=0$ 以及

$$\mathrm{d}x=\sum_{\sigma\in G}(\sigma^{-1}-1)x(\sigma)=0.$$

另一方面, 一个在恒等元之外取值皆为零的 1 闭链是边缘. 事实上, 如果 $x(1)=x$ 且 $x(\sigma)=0\ (\forall\,\sigma\neq 1)$, 令 $y(1,1)=x$, $y(\tau,\sigma)=0\ (\forall\,(\tau,\sigma)\neq(1,1))$, 则

$$\mathrm{d}y(\sigma)=\sum_{\tau\in G}\tau^{-1}y(\tau,\sigma)-\sum_{\tau\in G}y(\sigma\tau^{-1},\tau)+\sum_{\tau\in G}y(\sigma,\tau)=y(1,\sigma)=x(\sigma).$$

设 $0\to A\to B\to C\to 0$ 是 G 模正合序列, $x:\ G\to C$ 是 G 的取值在 C 中的 1 闭链. 对于每个 $\sigma\in G$, 将 $x(\sigma)$ 提升为 $\tilde{x}(\sigma)\in B$ (如果 $x(\sigma)=0$, 则取 $\tilde{x}(\sigma)=0$). 则 $\mathrm{d}\tilde{x}$ 在 C 中的像为零, 故 $\mathrm{d}\tilde{x}$ 为 A 的元素. $\mathrm{d}\tilde{x}$ 在 $H_0(G,A)$ 中的类就是 x 的类在映射

$$\delta:\ H_1(G,C)\longrightarrow H_0(G,A)$$

下的像.

增广同态 $\varepsilon:\ \mathbb{Z}[G]\to\mathbb{Z}$: $\sum n_\sigma\mapsto\sum n_\sigma$ 的核记为 I_G. 则有正合序列

$$0\longrightarrow I_G\longrightarrow\mathbb{Z}[G]\xrightarrow{\varepsilon}\mathbb{Z}\longrightarrow 0.$$

对于任一 $\mathbb{Z}$ 自由的 G 模, 我们有正合序列

$$0\longrightarrow I_G\otimes A\longrightarrow\mathbb{Z}[G]\otimes A\longrightarrow A\longrightarrow 0. \tag{1.3}$$

由此我们得到同调正合序列

$$\begin{aligned}H_1(G,\mathbb{Z}[G]\otimes A)\longrightarrow H_1(G,A)&\xrightarrow{\delta}H_0(G,I_G\otimes A)\\ \longrightarrow H_0(G,\mathbb{Z}[G]\otimes A)&\xrightarrow{\varepsilon_*}H_0(G,A)\longrightarrow 0.\end{aligned}$$

但是 $H_0(G,\mathbb{Z}[G]\otimes A)=\mathbb{Z}\otimes_G(\mathbb{Z}[G]\otimes_{\mathbb{Z}}A)=\mathbb{Z}\otimes_G A=H_0(G,A)$, 特别地, $\operatorname{Ker}\varepsilon_*=0$, 所以 δ 是满射. 由于 $\mathbb{Z}[G]\otimes A$ 是诱导模, 故 $H_1(G,\mathbb{Z}[G]\otimes A)=0$. 这样我们得到同构

$$H_1(G,A)\underset{\sim}{\overset{\delta}{\longrightarrow}}H_0(G,I_G\otimes A)=I_G\otimes A.$$

现在我们进一步假设 A 是平凡 G 模, 则 $I_G\otimes A$ 的由 $(\sigma-1)\tau\otimes a-(\sigma-1)\otimes\tau a=(\sigma-1)\tau\otimes a-(\sigma-1)\otimes a$ 生成的子群实际上是由 $(\sigma-1)(\tau-1)\otimes a$ 生成的. 这

就是说 $I_G \otimes_G A \cong I_G/I_G^2 \otimes A$. 另一方面, 如果以 G' 记 G 的换位子群, 则映射 $\sigma \mapsto \sigma - 1$ 诱导出乘法群 G/G' 到加法群 I_G/I_G^2 的同构. 于是我们得到

$$H_1(G, A) \cong G/G' \otimes A. \tag{1.4}$$

在 G 是交换群的特殊情形则有 $G \otimes A \cong H_1(G, A)$. 在此同构下 $\sigma \otimes a$ 对应于在 σ 处取值为 a 而在其他处取值为零的 1 闭链所在的类.

1.2.2　子群与商群的一维同调群

在本小节我们对于 H_1 考虑群变化.

首先我们对于 H_1 考虑限制同态. 我们有交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
H_1(G,\mathbb{Z}) & \xrightarrow[\sim]{\delta} & H_0(G,I_G) & = & I_G/I_G^2 & \xleftarrow{\sim} & G/G' \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}} & & & & \vdots \\
H_1(H,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\delta} & H_0(H,I_G) & = & I_G/I_HI_G & & \vdots{\scriptstyle \mathrm{Ver}} \\
\uparrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & & & \uparrow & & \downarrow \\
H_1(H,\mathbb{Z}) & \xrightarrow[\sim]{\delta} & H_0(H,I_H) & = & I_H/I_H^2 & \xleftarrow{\sim} & H/H'
\end{array}$$

对于 $\sigma \in G$, σ 在 I_G/I_G^2 中的像是 $\sigma - 1$, 而 $\mathrm{Res}(\sigma - 1)$ 是类 $\sum \xi_i(\sigma - 1) \mod I_H I_G$. 对于每个 i, 存在一个指标 $j(i)$ 和一个元素 $c_i \in H$ 使得

$$\xi_i \sigma = c_i \xi_{j(i)},$$

所以

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(\sigma - 1) &\equiv \sum_i c_i \xi_{j(i)} - \sum_i \xi_i \mod I_H I_G \\
&\equiv \sum_i (c_i - 1)\xi_{j(i)} \mod I_H I_G \\
&\equiv \sum_i (c_i - 1) \mod I_H I_G.
\end{aligned}$$

另一方面, $\prod c_i$ 在同态 $H \to I_H/I_H^2 \to I_G/I_H I_G$ 下的像是 $\sum (c_i - 1)$ 在 $I_G/I_H I_G$ 中的类. 这样我们得知 σ 在 H/H' 中的像是 $\prod c_i$ 所在的类. 此映射经典地被称为**转移** (transfer) (Verlagerung). 这就是下面的命题:

命题 1.2.1　设 $\theta: H\backslash G \to G$ 是 $H\backslash G$ 的一个代表系. 对于任意的 $\sigma \in G$ 和 $\tau \in H\backslash G$, 令 $c_{\tau,\sigma}$ 为由下式决定的 H 中的元素:

$$\theta(\tau) \cdot \sigma = c_{\tau,\sigma}\theta(\tau \cdot \sigma).$$

则转移 $\mathrm{Ver}: G/G' \to H/H'$ 将 σ 映为 $\prod_{\tau \in H\backslash G} c_{\tau,\sigma}$ 在 H/H' 中所代表的陪集.

在本小节的余下部分我们固定一个正合序列

$$1 \longrightarrow C \xrightarrow{i} W \xrightarrow{j} G \longrightarrow 1, \tag{1.5}$$

其中 C 是交换群, i 是含入映射. 任一 G 模 A 通过 j 被视为 W 模, 因此也是 C 模. 当然 C 的作用是平凡的.

对于 C 上的取值在 A 中的 1 闭链 $x:\ a \mapsto x(a)$, 我们定义相应的 W 上的 1 闭链, 它在 C 之外取值为零, 在 C 上等于 x. 对于 W 上的取值在 A 中的 1 闭链 $x:\ w \mapsto x(w)$, 我们定义相应的 G 上的 1 闭链

$$\sigma \longmapsto \sum_{j(w)=\sigma} x(w).$$

命题 1.2.2　上面定义的映射使得下述同调群序列正合:

$$H_1(C,A) \longrightarrow H_1(W,A) \longrightarrow H_1(G,A) \longrightarrow 0. \tag{1.6}$$

证明　取定 C 在 W 中的右陪集完全代表系 $\{w_\sigma \mid \sigma \in G\}$. 对于 G 上的任一 1 闭链 $x:\ \sigma \mapsto x(\sigma)$, 定义群 W 上的 1 闭链 y 如下: y 在 w_σ 处取值为 $x(\sigma)$, 而在 W 的其他元素处取值为零. 则 y 的像是 x. 这说明序列 (1.6) 在 $H_1(G,A)$ 处正合.

在 $H_1(W,A)$ 两边的二映射的复合为零的原因是: 在群的恒等元之外都等于零的 1 闭链是边缘.

余下要证明的是 $H_1(W,A) \to H_1(G,A)$ 的核含于 $H_1(C,A) \to H_1(W,A)$ 的像. 我们有交换图

$$\begin{array}{ccccc} & & H_2(W,A) & \longrightarrow & H_2(G,A) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ H_1(C,A) & \longrightarrow & H_1(W,A) & \longrightarrow & H_1(G,A) \end{array}$$

设 $x:\ w \mapsto x(w)$ 是 W 上的一个 1 闭链, 它在 G 中的像 $\sigma \mapsto \sum_{j(w)=\sigma} x(w)$ 是 $y(\sigma,\tau)$ 的边缘. 令 $z(u,v)$ 是 W 上的 2 链, 其定义为

$$z(u,v) = \begin{cases} y(\sigma,\tau), & \text{如果 } u = w_\sigma,\ v = w_\tau, \\ 0, & \text{其他情形}. \end{cases}$$

则

$$\mathrm{d}z(u) = \sum_\sigma w_\sigma^{-1} z(w_\sigma, u) - \sum_\sigma z(uw_\sigma, w_\sigma^{-1}) + \sum_\sigma z(u, w_\sigma).$$

设 $x' = x - \mathrm{d}z$, 则

$$\sum_{\sigma(w)=\tau} x'(w) = \sum_{\sigma(w)=\tau} x(w) - \Big(\sum_{\sigma} \sigma^{-1} y(\sigma,\tau) - \sum_{\sigma} y(\tau\sigma^{-1},\sigma) + \sum_{\sigma} y(\tau,\sigma)\Big) = 0.$$

令

$$z'(u,v) = \begin{cases} x'(w_\sigma, a), & \sigma \in G,\ a \in C, \\ 0, & \text{其他情形}. \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} \mathrm{d}z'(u) &= \sum_{\sigma} w_\sigma^{-1} z'(w_\sigma, u) - \sum_{\sigma} z'(w_\sigma, w_\sigma^{-1}u) + \sum_{a} z'(u,a) \\ &= \sum_{\sigma} w_\sigma^{-1} z'(w_\sigma, u) - x'(u) \qquad (u \in W). \end{aligned}$$

于是 $x'+\mathrm{d}z'$ 的支集含于 C. 由于 x 所在的类 = $x'+\mathrm{d}z$ 所在的类 = x' 所在的类 = $x' + \mathrm{d}z'$ 所在的类, 我们得知 x 所在的类 在 $H_1(G,A)$ 的像中. 这就证明了序列 (1.6) 的正合性. □

与序列 (1.6) 有关的一个重要的结果是：映射 $H_1(C,A) \to H_1(W,A)$ 与 $\mathrm{Res}: H_1(W,A) \to H_1(C,A)$ 的合成通过映射 N_G 分解 (参见 1.1 节), 此即

命题 1.2.3　下面的图交换:

$$\begin{array}{ccc} H_1(C,A) & \longrightarrow & H_1(W,A) \\ \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{N}_G} & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}} \\ \mathrm{N}_G(H_1(C,A)) & \longrightarrow & H_1(C,A) \end{array} \tag{1.7}$$

证明　由正合序列出发 (参见 1.2.1 节 的 (1.3) 式), 我们得到交换图

$$\begin{array}{ccc} H_1(W,A) & \longrightarrow & H_0(W, I_W \otimes A) \\ \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}} \\ H_1(C,A) & \longrightarrow & H_0(C, I_W \otimes A) \end{array}$$

其中水平的箭头是同构 (参见 1.2.1 节). 如果 $x: w \mapsto x(w)$ 是 W 上的取值在 A 中的 1 闭链, 则它的同调类在 $H_0(W, I_W \otimes A)$ 中的像是类

$$\sum_{w} (w^{-1} - 1)(1 \otimes x(w)).$$

限制到 C 上我们得到

$$\sum_{\sigma} \sum_{w} \Big(w_\sigma w^{-1}(1 \otimes x(w)) - w_\sigma(1 \otimes x(w))\Big)$$

所在的类. 对于 $\tau \in G$, $w \in W$, 有唯一的 $c_{\tau,w} \in C$ 和唯一的 $\sigma \in G$, 使得 $w_\tau w = c_{\tau,w} w_\sigma$. 于是上述求和等于

$$\sum_\tau \sum_w (c_{\tau,w}^{-1} - 1)(1 \otimes x(w)),$$

它又等于

$$\sum_{c \in C} \Big((c^{-1} - 1) \sum_{c_{\tau,w} = c} w_\tau (1 \otimes w_\tau x(w)) \Big).$$

由于 $(w_\tau - 1) \otimes w_\tau x(w) \in I_W \otimes A$, 所以上式同调于

$$\sum_{c \in C} \Big((c^{-1} - 1) \sum_{c_{\tau,w} = c} 1 \otimes w_\tau x(w) \Big).$$

此式是 $H_1(C, A)$ 中 1 闭链

$$y : c \longmapsto \sum_{c_{\tau,w} = c} w_\tau x(w)$$

所在的同调类. 如果 x 的支集含于 C, 则

$$y(c) = \sum_{w_\tau b w_\tau^{-1} = c} w_\tau x(b) = \sum_\tau \tau x(\tau^{-1}(c)) = \sum_\tau {}^\tau x(c).$$

于是 (1.7) 交换. □

1.2.3　一维和二维上同调的计算

如果我们应用非齐次复形 $N_\bullet$ 来计算上同调群, 则有以下结果.

一个映射 $\varphi : G \to A$ 如果满足条件

$$\varphi(\sigma\tau) = \varphi(\sigma) + \sigma\varphi(\tau), \tag{1.8}$$

则称之为一个 **1 上闭链** (1-cocycle) 或**交叉同态** (crossed homomorphism). 对于任一 $a \in A$, 我们称映射

$$\varphi : G \longrightarrow A$$

$$\sigma \longmapsto -a + \sigma a$$

为一个 **1 上边缘** (1-coboudary) 或**主交叉同态** (principal crossed homomorphism). 一个 **2 上闭链** (2-cocycle) 或**因子集** (factor set) 是指一个映射 $\psi : G \times G \to A$ 使得

$$\sigma_1 \psi(\sigma_2, \sigma_3) - \psi(\sigma_1\sigma_2, \sigma_3) + \psi(\sigma_1, \sigma_2\sigma_3) - \psi(\sigma_1, \sigma_2) = 0, \tag{1.9}$$

并且 $\psi(\sigma,1)=0=\varphi(1,\sigma)$. 对于任一满足 $\varphi(1)=0$ 的映射 $\varphi:\ G\to A$, 定义映射 $G\times G\to A$ 为

$$\psi(\sigma_1,\sigma_2)=\sigma_1\varphi(\sigma_2)-\varphi(\sigma_1\sigma_2)+\varphi(\sigma_1),$$

这样的映射称为一个 2 **上边缘** (2-coboudary) 或**分裂因子集** (split factor set). 令 $Z^i(G,A)$ (相应地, $B^i(G,A)$) 为 i 上闭链 (相应地, i 上边缘) 生成的 Abel 群, 则有

$$H^1(G,A)=Z^1(G,A)/B^1(G,A),$$
$$H^2(G,A)=Z^2(G,A)/B^2(G,A).$$

1.2.4 群扩张与二维上同调

在本小节中我们考虑群扩张和上同调, 将用乘法记群和模的运算. 我们在第二篇第三章亦讨论了这个概念. 为了以后的计算设立一些符号, 这里重复一些定义.

设 G 是一个群 (不一定是有限的), C 是一个乘法群. 所谓从 C 得 G 的一个**群扩张** (group extension) 是指一个群同态的正合序列

$$1\longrightarrow C\xrightarrow{\ i\ }W\xrightarrow{\ j\ }G\longrightarrow 1. \tag{1.10}$$

此正合序列决定了一个同构 $W/iC\cong G$.

为了分析一个扩张 W 的结构, 我们对于任一 $\sigma\in G$ 取定一个代表元素 $w_\sigma\in W$ 使得 $jw_\sigma=\sigma$. 这样, W 的任一元素 w 就可以唯一地表示为

$$w=i(c)w_\sigma,\qquad \sigma\in G,\ \ c\in C.$$

实际上, $\sigma=jw$, $c=i^{-1}(ww_\sigma^{-1})$. 对于 $\sigma,\tau\in G$, 存在 $c_{\sigma,\tau}\in C$, 使得

$$w_\sigma w_\tau=c_{\sigma,\tau}w_{\sigma\tau}. \tag{1.11}$$

这些元素 $c_{\sigma,\tau}=w_\sigma w_\tau w_{\sigma\tau}^{-1}$ 称为扩张 (1.10) 的一个**因子集** (factor set).

以 $\operatorname{Aut}C$ 记 C 的自同构群. W 中的共轭作用导致群同态 $\psi:\ G\to\operatorname{Aut}C$. 在此同态下每个 $\psi(\sigma)$ 在任一 c 上的作用由下式给出:

$$i(\psi(\sigma)c)=w_\sigma(ic)w_\sigma^{-1}.$$

此作用不依赖于 w_σ 的选取. 我们称 (1.10) 是 C 被 G 的具有算子 ψ 的扩张. 此时 C 在 ψ 下成为 G 模.

对于给定的任一同态 $\psi: G \to \mathrm{Aut}\, C$, 至少存在一个 C 被 G 的具有算子 ψ 的扩张, 即具有以下乘法的半直积 $C \rtimes_\psi G$:

$$(c,\sigma)(b,\tau) = (c\psi(\sigma)b, \sigma\tau), \tag{1.12}$$

其中 (c,σ), (b,τ) 为 $C \rtimes_\psi G$ 的底集合 $C \times G$ 中的元素. 正合序列

$$1 \longrightarrow C \xrightarrow{i} C \rtimes_\psi G \xrightarrow{j} G \longrightarrow 1$$

由 $i(c) = (c,1)$ 和 $j(c,\sigma) = \sigma$ 给出. 并且 j 有右逆 s, 其定义为 $s(\sigma) = (1,\sigma)$.

给定另一个群扩张 (C' 交换)

$$1 \longrightarrow C' \xrightarrow{i'} W' \xrightarrow{j'} G' \longrightarrow 1. \tag{1.13}$$

由序列 (1.10) 到序列 (1.13) 的一个同态是指一组使得下面图交换的同态 α, β, γ:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & C & \longrightarrow & W & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\ 1 & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & W' & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & 1 \end{array} \tag{1.14}$$

设 ψ 和 ψ' 分别是与序列 (1.10) 和序列 (1.13) 相关的算子. 则 G 通过 γ 作用在 C' 上: 对于 $\sigma \in G$ 和 $c' \in C'$, σ 在 c' 上作用的结果等于 $\psi'(\gamma\sigma)(c')$. 容易验证

$$\alpha(\psi(\sigma)c) = \psi'(\gamma\sigma)(\alpha c). \tag{1.15}$$

进一步, 如果 $C = C'$, $\alpha = 1_G$, $G = G'$, $\gamma = 1_G$, 我们则称扩张 W 和 W' 为等价的. 此时 (非交换的) 短的五引理保证 β 是同构. C 的所有被 G 的具有算子 ψ 的扩张的等价类组成的集合记为 $\varepsilon(G,C,\psi)$.

序列 (1.10) 所示的扩张被称为分裂的, 如果存在一个同态 $s: G \to W$ 使得 $js = 1_G$. 半直积扩张 $C \rtimes_\psi G$ 是分裂的. 反之如果序列 (1.10) 在 $s: G \to W$ 下是分裂的, 则它在下述同构 β 下等价于半直积 $C \rtimes_\psi G$:

$$\begin{aligned} \beta:\ W &\longrightarrow C \rtimes_\psi G \\ w &\longmapsto (i^{-1}(w(sjw)^{-1}), jw). \end{aligned}$$

详言之, 即有

$$\begin{aligned} wv(sj(wv))^{-1} &= w(sjw)^{-1}(sjw)v(sjv)^{-1}(sjw)^{-1} \\ &= w(sjw)^{-1}i(\psi(jw)i^{-1}(v(sjv)^{-1})). \end{aligned}$$

命题 1.2.4 对于给定的同态 $\psi: G \to \operatorname{Aut} C$, 有

(1) 扩张 (1.10) 的因子集 $\{c_{\sigma,\tau}\}$ 是一个 2 上闭链.

(2) 将 C 的每个被 G 的具有算子 ψ 的扩张对应到它的因子集的映射

$$\varepsilon(G,C,\psi) \longrightarrow H^2_\psi(G,C)$$

是双射 (这里 H^2_ψ 表示 C 在 ψ 下作为 G 模的二维上同调群).

(3) 在 (2) 中所述的双射下, 分裂的扩张对应于 H^2_ψ 的零元素.

命题 1.2.5 给定扩张 (1.10) 和 (1.13) 以及同态 $\alpha: C \to C'$, $\gamma: G \to G'$. 设 $\{c_{\sigma,\tau}\}$ (相应地, $\{b_{\sigma,\tau}\}$) 是 (1.10) (相应地, (1.13)) 的关于选定的陪集代表 w_σ (相应地, v_σ) 的因子集. 则存在一个同态 $\beta: W \to W'$ 使得图 (1.14) 交换的充分必要条件是

(1) α 是 G 同态, 这里 G 通过 γ 作用在 C' 上,

(2) $\alpha c_{\sigma,\tau}$ 和 $b_{\gamma\sigma,\gamma\tau}$ 作为 G 的取值在 C' 中的上闭链是同调的.

进一步, 如果两个 β 相差由某个元素 $c' \in C'$ 引起的 W' 的内自同构, 我们就称这两个 β 是等价的. $H^1(G,C')$ 传递地作用在这些等价类上, 并且没有不动点. 特别地, 如果 $H^1(G,C')=0$, 则所有的 β 都彼此等价.

下面我们证明以上的两个命题. 在证明之前我们对于符号做一些约定.

把序列 (1.10) 中的 C 与 iC 等同, 我们无妨设 C 为 W 的正规子群. 于是有同构 $W/C \cong G$. 我们还将在下文中不再写出 C 作为 G 模时的算子 ψ, 即 G 把在 C 上的作用写为

$$\sigma(c) = {}^\sigma c = w_\sigma c w_\sigma^{-1}. \tag{1.16}$$

我们将用 i, j 代替 (1.13) 中的 i', j'.

命题 1.2.4 的证明 由 W 中的乘法的结合律可以得到因子集 $c_{\sigma,\tau}$ 满足的条件. 事实上, 一方面我们有

$$w_\rho(w_\sigma w_\tau) = w_\rho c_{\sigma,\tau} w_{\sigma\tau} = {}^\rho c_{\sigma,\tau} w_\rho w_{\sigma\tau} = {}^\rho c_{\sigma,\tau} c_{\rho,\,\sigma\tau} w_{\rho\sigma\tau},$$

另一方面

$$(w_\rho w_\sigma) w_\tau = c_{\rho,\,\sigma} w_{\rho\sigma} w_\tau = c_{\rho,\,\sigma} c_{\rho\sigma,\tau} w_{\rho\sigma\tau}.$$

比较以上二式, 得到

$${}^\rho c_{\sigma,\tau} c_{\rho\sigma,\tau}^{-1} c_{\rho,\,\sigma\tau} c_{\rho,\,\sigma}^{-1} = 1.$$

这说明 $c_{\sigma,\tau}$ 是 G 上的取值在 (乘法) G 模 C 中的 2 上闭链. 这就证明了命题 1.2.4 的 (1).

由命题 1.2.5 中的 (2) 我们将看到：由陪集代表 w_σ 的不同选取所得到的上闭链都同调于 $c_{\sigma,\tau}$. 进而 C 的被 G 的具有相同算子 ψ 的两个等价的扩张对应于 $H^2_\psi(G,C)$ 中的同一个上同调类.

W 中的乘法可以用 C 和 G 中的乘法, G 在 C 上的作用和因子集 $c_{\sigma,\tau}$ 表出. 事实上, 如果 $w = cw_\sigma$ 和 $v = bw_\tau$ 是 W 的两个元素, 则有

$$wv = cw_\sigma bw_\tau = cw_\sigma bw_\sigma^{-1} w_\sigma w_\tau = c\,{}^\sigma b w_\sigma w_\tau,$$

或

$$wv = (c\,{}^\sigma b\, c_{\sigma,\tau})(w_{\sigma\tau}). \tag{1.17}$$

这启示我们如何反过来构造由上同调群到群扩张的对应, 即从给定的算子 $G \to \operatorname{Aut} C$ 和相应于该算子的 G 上的取值在 C 中的 2 上闭链出发, 如何构造一个群扩张, 使得上述的 2 上闭链是由此群扩张得到的. 我们定义 W 的元素为形如 $c \star w_\sigma$ $(c \in C,\ \sigma \in G)$ 的符号, W 的乘法为 (被 $c_{\sigma,\tau}$ 扭动的半直积):

$$(c \star w_\sigma)(b \star w_\tau) = (c\,{}^\sigma b\, c_{\sigma,\tau}) \star (w_{\sigma\tau}). \tag{1.18}$$

此乘法的结合律是 2 上边缘关系 $(\partial c)_{\rho,\ \sigma,\tau} = 1$ 和指数形状的表达式 ${}^\sigma c$ 的通常性质的直接推论. 对于固定的 $\alpha,\ \beta \in W$, 容易看出方程

$$\alpha\xi = \beta, \qquad \eta\alpha = \beta$$

在 W 中有解. 于是 W 构成一个群. W 中的单位元和逆元的确切表达式为

$$\begin{aligned} 1 &= c_{1,1}^{-1} \star w_1, \\ (c \star w_\sigma)^{-1} &= {}^{\sigma^{-1}} c_{\sigma^{-1},\ \sigma}^{-1} c_{1,1}^{-1} \star w_{\sigma^{-1}}. \end{aligned} \tag{1.19}$$

定义映射

$$\begin{aligned} j:\ W &\longrightarrow G \\ c \star \sigma &\longmapsto \sigma. \end{aligned}$$

则 j 是满同态. j 的核由所有形如 $c \star w_1$ 的元素组成. 此子群在对应 $c \leftrightarrow (cc_{1,1}^{-1} \star w_1)$ 下同构于 C. 因此我们可以将此子群与 C 等同起来, 即令 $c = cc_{1,1}^{-1} \star w_1$, 同时令 $w_\sigma = 1 \star w_\sigma$. 这样, 我们有

$$\begin{aligned} cw_\sigma &= (cc_{1,1}^{-1} \star w_1)(1 \star w_\sigma) = cc_{1,1}^{-1} c_{1,\sigma} \star w_\sigma = c \star w_\sigma, \\ w_\sigma c &= (1 \star w_\sigma)(cc_{1,1}^{-1} \star w_1) = {}^\sigma c\, {}^\sigma c_{1,1}^{-1} c_{\sigma,1} \star w_\sigma = {}^\sigma c \star w_\sigma = {}^\sigma c w_\sigma, \\ w_\sigma w_\tau &= (1 \star w_\sigma)(1 \star w_\tau) = c_{\sigma,\tau} \star w_{\sigma\tau} = c_{\sigma,\tau} w_{\sigma\tau}. \end{aligned}$$

这说明：作为构造 W 的出发点的 G 在 C 上的作用和 2 上闭链 $c_{\sigma,\tau}$ 恰是从我们刚刚得到的群扩张 W 导出的. 这就证明了命题 1.2.4 的 (2).

最后, 显然半直积 $C \rtimes G$ 以平凡函数 $c_{\sigma,\tau}=1$ 作为它的一个因子集, 由此得到命题 1.2.4 的 (3). 这就完成了命题 1.2.4 的证明. □

命题 1.2.5 的证明　沿用上面的记号. 因为把 i 视为含入映射, 所以 α 是 β 在 C 上的限制. 设已经给定 β, 则对于任一 $w=cw_\sigma\in W$, 有

$$\beta w=\beta(cw_\sigma)=(\beta c)(\beta w_\sigma)=(\alpha c)(\beta w_\sigma).$$

所以, 为了完全刻画 β, 只要给出元素 βw_σ. 由于

$$j(\beta w_\sigma)=\gamma j w_\sigma=\gamma\sigma=j(v_{\gamma\sigma}),$$

故存在 $c'_\sigma\in C'$ 使得

$$\beta w_\sigma=c'_\sigma v_{\gamma\sigma}.$$

于是 β 被由 G 到 C' 的函数 $\sigma\mapsto c'_\sigma$ 所刻画.

由于 β 是同态, 故必有

$$\beta(w_\sigma c w_\sigma^{-1})=(\beta w_\sigma)(\alpha c)(\beta w_\sigma)^{-1},$$
$$\beta(w_\sigma w_\tau)=\beta(w_\sigma)\beta(w_\tau).$$

以上二式等于说

$$\alpha({}^\sigma c)={}^{\gamma\sigma}(\alpha c),$$
$$\alpha c_{\sigma,\tau}=b_{\gamma\sigma,\gamma\tau}({}^{\gamma\sigma}c'_\tau c'^{-1}_{\sigma\tau}c'_\sigma).$$

如果我们令 G 通过 γ 作用在 C' 上, 则第一个等式意味着 α 是一个 G 同态, 而第二个等式意味着 G 的取值在 C' 中的 2 上闭链 $\alpha(c_{\sigma,\tau})$ 与 $b_{\gamma\sigma,\gamma\tau}$ 相差 G 的取值在 C' 中的 1 上链 c'_σ 的上边缘, 即 $\alpha_*[c_{\sigma,\tau}]=\gamma^*[b_{\sigma,\tau}]$.

反之, 容易验证命题 1.2.5 中的条件 (1), (2) 保证 β 的存在性.

对于给定的 α 和 γ, 为了计算不同的 β 的个数, 我们来考虑 1 上闭链 $c'_\sigma=(\beta w_\sigma)v_{\gamma\sigma}^{-1}$ 共有多少. 这些 1 上闭链能够刻画 β. 如果 β 和 $\tilde\beta$ 是两个 β, 则像我们已经看到的那样, 它们相应的 c' 和 $\tilde c$ 有相同的上边缘, 所以他们的商

$$d_\sigma=\tilde c_\sigma c'^{-1}_\sigma=(\tilde\beta w_\sigma)v_{\gamma\sigma}^{-1}v_{\gamma\sigma}(\beta w_\sigma)^{-1}=(\tilde\beta w_\sigma)(\beta w_\sigma)^{-1}$$

是 G 的取值在 C' 中的 1 上闭链. 易见这个上闭链不依赖于陪集代表 w_σ 的选取：事实上如果我们用 cw_σ 代替 w_σ $(c\in C)$, 则 d_σ 变为 $(\alpha c)d_\sigma(\alpha c)^{-1}=d_\sigma$. 所以 1 上闭链 $d=d_\sigma$ 在同态的集合 $\{\beta\}$ 上有一个自然的作用, 其定义为

$(d \cdot \beta)(w_\sigma) = d_\sigma(\beta w_\sigma)$ (群作用所要求的 $d'(d\beta) = (d'd)\beta$ 显然成立). 由以上的讨论知道这个作用显然是传递的, 并且没有不动点. 这就是说: 如果 β_0 是一个 β, 则对应 $d \leftrightarrow d\beta_0$ 是所有的 d 和所有的 β 之间的一一对应.

最后我们只要证明 1 上边缘 $(\partial b)_\sigma = {}^{\gamma\sigma}b b^{-1}$ 在 β 上的作用的结果是 β 与 W' 的内自同构 $w \mapsto b^{-1}wb$ 的复合. 事实上, 我们有

$$((\partial b) \cdot \beta)w_\sigma = (b^{-1})({}^{\gamma\sigma}b)(\beta w_\sigma) = b^{-1}(\beta w_\sigma)b.$$

这就完成了命题 1.2.5 的证明. □

1.3　上　积

1.3.1　上积的定义和性质

设 A, B 是 G 模, 则 $A \otimes B$ 具有 $G \times G$ 模结构 (只要定义 $(\sigma, \tau)(a \otimes b) = \sigma a \otimes \tau b$). 对于 $a \in H^p(G, A)$ 和 $b \in H^q(G, B)$, 有 $a \otimes b \in H^{p+q}(G \times G, A \otimes B)$. 设 $\Delta: G \to G \times G$ 是对角映射, 则 $\Delta^*(a \otimes b)$ 是 $H^{p+q}(G, A \otimes B)$ 的一个元素, 称之为 a 与 b 的**上积** (cup product), 记为 $a \cup b$ (此处 $A \otimes B$ 有 G 模结构, 由 $\sigma(a \otimes b) = \sigma a \otimes \sigma b$ 给出). 事实上对于所有的整数 p, q 和所有的 G 模 A, B, 存在唯一的一族同态

$$\begin{aligned} \hat{H}^p(G, A) \otimes \hat{H}^q(G, B) &\longrightarrow \hat{H}^{p+q}(G, A \otimes B) \\ a \otimes b &\longmapsto a \cup b, \end{aligned}$$

满足以下条件:

(C1)　这些同态关于 A 和 B 是函子性的, 即它们是关于 (A, B) 的共变双函子的态射.

(C2)　对于 $p = q = 0$, 它们由自然的乘积

$$A^G \otimes_{\mathbb{Z}} B^G \longrightarrow (A \otimes_{\mathbb{Z}} B)^G$$

所诱导.

(C3)　如果 $0 \to A \to A' \to A'' \to 0$ 是 G 模的正合序列, 并且 $0 \to A \otimes B \to A' \otimes B \to A'' \otimes B \to 0$ 也正合, 则对于 $a'' \in \hat{H}^p(G, A'')$ 和 $b \in \hat{H}^q(G, B)$, 有

$$(\delta a'') \cup b = \delta(a'' \cup b) \ (\in \hat{H}^{p+q+1}(G, A \otimes B)).$$

(C4) 如果 $0 \to B \to B' \to B'' \to 0$ 是 G 模的正合序列, 并且 $0 \to A \otimes B \to A \otimes B' \to A \otimes B'' \to 0$ 也正合, 则对于 $a \in \hat{H}^p(G, A)$ 和 $b'' \in \hat{H}^q(G, B'')$, 有

$$a \cup (\delta b'') = (-1)^p \delta(a \cup b'') \ (\in \hat{H}^{p+q+1}(G, A \otimes B)).$$

上积的下述性质容易由维数移动定理导出:

(1) $(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$ (将 $(A \otimes B) \otimes C$ 与 $A \otimes (B \otimes C)$ 等同).

(2) $a \cup b = (-1)^{\dim a \cdot \dim b} b \cup a$ (将 $A \otimes B$ 与 $B \otimes A$ 等同).

(3) $\mathrm{Res}(a \cup b) = \mathrm{Res}(a) \cup \mathrm{Res}(b)$.

(4) $\mathrm{Cor}(a \cup \mathrm{Res}(b)) = \mathrm{Cor}(a) \cup b$.

更一般地, 设 A, B, C 是 G 模, φ: $A \times B \to C$ 是 G 模同态. 例如

$$\begin{aligned} A \times \mathrm{Hom}(A, B) &\longrightarrow B \\ (a, f) &\longmapsto f(a). \end{aligned}$$

如果我们把上积与 φ 所诱导的上同调同态 φ^* 复合起来, 则有

$$\begin{aligned} \hat{H}^p(G, A) \otimes \hat{H}^q(G, B) &\longrightarrow \hat{H}^{p+q}(G, C) \\ a \otimes b &\longmapsto \varphi^*(a \cup b). \end{aligned}$$

$\varphi^*(a \cup b)$ 称为 a 和 b 相对于 φ 的**上积** (cup product).

作为上积计算的一个例子, 我们将证明: 如果 G 是有限循环群, A 是有限 G 模, 则所有的 $\hat{H}^n(G, A)$ $(n \in \mathbb{Z})$ 有相同的阶. 这个结果可以由下面将要给出的两个命题得到.

设 G 是阶为 m 的循环群, σ 是 G 的一个生成元. 则 G 有一个特别简单的完全化解 $K_\bullet$: $K_\bullet$ 中的每个 K_i 都同构于 $\Lambda = \mathbb{Z}[G]$, 若 i 为偶数, 则 $\mathrm{d}: K_{i+1} \to K_i$ 是用 $T = \sigma - 1$ 作乘法, 若 i 是奇数, 则 $\mathrm{d} = \mathrm{N}$ (或说用 N 作乘法). T 的核为 $\Lambda^G = \mathrm{N} \cdot \Lambda = \mathrm{Im}\, \mathrm{N}$, T 的像是 $I_G = \mathrm{Ker}\, \mathrm{N}$. 所以对于任意 G 模 A, 复形 $\mathrm{Hom}_G(K_\bullet, A)$ 为

$$\cdots A \overset{\mathrm{N}}{\leftarrow} A \overset{T}{\leftarrow} A \overset{\mathrm{N}}{\leftarrow} A \overset{T}{\leftarrow} \cdots$$

故

$$\hat{H}^{2n}(G, A) = \hat{H}^0(G, A) = A^G / \mathrm{N}A,$$
$$\hat{H}^{2n+1}(G, A) = \hat{H}^{-1}(G, A) = {}_{\mathrm{N}}A / I_G A,$$

其中 ${}_{\mathrm{N}}A$ 是 N: $A \to A$ 的核.

特别地, $H^2(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^G / \mathrm{N}\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 是 m 阶循环群.

命题 1.3.1 设 G 是 m 阶循环群. 则对于任意的 $n \in \mathbb{Z}$ 和所有的 G 模 A, 用 $H^2(G,\mathbb{Z})$ 的一个生成元作上积得到的映射

$$\hat{H}^n(G,A) \longrightarrow \hat{H}^{n+2}(G,A)$$

同构.

证明 正合序列

$$\begin{cases} 0 \longrightarrow I_G \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{N}} \Lambda \xrightarrow{T} I_G \longrightarrow 0 \end{cases} \tag{1.20}$$

给出同构

$$\hat{H}^0(G,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta} \hat{H}^1(G,I_G) \xrightarrow{\delta} \hat{H}^2(G,\mathbb{Z}).$$

由于 (1.20) 式中的两个序列都在 $\mathbb{Z}$ 上分裂, 所以它们与 A 作张量积后仍保持正合. 所以我们只要证明用 $\hat{H}^0(G,\mathbb{Z})$ 的生成元作上积导致 $\hat{H}^n(G,A)$ 的自同构. 由维数移动定理我们只要证明 $n=0$ 的情形. 因为 $\hat{H}^0(G,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, 所以 $\hat{H}^0(G,\mathbb{Z})$ 的生成元 b 由与 m 互素的一个整数 β 所表示. 用 b 作上积就是用 β 作乘法. 这显然是一个自同构. □

命题 1.3.2 设 G 是有限阶循环群, A 是有限 G 模. 则 $\hat{H}^0(G,A)$ 和 $\hat{H}^1(G,A)$ 有相同的阶.

证明 考虑正合序列

$$0 \longrightarrow A^G \longrightarrow A \xrightarrow{T} A \longrightarrow A_G \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \hat{H}^1(A) \longrightarrow A_G \xrightarrow{\mathrm{N}} A^G \longrightarrow \hat{H}^0(A) \longrightarrow 0.$$

由第一个序列知 A^G 和 A_G 的阶相等. 再由第二个序列即知 $\hat{H}^0(G,A)$ 和 $\hat{H}^1(G,A)$ 的阶相同. □

1.3.2 对偶定理

在本小节中我们综述 Tate 和 Nakayama 的一些定理.

设 A, B, C 是 G 模, $\varphi: A\times B \to C$ 是 G 模同态. 又设 $q \in \mathbb{Z}$, $a \in \hat{H}^q(G,A)$. 对于的 G 任一子群 G' 和任一 G 模 D, 令

$$f(q,n,G',D): \hat{H}^n(G',B\otimes D) \longrightarrow \hat{H}^{n+q}(G',C\otimes D)$$

为用 $\mathrm{Res}_{G/G'}(a)$ 作上积所给出的同态 (相对于映射 $A\otimes(B\otimes D) \to C\otimes D$).

定理 1.3.3 设对于任意素数 p 和 G 的所有 p-Sylow 子群 G_p，都存在整数 n_p 使得 $f(q,n,G',\mathbb{Z})$ 在 $n=n_p$ 时是满射，在 $n=n_p+1$ 时是双射，在 $n=n_p+2$ 时是单射. 则对于所有的整数 n, G 的所有的子群 G', 所有满足 $\mathrm{Tor}(B,D)=\mathrm{Tor}(C,D)=0$ 的 G 模 D, $f(q,n,G',D)$ 都是双射.

我们建议读者参看 [333] IX § 8 中给出的此定理的证明. 我们将要用到此定理的下述的直接推论.

推论 1.3.4 如果对于 $n=-1$, 0, 1 和 G 的所有 Sylow 子群 G', $f(2,n,G',\mathbb{Z})$ 都是双射, 则对于所有的自由 G 模 D, $f(2,n,G,D)$ 是双射.

设 G, p, G_p 如上. 一个 G 模 A 称为**类模** (class module), 如果存在一个类 $a\in H^2(G,A)$, 使得对于任意素数 p，下述两个条件成立:

(1) $H^1(G_p,A)=0$,

(2) $H^2(G_p,A)$ 由 $\mathrm{Res}_{G/G_p}(a)$ 生成, 并且它的阶等于 G_p 的阶.

这样的类 a 称为**基本类** (fundamental class).

设是 A 类模. 我们在定理 1.3.3 中取 $B=\mathbb{Z}$, $C=A$, $q=2$, $n_p=-1$. 对于 $n=-1$, $f(2,n,G_p,\mathbb{Z})$ 的满性来自类模的条件 (1). 对于 $n=0$, $\hat{H}^0(G_p,\mathbb{Z})$ 是循环群, 其阶等于 G_p 的阶, 所以条件 (2) 保证 $f(2,n,G_p,\mathbb{Z})$ 是双射. 对于 $n=1$, 由 $H^1(G_p,\mathbb{Z})=\mathrm{Hom}(G_p,\mathbb{Z})=0$ 知 $f(2,n,G_p,\mathbb{Z})$ 是单射. 所以定理 1.3.3 的所有假设条件都被满足. 于是我们有下面的推论:

推论 1.3.5 设 A 是类模, a 是一个基本类. 如果 D 是 G 模, 使得 $\mathrm{Tor}(A,D)=0$ (即 D 无扭或是平凡 G 模 $\mathbb{Z}$), 则对于 G 的所有子群 H 和所有整数 n, 用 $\mathrm{Res}_{G/H}(a)$ 作上积诱导出同构：

$$\hat{H}^n(H,D)\longrightarrow \hat{H}^{n+2}(H,A\otimes D).$$

为了叙述下面的定理, 我们引入对偶群的概念.

对于 Abel 群 A, 我们称 $A^*=\mathrm{Hom}(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 为 A 的**对偶群** (dual group). 如果 A 是 G 模, 则在 $(\sigma\alpha)(a)=\alpha(\sigma^{-1}a)$ $(\sigma\in G,\ \alpha\in A^*,\ a\in A)$ 下 A^* 也是 G 模. 此时双线偶对

$$\langle\ ,\ \rangle:\ A^*\times A\longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

$$\langle\alpha,a\rangle=\alpha(a)$$

是 G 同态. 我们有相对于 $\langle\ ,\ \rangle$ 的上积

$$\hat{H}^{-n}(G,A^*)\times\hat{H}^{n-1}(G,A)\longrightarrow\hat{H}^{-1}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

由平凡 G 模的正合序列

$$0\longrightarrow\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\longrightarrow 0$$

我们得到

$$\hat{H}^{-1}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong H^0(G,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_n,$$

其中 $n=|G|$, $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_n$ 是 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 中阶整除 n 的元素组成的子群. 我们将此同构记为

$$\kappa^{-1}:\ \hat{H}^{-1}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_n.$$

将 $\varphi \in \hat{H}^{-n}$ 映为同态 $\beta \mapsto \kappa^{-1}(\varphi \cup \beta)$ 的映射是一个同构:

$$\hat{H}^{-n}(G,A^*) \cong (\hat{H}^{n-1}(G,A))^*.$$

进一步, 如果 A 是 $\mathbb{Z}$ 自由的, 则我们有交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\hat{H}^{n-1}(G,\mathrm{Hom}(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})) & \times \hat{H}^{-n}(G,A) & \longrightarrow & \hat{H}^{-1}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\
\downarrow{\scriptstyle\delta} & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} \\
\hat{H}^{n}(G,\mathrm{Hom}(A,\mathbb{Z})) & \times \hat{H}^{-n}(G,A) & \longrightarrow & \hat{H}^{0}(G,\mathbb{Z})
\end{array}$$

其中竖直箭头都是同构, 而底下的一行决定了一个正合对偶, 在此对偶下 $\hat{H}^n(G,\mathrm{Hom}(A,\mathbb{Z}))$ 同构于 $(\hat{H}^{-n}(G,A))^*$.

现在我们叙述对偶定理.

定理 1.3.6　设 M 是 $\mathbb{Z}$ 自由的 G 模, A 是一个类模. 则相对于自然偶对

$$\mathrm{Hom}(M,A)\times M \longrightarrow A$$

的上积决定一个正合偶对

$$\hat{H}^n(G,\mathrm{Hom}(M,A))\times \hat{H}^{2-n}(G,M) \longrightarrow \hat{H}^2(G,A).$$

此偶对诱导出同构

$$\hat{H}^n(G,\mathrm{Hom}(M,A)) \cong (\hat{H}^{2-n}(G,M))^*.$$

此定理的证明可以参看 [225] Chap. IV §5, 7, [175] p.23.

1.3.3　上积的计算和应用

在低维的情形我们可以确切地计算上积.

命题 1.3.7　设 A, B 是 G 模.

(1) 对于 $a \in A^G$, 令 $f_a: B \to A \otimes B$ 为由 $b \mapsto a \otimes b$ 给出的 G 同态. 则上积

$$\hat{H}^0(G,A) \otimes \hat{H}^n(G,B) \longrightarrow \hat{H}^n(G,A \otimes B)$$

由

$$[a] \cup [x] = f_a^*([x])$$

给出, 其中 $[a]$ 表示 a 所在的类, $[x] \in \hat{H}^n(G,B)$.

(2) 上积

$$\hat{H}^1(G,A) \otimes \hat{H}^{-1}(G,B) \longrightarrow \hat{H}^0(G,A \otimes B)$$

由

$$[f] \cup [b] = \Big[\sum_{\sigma \in G} f(\sigma) \otimes \sigma b\Big]$$

给出, 其中 $b \in B$ 满足 $\mathrm{N}_G b = 0$, f 是 G 的取值在 A 中的 1 上闭链.

(3) 上积

$$\hat{H}^1(G,A) \otimes \hat{H}^{-2}(G,B) \longrightarrow \hat{H}^{-1}(G,A \otimes B)$$

由

$$[f] \cup [x] = \Big[\sum_{\sigma \in G} f(\sigma) \otimes x(\sigma)\Big]$$

给出, 其中 f 是 G 的取值在 A 中的 1 上闭链, x 是 G 的取值在 B 中的 1 闭链.

(4) 上积

$$\hat{H}^{-2}(G,A) \otimes \hat{H}^2(G,B) \longrightarrow \hat{H}^0(G,A \otimes B)$$

由

$$[x] \cup [f] = \Big[\sum_{\sigma,\tau \in G} \tau x(\sigma) \otimes f(\tau,\sigma)\Big]$$

给出, 其中 f 是 G 的取值在 B 中的 2 上闭链, x 是 G 的取值在 A 中的 1 闭链.

详情参见 [333] Chap. XI Annexe.

设 A 是 $\mathbb{Z}$ 自由的 G 模, Q 是一个平凡 G 模. 则上面的命题中的情形 (3) 给出一个偶对

$$H^1(G,\mathrm{Hom}(A,Q)) \times H_1(G,A) \longrightarrow H_0(G,Q) = Q,$$

因而有同态

$$\Phi: H^1(G,\mathrm{Hom}(A,Q)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_1(G,A),Q). \tag{1.21}$$

命题 1.3.8 如果 Q 是 $\mathbb{Z}$ 内射的, 则 Φ 是同构.

证明 设 f 是 G 的取值在 $\mathrm{Hom}(A, Q)$ 中的 1 上闭链, x 是 G 的取值在 A 中的 1 闭链, 则 (1.21) 式之前的偶对将 $([f],[x])$ 映为

$$\sum_{\sigma\in G}\langle f(\sigma), x(\sigma)\rangle.$$

如果 $\Phi([f])=0$, 则

$$x\longmapsto\sum_{\sigma\in G}\langle f(\sigma), x(\sigma)\rangle$$

是由 1 链群到 Q 的一个同态, 它在 1 闭链上取之为零. 所以它定义了 0 维边缘到 Q 的一个映射. 此映射可以扩充为由 A 到 Q 的一个同态 f'. 于是对于所有的 1 链 x,

$$\sum_{\sigma\in G}\langle f(\sigma)-\mathrm{d}f'(\sigma), x(\sigma)\rangle$$

都等于零. 这意味着 $f=\mathrm{d}f'$, 即 $[f]=0$. 这就证明了 Φ 是单射. 反之, 设 Ψ 是由 $H_1(G,A)$ 到 Q 的一个同态, 则 Ψ 决定了由 1 闭链群到 Q 的一个同态. 此同态可以扩充为由 1 链群到 Q 的同态 Ψ'. 对于 $\sigma\in G$, 令 $f(\sigma)$ 为 $\mathrm{Hom}(A,Q)$ 中由 $\langle f(\sigma),\hat{\lambda}\rangle=\Psi'(x)$ 所定义的元素, 其中 x 是一个 1 链, 满足条件 $x(\sigma)=\hat{\lambda}$ 以及 $x(\tau)=0$ $(\forall\,\tau\neq\sigma)$. 则对于任意 1 链, 有

$$\Psi'(x)=\sum_{\sigma\in G}\langle f(\sigma), x(\sigma)\rangle.$$

对于 $\sigma_1, \sigma_2\in G$, 令 x 是一个 2 链, 其定义为 $x(\sigma_1,\sigma_2)=\hat{\lambda}$ 以及 $x(\tau,\sigma)=0$ $(\tau\neq\sigma_1$ 或 $\sigma\neq\sigma_2)$. 则

$$\mathrm{d}x(\sigma)=\sum_{\tau\in G}\tau^{-1}x(\tau,\sigma)-\sum_{\tau\in G}x(\sigma\tau^{-1},\tau)+\sum_{\tau\in G}x(\sigma,\tau).$$

此式右端的第一的求和当 $\sigma=\sigma_2$ 时等于 $\sigma_1^{-1}\hat{\lambda}$, 而对于其余的 σ 都等于零. 第二的求和当 $\sigma=\sigma_1\sigma_2$ 时等于 $\hat{\lambda}$, 而对于其余的 σ 都等于零. 第三的求和当 $\sigma=\sigma_1$ 时等于 $\hat{\lambda}$, 而对于其余的 σ 都等于零. 于是

$$\begin{aligned}0=\Psi'(\mathrm{d}x)&=\langle f(\sigma_2),\sigma_1^{-1}\hat{\lambda}\rangle-\langle f(\sigma_1\sigma_2),\hat{\lambda}\rangle+\langle f(\sigma_1),\hat{\lambda}\rangle\\&=\langle\sigma_1 f(\sigma_2)-f(\sigma_1\sigma_2)+f(\sigma_1),\hat{\lambda}\rangle.\end{aligned}$$

这意味着 f 是一个上闭链, $\Psi=\Phi(f)$. 这就证明了 Φ 是满射. 因此 Φ 是同构. □

作为此命题的一个应用, 我们来计算映射 $H_1(C,A)\to H_1(W,A)$ 的核 (见命题 1.2.2 中的 (1.6) 式).

命题 1.3.9 设 G 是有限群, C 是 G 的一个类模, $\alpha \in H^2(G,C)$ 是一个基本类,

$$1 \longrightarrow C \xrightarrow{i} W \xrightarrow{j} G \longrightarrow 1$$

是属于类 α 的一个群扩张. 又设 A 是 $\mathbb{Z}$ 自由的 G 模, Z 是范数映射

$$\mathrm{N}_G:\ H_1(C,A) \longrightarrow H_1(C,A)$$

的核. 则序列

$$0 \longrightarrow Z \longrightarrow H_1(C,A) \longrightarrow H_1(W,A) \longrightarrow H_1(G,A) \longrightarrow 0 \tag{1.22}$$

正合.

证明 根据命题 1.2.2, 我们只要证明 Z 是映射的核. 这等价于证明伴随映射

$$\mathrm{Hom}(H_1(W,A),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_1(C,A),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

的像由在 Z 上取值为零的同态组成. 应用命题 1.3.8 给出的同构 Φ (它具有函子性质), 我们只要证明映射

$$\mathrm{Res}:\ H^1(W,\mathrm{Hom}(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \longrightarrow H^1(C,\mathrm{Hom}(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \tag{1.23}$$

的像由在 Φ 下对应于在 Z 上取值为零的同态的元素组成. 这个证明由以下三步给出.

第一步. 首先证明：一个 1 上闭链 $\psi:\ C \to \mathrm{Hom}(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 属于 (1.23) 式的像当且仅当存在由 W 到半直积 $\mathrm{Hom}(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rtimes G$ 的同态 ψ' 使得下图交换:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{i} & W & \xrightarrow{j} & G & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\psi} & & \downarrow{\scriptstyle\psi'} & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{id}} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rtimes G & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{1.24}$$

事实上, 如果 ψ 是 W 的取值在 $\mathrm{Hom}(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 中的 1 上闭链 f 的限制, 则定义 $\psi'(w) = f(w) \times j(w)$ 就使得图 (1.24) 交换. 反之, 如果图 (1.24) 交换, 则由 $\psi'(w) = f(w) \times j(w)$ 所定义的 f 是一个上闭链, 它在 C 上的限制就是 ψ.

第二步. 根据命题 1.2.5, 对于给定的 ψ, 存在 ψ' 使得图 (1.24) 交换当且仅当以下两个条件成立: (i) ψ 是 G 同态, (ii) $\psi(\alpha) = 0$ (注意图 (1.24) 的底行是分裂的). 令 $\varphi = \Phi(\psi)$. 如果 φ 在 Z 上取值为零, 则条件 (i) 是成立的 (因为 Φ 是 G 同态).

第三步. 最后证明 $\psi(\alpha)=0$ 当且仅当 ψ 在 Z 上取值为零. 考虑图:

$$\begin{array}{ccc} A\otimes C & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\psi} & A\otimes \mathrm{Hom}(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_1(C,A) & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{array}$$

其中左边的竖直箭头将 $a\otimes c$ 映为在 c 处取值为 a 而在 C 的其他元素处取值皆为零的 1 闭链所在的类. 继续用 ψ 作用, 我们得到 $\langle\psi(c),a\rangle$, 这正是在此图中由 $a\otimes c$ 出发沿着另一条路线得到的结果. 这说明此图示交换的. 如果 ψ (因而 φ) 是 G 不变的, 则此图导致下面的交换图:

$$\begin{array}{ccc} \hat{H}^{-3}(G,A)\otimes\hat{H}^2(G,C) & \longrightarrow & \hat{H}^{-3}(G,A)\otimes\hat{H}^2(G,\mathrm{Hom}(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \\ \mu\downarrow & & \downarrow\nu \\ \hat{H}^{-1}(G,H_1(C,A)) & \longrightarrow & \hat{H}^{-1}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \end{array}$$

其中的竖直箭头由上积给出. 由图的交换性易见 $\psi(\alpha)=0$ 当且仅当 $\nu(\beta\otimes\psi(\alpha))=0\ (\forall\,\beta)$. 另一方面, 由于 α 是类模 C 的基本类, 由 Tate 和 Nakayama 的定理知: 映射 $\gamma\mapsto\mu(\gamma\otimes\alpha)$ 是由 $\hat{H}^{-3}(G,A)$ 到 $\hat{H}^{-1}(G,H_1(C,A))$ 的同构. 于是 $\psi(\alpha)=0$ 当且仅当此图的底行的箭头是 0. 由 $\hat{H}^{-1}$ 的定义即知这当且仅当 ψ 在 Z 上取值为零. □

1.4　连续上同调

在本小节我们假定 G 是投射有限拓扑群. 设 $\{U_i\}_{i\in I}$ 是 G 的所有开正规子群. 在指标集 I 上定义偏序为: $i\leqslant j$ 当且仅当 $U_i\supseteq U_j$. 则 $G\cong\varprojlim G/U_i$.

设 A 是 G 模, 则以下三条等价:

(1) $A=\bigcup_{i\in I}A^{U_i}$.

(2) A 的任一元素在 G 中的稳定子群都是 G 的开子群.

(3) G 模结构映射 $G\times A\to A$ 连续, 这里 A 的拓扑为离散拓扑.

满足以上条件的模称为**离散 G 模** (discrete G-module). 我们将只考虑这样的模. 显然有 $A=\varinjlim A^{U_i}$. 我们以 $\mathcal{M}(G)$ 记离散 G 模和连续同态的范畴.

范畴 $\mathcal{M}(G)$ 是 Abel 范畴, 并且有足够的内射. 于是我们可以 (通过范畴 $\mathcal{M}(G)$ 中的右导出函子) 定义 G 关于 A 的上同调群为

$$H^n(G,A)=\mathrm{Ext}^n_G(\mathbb{Z},A)\qquad(n\geqslant 0)$$

(参见 [103] p.5). 定义 $H^n(G,A)$ 的另一条路线是应用维数移动：令 $M(G,A)$ 为由 G 到 A 的所有连续函数组成的群, 在 $M(G,A)$ 上定义模结构为

$$\sigma\varphi(\tau)=\varphi(\tau\sigma),\qquad \sigma,\tau\in G,\ \ \varphi\in M(G,A),$$

则 $M(G,A)$ 是离散 G 模. 如果我们将 $a\in A$ 映为 $\iota_a\in M(G,A)$, 其中 ι_a 的定义为 $\iota_a(\sigma)=\sigma a$, 则有正合序列

$$0\longrightarrow A\xrightarrow{\ \iota\ }M(G,A)\longrightarrow \operatorname{Coker}\iota\longrightarrow 0.$$

现在我们可以令

$$\begin{aligned}&H^0(G,A)=A^G,\\&H^1(G,A)=H^0(G,\operatorname{Coker}\iota)/\operatorname{Im}H^0(G,M(G,A)),\\&H^{n+1}(G,A)=H^n(G,\operatorname{Coker}\iota)\qquad (n\geqslant 1).\end{aligned}$$

我们可以用连续 (标准的非齐次) 上链来计算上同调群. 令 $C^i=C^i(G,A)$ 为由 G^i 到 A 的所有连续映射组成的加法群. 定义上边缘 $d:\ C^i\to C^{i+1}$ 如下：

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}\varphi)(\sigma_1,\cdots,\sigma_{i+1})&=\sigma_1\varphi(\sigma_2,\cdots,\sigma_{i+1})\\&+\sum_{j=1}^{i}(-1)^j\varphi(\sigma_1,\cdots,\sigma_j\sigma_{j+1},\cdots,\sigma_{i+1})+(-1)^{i+1}\varphi(\sigma_1,\cdots,\sigma_i).\end{aligned}$$

这样就得到一个复形 $C^\bullet$, 其同调群恰好是 $H^n(G,A)$.

由事实 $C^n(G,A)=\varinjlim C^n(G/U_i,A^{U_i})$ 出发我们还有一个定义上同调群的方法：对于任意的 $i\leqslant j$, 有膨胀同态

$$\lambda_i^j:\ H^n(G/U_i,A^{U_i})\longrightarrow H^n(G/U_j,A^{U_j})$$

(注意 G/U_i 是有限群). 如果 $i\leqslant j\leqslant k$, 则 $\lambda_j^k\lambda_i^j=\lambda_i^k$. 我们可以定义 $H^n(G,A)$ 为关于同态 $\{\lambda_i^j|i,j\in I\}$ 的直极限 $\varinjlim H^n(G/U_i,A^{U_i})$.

作为 (G,A) 的函子, 这些上同调群具有有限群的上同调群的所有性质. 我们将不讨论这些细节.

第二章　代数环面

在第一篇第一章 1.1 节和第四章 4.1 节我们说明了什么是定义在域 K 上的线性代数群 G 的 K 有理点. 由 G 的 K 有理点组成的群记为 $G(K)$. 由 G 上的多项式函数所组成的 K 代数记为 $K[G]$.

设 G 是一个 K 群. 对于 $x \in G$ 和 $f \in K[G]$, 所谓 f 被 x 的右平移定义为

$$(\rho_x f)(y) = f(yx) \quad (y \in G).$$

一个基本的事实是：$K[G]$ 有一个有限维子空间 V, 它在 ρ_x 下稳定 $(\forall\, x \in G)$, 并且 $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ 是一个忠实表示. 此即

线性化 (linearization)：　任一 K 群都同构于某个 $\mathrm{GL}(n)$ 的定义在 K 上的闭子群 (参见 [47] 1.10 节).

我们常以 $\mathbb{G}_\mathrm{m}$ 记 $\mathrm{GL}(1)$. 代数群 G 的一个**特征标** (character) 是指代数群的一个同态 $\chi\colon G \to \mathbb{G}_\mathrm{m}$. 如果 χ_1, χ_2 是 G 的特征标, 定义 $(\chi_1+\chi_2)(g) = \chi_1(g)\chi_2(g)$ $(g \in G)$, 则 $\chi_1 + \chi_2$ 也是 G 的特征标. G 的所有特征标的集合 $X(G)$ 构成一个交换群. 对于一个 K 群 G, 我们用 $X_K(G)$ 记 G 的定义在 K 上的特征标群.

2.1　代数环面

在本节中我们假定 K 是特征 p 的代数封闭域.

2.1.1　可对角化的代数群

以 $D(n)$ 记一般线性群的对角子群. 显然 $D(n)$ 同构于 $\underbrace{\mathbb{G}_\mathrm{m} \times \cdots \times \mathbb{G}_\mathrm{m}}_{n个}$. 我们称一个代数群 G 是**可对角化的** (diagonalizable), 如果它同构于 $D(n)$ 的某个闭子群 (n 为某正整数).

引理 2.1.1　设 G 是一个抽象群, X 是由 G 到 $K^\times$ 的所有同态组成的集合. 则 X 是由 G 到 K 的所有函数组成的 K 线性空间的线性无关的子集.

证明　假如引理不成立, 设 n 是满足以下条件的最小的正整数：存在线性相关的 $\chi_1, \cdots, \chi_n \in X$. 则有 $\chi = \sum_{i=1}^{n-1} a_i\chi_i + \chi_n = 0$ $(a_i \in K^\times)$. 由于 $\chi_1 \neq \chi_n$, 故存在 $g_0 \in G$ 使得 $\chi_1(g_0) \neq \chi_n(g_0)$. 于是对于所有的 $g \in G$, 有

$$0 = \chi(g_0 g) - \chi_n(g_0)\chi(g) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i(\chi_i(g_0) - \chi_n(g_0))\chi_i(g).$$

这给出一个非平凡的线性相关关系, 矛盾于 n 的最小性. □

命题 2.1.2 设 G 是代数群, 满足条件: $K[G]$ 作为 K 模由 $X(G)$ 张成,

(1) 如果 H 是 G 的闭子群, 则 H 由 $X(H)$ 张成, 并且 H 是 G 的某些特征标的核的交.

(2) 如果 $\pi: G \to \mathrm{GL}(n)$ 是任一表示, 则 π 共轭于 $D(n)$ 的某个子群.

证明 (1) 限制映射 $\psi: K[G] \to K[H]$ 是将 G 的特征标映为 H 的特征标的满同态. 所以 $K[H]$ 由 H 的特征标张成. 进一步, 如果 $\chi_i \in X(G)$, $a_i \in K$ 满足条件: $\sum a_i\chi_i$ 在 H 上为零, 对 H 应用引理 2.1.1 即知所有的 χ_i 在 H 上为零. 所以 $\mathrm{Ker}\,\psi$ 被限制映射 $X(G) \to X(H)$ 的核张成. 而 $\mathrm{Ker}\,\psi$ 恰是 $K[G]$ 中在 H 上为零的元素组成的理想, 故 H 是 G 的某些特征标的核的交.

(2) 由于 $K[G]$ 是有限生成 K 代数, 并且由 $X(G)$ 张成, 所以 $K[G]$ 作为 K 代数由某些特征标 $\chi_1, \cdots, \chi_n$ 生成. 于是映射

$$\begin{aligned} \psi: G &\longrightarrow \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \times \cdots \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \\ g &\longmapsto (\chi_i(g), \cdots, \chi_n(g)) \end{aligned}$$

是代数群的单同态. 故 G 是由半单元素组成的交换群. 由于半单矩阵的交换集合都可对角化, 所以 $\pi(G)$ 可对角化. □

推论 2.1.3 设 G 是代数群, 则下述条件等价:

(1) G 可对角化.

(2) G 是半单元组成的交换群.

(3) $K[G]$ 由特征标线性张成.

(4) G 在任一有理表示 $\pi: G \to \mathrm{GL}(n)$ 下的像共轭于 $D(n)$ 的某个子群.

2.1.2 代数环面的定义

我们已经看到可对角化的代数群有大量的特征标. 确切地说, 我们有

命题 2.1.4 $X((\mathbb{G}_{\mathrm{m}})^n) \cong \mathbb{Z}^n$.

证明 由于 $K[\mathbb{G}_{\mathrm{m}}] = K[x,t]/(xt-1) = K[x, \frac{1}{x}]$, 所以 $K[\mathbb{G}_{\mathrm{m}}]$ 在 K 上的基为单项式的集合 $\{x^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. 这些单项式恰是 $K[\mathbb{G}_{\mathrm{m}}]$ 的特征标. $K[(\mathbb{G}_{\mathrm{m}})^n]$ 同构于 n 个 $K[\mathbb{G}_{\mathrm{m}}]$ 的张量积. 所以 $\{x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} \mid (k_1, \cdots, k_n) \in \mathbb{Z}^n\}$ 组成 $K[(\mathbb{G}_{\mathrm{m}})^n]$ 的基. 这些单项式都是 $(\mathbb{G}_{\mathrm{m}})^n$ 的特征标, 而由引理 2.1.1 知 $(\mathbb{G}_{\mathrm{m}})^n$ 没有其他的特征标. □

命题 2.1.5 设 G 是可对角化的代数群. 则是没有 p 扭部分的有限生成的 Abel 群. 进一步, 如果 G 是连通的, 则 G 是无扭的.

证明 如果 $G \subseteq D(n) \cong (\mathbb{G}_m)^n$, 则 $X(G)$ 是 $X((\mathbb{G}_m)^n) \cong \mathbb{Z}$ 的同态像, 即 $X(G) \cong \mathbb{Z}^r \times A$, 其中 A 是 $X(G)$ 的扭子群. 由于 K 的特征为 p, 所以 K 中没有 p 次单位根, 故 A 没有 p 扭部分.

进一步, 如果 G 是连通的, 则对于任意的 $\chi \in X(G)$, G 在 $\mathbb{G}_m$ 中的像 $\chi(G)$ 是连通的. 而 $\mathbb{G}_m$ 的连通子群只有它本身和 1, 所以只要 $\chi \neq 1$, 必有 $\chi^k \neq 1$ $(\forall k \in \mathbb{Z})$. □

命题 2.1.6 设 G 是可对角化的代数群, G^0 是 G 的单位连通分支. 则

(1) $G=G^0 \times H$, 其中 G^0 同构于某个 $D(n)$, H 是一个阶与 p 互素的有限群.

(2) 对于 $x \in G$, 定义同态

$$\begin{aligned} \psi_x : X(G) &\longrightarrow \mathbb{G}_m \\ \chi &\longmapsto \chi(x), \end{aligned} \tag{2.1}$$

则在映射 $x \mapsto \psi_x$ 下 $G(K)$ 等同于 $\mathrm{Hom}(X(G), K^\times)$.

证明 (1) 我们可以设 G 是某个 $D(n)$ 的闭子群. 则含入映射 $G^0 \hookrightarrow D(n)$ 诱导出满的限制映射 $\psi: X(D(n)) \to X(G^0)$. 由于 G^0 连通, 由命题 2.1.5 知 $X(G^0)$ 是自由的 (设其秩为 r), 所以 ψ 分裂, 即 $X(D(n)) = \mathrm{Ker}\,\psi \oplus \mathbb{Z}^r$. 在 $\mathrm{Ker}\,\psi$ 的基 $\{\chi_1, \cdots, \chi_{n-r}\}$ 上添加 $\mathbb{Z}^r$ 的基 $\{\chi_{n-r+1}, \cdots, \chi_n\}$ 得到的 $X(D(n))$ 基. 则 $D(n)$ 的自同构 $x \mapsto \mathrm{diag}(\chi_1(x), \cdots, \chi_n(x))$ 将 G^0 满射到群 $\{\mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_n) | a_1 = \cdots = a_{n-r} = 1\}$ 上. 设 $D' = \{\mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_n) \mid a_{n-r+1} = \cdots = a_n = 1\}$, 则 $D(n) = G^0 \times D'$. 于是 $G = G^0 \times H$, 其中 $H = G \cap D'$. 显然 $H \cong G/G^0$ 是有限群. 最后由于 1 是 K 中唯一的 p 次单位根, 所以 $D(n)$ 的元素的阶与 p 互素, 于是 H 的阶与 p 互素.

(2) 由于 H 是有限群, 所以在 (2.1) 式给出的映射下 H 与 $\mathrm{Hom}(X(H), K^\times)$ 等同. 对于 $D(r, K)$ 也是如此. 故有

$$\mathrm{Hom}(X(G), K^\times) = \mathrm{Hom}(X(G^0), K^\times) \times \mathrm{Hom}(X(H), K^\times) = G^0 \times H = G. \ \square$$

推论 2.1.7 对于代数群 T, 下述三个条件等价:

(1) T 同构于 $D(n)$.

(2) T 是连通可对角化的 n 维群.

(3) $K[T]$ 由 $X(T)$ 张成, 而 $X(T)$ 同构于 $\mathbb{Z}^n$.

证明 由于不可约簇的乘积仍然不可约, 故有 (1)⇒(2). 反之, 在上命题中取 $G^0 = T$ 就得到 (2)⇒(1). 根据命题 2.1.4 和推论 2.1.3 有 (2)⇒(3). 最后, $X(T)$ 张成 $K[T]$ 蕴含 T 可对角化, 于是 $T = T^0 \times H$, 其中 H 有限. 而 $X(T) = X(T^0) \times X(H)$ 无扭, 故 H 平凡, T 连通, 即有 (3)⇒(2). □

如果一个代数群满足此命题的三个等价条件之一, 我们就称之为一个**代数环面** (algebraic torus), 或简称为**环面** (torus).

2.1.3 可对角群的零化子

设 G 是一个可对角化群. 对于 $A \subseteq G$ 和 $B \subseteq X(G)$, 我们定义它们的零化子:

$$A^{\perp} = \{\chi \in X(G) | \chi(a) = 1, \forall\, a \in A\},$$

$$B^{\perp} = \{g \in G | \chi(g) = 1, \forall\, \chi \in B\}.$$

命题2.1.8 $A \mapsto A^{\perp}$ 和 $B \mapsto B^{\perp}$ 定义了 G 的闭子群 A 的集合与 $X(G)$ 之间的映射, 此映射在 G 的闭子群的集合与集合 $\{X(G)$ 的子模 $B \mid X(G)/B$ 是 p 无扭的$\}$ 之间是互反的双射. 进一步, 有典范同构 $\mathrm{Hom}(G/A, K^{\times}) \cong A^{\perp}$ 和 $\mathrm{Hom}(A, K^{\times}) \cong X(G)/A^{\perp}$.

证明 为了证明命题中所说的映射是双射, 只要证明 $A^{\perp\perp} = A$ 和 $B^{\perp\perp} = B$. 显然有 $A \subseteq A^{\perp\perp}$. 另一方面, 对于可对角化群 G 应用 Chevalley 定理, 我们得到同态 $\pi: G \to D(n)$, 其核为 $\mathrm{Ker}\,\pi = A$. 由此易见 $A^{\perp\perp} \subseteq A$. 令 $G' = \mathrm{Hom}(X(G)/B, K^{\times})$. 我们可以将有限型的 p 无扭 Abel 群视为 $X(G')$. 则 $B^{\perp\perp}/B$ 是 G' 中所有元素的核的交, 且等于零. 令 H 是使得 $X(H) = X(G)/A^{\perp}$ 的可对角化群. 则 $H = \mathrm{Hom}(X(G)/A^{\perp}, K^{\times}) = A^{\perp\perp} = A$, 即有 $X(G)/A^{\perp} = X(A)$. 最后, $\mathrm{Hom}(G/A, K^{\times}) = A^{\perp}$ 是显然的. □

2.1.4 环面及特征标的同态

设 $\psi: T \to T'$ 是环面的同态, 则映射

$$\begin{aligned} {}^t\psi: X(T') &\longrightarrow X(T) \\ \chi' &\longmapsto \chi \circ \psi \end{aligned}$$

是 $\mathbb{Z}$ 模同态. 具体地说, 设 $f: T \to (\mathbb{G}_{\mathrm{m}})^d$ 和 $f': T' \to (\mathbb{G}_{\mathrm{m}})^{d'}$ 是两个同构. 令 $\varphi = f'\psi f^{-1}$, 则 ${}^t\varphi$ 是由 $X((\mathbb{G}_{\mathrm{m}})^{d'})$ $(\cong \mathbb{Z}^{d'})$ 到 $X((\mathbb{G}_{\mathrm{m}})^{d})$ $(\cong \mathbb{Z}^{d})$ 的同态. 我们可以假定 f 和 f' 的选择使得 ${}^t\varphi$ 是对角的 (假若不是对角的, 用初等因子理论可以将 ${}^t\varphi$ 对角化如下: 令 g 和 g' 分别是 $(\mathbb{G}_{\mathrm{m}})^d$ 和 $(\mathbb{G}_{\mathrm{m}})^{d'}$ 的自同构, 使得 ${}^tg^{-1}\,{}^t\varphi\,{}^tg'$ 是对角的. 用 fg 和 $f'g'$ 分别代替 f 和 g 即可). 令 χ_i $(1 \leqslant i \leqslant d)$ 是 $X((\mathbb{G}_{\mathrm{m}})^d)$ 的典范基 (即 $\chi_i(x_1, \cdots, x_d) = x_i$), χ_i' $(1 \leqslant i \leqslant d')$ 是 $X((\mathbb{G}_{\mathrm{m}})^{d'})$ 的典范基. 则存在整数 $e \leqslant d$ 使得 ${}^t\varphi(\chi_i') = n_i\chi_i$ 或 1 (当 $i \leqslant e$ 或 $i > e$ 时). 我们称 ψ 是**可分的** (separable), 如果 $n_i \not\equiv 0 \mod p$ $(\forall\, 1 \leqslant i \leqslant e)$.

反之, 如果有同态 $\varphi: X(T') \to X(T)$, 则存在同态 $\psi: T \to T'$ 使得 $\varphi = {}^t\psi$. 事实上, 在上面的记号下, 矩阵 (m_{ij}) 对应于 ψ, 其中 m_{ij} 满足 $\varphi(\chi_i') = \sum_{j=1}^{d} m_{ij}\chi_j$ $(1 \leqslant i \leqslant d')$. 令 $x_i' = \prod_{j=1}^{d} x_j^{m_{ij}}$. 则把 $(x_1, \cdots, x_d)$ 映为 $(x_1', \cdots, x_{d'}')$ 的映射就是我们所要求的同态 ψ.

上面的讨论给出了下面的命题：

命题 2.1.9 设 T 和 T' 是两个环面, $\psi: T \to T'$ 是同态. 则

(1) 映射 $\psi \mapsto {}^t\psi$ 定义了一个同构

$$\mathrm{Hom}(T, T') \cong \mathrm{Hom}(X(T'), X(T)).$$

(2) ψ 是同构当且仅当 ${}^t\psi$ 是同构.

(3) $(\mathrm{Im}\, \psi)^\perp = \mathrm{Ker}\, {}^t\psi$, 故 ψ 是满射当且仅当 ${}^t\psi$ 是单射.

(4) $\mathrm{Ker}\, \psi = (\mathrm{Im}\, {}^t\psi)^\perp$, 指数 $[\mathrm{Ker}\, \psi^\perp : \mathrm{Im}\, {}^t\psi]$ 是 p 的方幂, ψ 是单射当且仅当 $[X(T) : {}^t\psi(X(T'))]$ 是 p 的方幂.

(5) ψ 是可分的 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Cok}\, {}^t\psi$ 是 p 无扭的.

2.2 Galois 模

本节将讨论由环面所决定的 Galois 模的性质. 如果把环面换成半单线性代数群, 相应地就要讨论该线性代数群所决定的 Shimura 簇的各种上同调所决定的模, 这就是研究由模形式所决定的 Galois 表示的性质. 这比本节的内容要困难得多, 相应地得到的结果当然也更辉煌. 例如 Deligne 证明 Ramanujan 猜想, Langlands 证明二维可解的 Artin 猜想和 Wiles 证明 Fermat 最后定理. 可以说在近代数论中 Galois 模是中心的研究对象.

2.2.1 环面的分裂

一个定义在域 F 上的环面 T 被称为在域扩张 K/F 上**分裂** (split), 如果存在定义在 K 上的一个同构 $T \to D(n)$. 显然这等价于说 $X(T) = X_K(T)$. 由于 T 定义在 F 上, 所以存在定义 F 在上的嵌入 $T \hookrightarrow \mathrm{GL}(n)$. 以 F_s 记 F 的可分闭包, 则 $T(F_s)$ 是一组交换的半单自同态, 所以在某个 $g \in \mathrm{GL}(n, F_s)$ 的共轭作用下可以被对角化. 这意味着存在一个同构 $f: T(F_s) \to D(d, F_s)$ (d 为某个正整数), 这个 f 是定义在有限可分扩张 K/F 上的, K 是在 F 上添加 g 的所有特征值得到的扩域. 一个已知的结果是：可分点是稠密的 (例如参见 [46] p.52). 这就是说 $T(F_s)$ 在 T 中稠密. 于是 f 可以扩充为定义在 K 上的同构 $T \xrightarrow{\sim} D(d)$. 这就是下面的命题：

命题 2.2.1 设 T 是定义在域 F 上的环面, 则 T 在 F 的某个有限可分扩张上分裂.

2.2.2　分裂环面与 Galois 模

设 G 是群, M 和 M' 是 G 模. 对于 $\sigma \in G$, $x \in M$, 我们用 $\sigma(x)$ 或 ${}^{\sigma}x$ 记 x 在 σ 下的像. 令

$$M^G = \{x \in M \mid {}^{\sigma}x = x, \forall\, \sigma \in G\}.$$

同态群 $\mathrm{Hom}(M, M')$ 在

$${}^{\sigma}\varphi(x) = \sigma(\varphi(\sigma^{-1}(x))), \quad \sigma \in G, \qquad \varphi \in \mathrm{Hom}(M, M'), \quad x \in M$$

下成为 G 模. 于是 G 同态群 $\mathrm{Hom}_G(M, M')$ 就是 $(\mathrm{Hom}(M, M'))^G$. 我们有

$$\varphi(\sigma(x)) = \sigma(\varphi(x)), \quad \sigma \in G, \qquad x \in M, \quad \varphi \in \mathrm{Hom}_G(M, M').$$

由命题 2.2.1 知：定义在 F 上的环面 T 总会在某个有限 Galois 扩张 K/F 上分裂. 我们令 $G = \mathrm{Gal}(K/F)$. 则 G 作用在 $T(K)$ 上 (即作用在的 $T(K)$ 点的坐标上). G 也作用在 $X(T)$ 上, 其定义为 $\chi \mapsto {}^{\sigma}\chi$ ($\chi \in X(T)$, $\sigma \in G$). 于是 $T(K)$ 和 $X(T)$ 都成为 G 模.

命题 2.2.2　设 T 和 T' 是定义在域 F 上的两个环面, 它们在有限 Galois 扩张 K/F 上分裂. 令 $G = \mathrm{Gal}(K/F)$.

(1)　对于 $x \in T(F)$, 令 $\psi_x(\chi) = \chi(x)$. 则映射 $x \mapsto \psi_x$ 定义了一个 G 同构

$$T(F) \cong \mathrm{Hom}(X(T), K^{\times}).$$

(2)　设 $f: T \xrightarrow{\sim} (\mathbb{G}_{\mathrm{m}})^d$ 是一个 K 同构. 在 $X((\mathbb{G}_{\mathrm{m}})^d)$ 上定义模结构为: $\chi \mapsto {}^{t}g_{\sigma}(\chi)$, 其中 $g_{\sigma} = {}^{\sigma}f \circ f^{-1}$. 则 ${}^{t}f: X((\mathbb{G}_{\mathrm{m}})^d) \to X(T)$ 是一个 G 同构. 进一步, 如果关于 $X((\mathbb{G}_{\mathrm{m}})^d)$ 的典范基 $\{\chi_i \mid 1 \leqslant i \leqslant d\}$ 我们有

$${}^{t}g_{\sigma}(\chi_i) = \sum_{j=1}^{d} g_{ij}(\sigma)\chi_j \qquad (1 \leqslant i \leqslant d),$$

则 $x \in T(F)$ 当且仅当 ${}^{[g_{\sigma}]}y = {}^{\sigma}y$, 其中 $\sigma \in G$, $[g_{\sigma}] = [g_{ij}(\sigma)]$, $y = f(x)$.

(3)　映射 $\alpha \mapsto {}^{t}\alpha$ 定义了同构

$$\mathrm{Hom}_F(T, T') \cong \mathrm{Hom}_G(X(T'), X(T)).$$

证明　(1)　只要证明 $x \mapsto \psi_x$ 是 G 同态. 我们有

$${}^{\sigma}\psi_x(\chi) = {}^{\sigma}(\psi_x({}^{\sigma^{-1}}\chi)) = {}^{\sigma}({}^{\sigma^{-1}}\chi(x)) = \chi({}^{\sigma}x) = \psi_{{}^{\sigma}x}(\chi),$$

即 ${}^{\sigma}\psi_x = \psi_{{}^{\sigma}x}$. 所以 $x \mapsto \psi_x$ 是 G 同态.

(2) 由 (1) 我们有

$$\begin{aligned} x \in T(F) &\Leftrightarrow \psi_x \in \mathrm{Hom}_G(X(T), K^\times) \\ &\Leftrightarrow \psi_x \circ {}^t f \in \mathrm{Hom}_G(X((\mathbb{G}_\mathrm{m})^d), K^\times) \\ &\Leftrightarrow \prod_{j=1}^{d} (\psi_x \circ {}^t f(\chi_j))^{g_{ij}(\sigma)} = {}^\sigma(\psi_x \circ {}^t f(\chi_i)) \\ &\Leftrightarrow {}^{[g_\sigma]}y = {}^\sigma y \quad (y = f(x)). \end{aligned}$$

(3) 一方面有

$$\begin{aligned} &\alpha \in \mathrm{Hom}_F(T, T') \\ &\Rightarrow {}^\sigma\alpha = \alpha \\ &\Rightarrow {}^\sigma({}^t\alpha)(\chi') = {}^\sigma({}^t\alpha({}^{\sigma^{-1}}\chi')) = {}^\sigma({}^{\sigma^{-1}}\chi' \circ \alpha) = \chi' \circ {}^\sigma\alpha = \chi' \circ \alpha = {}^t\alpha(\chi') \\ &\Rightarrow {}^t\alpha \in \mathrm{Hom}_G(X(T'), X(T)), \end{aligned}$$

反之

$$\begin{aligned} {}^\sigma({}^t\alpha) = {}^t\alpha &\Rightarrow \chi' \circ {}^\sigma\alpha = \chi' \circ \alpha \quad (\forall\, \chi' \in X(T')) \\ &\Rightarrow {}^\sigma\alpha = \alpha \quad (\text{因为 } X(T')^\perp = \{1\}) \\ &\Rightarrow \alpha \in \mathrm{Hom}_F(T, T'). \end{aligned}$$

□

命题 2.2.3 设 T 是定义在域 F 上的环面并且在 K 上分裂. 令

$$X_*(T) = \mathrm{Hom}_K(\mathbb{G}_\mathrm{m}, T).$$

则 $T(K) \cong X_*(T) \otimes_\mathbb{Z} K^\times$.

证明 把 T 视为定义在 K 上的环面, 则有 $T \cong (\mathbb{G}_\mathrm{m})^d$. 于是

$$T(K) \cong \mathbb{G}_\mathrm{m}(K)^d = (K^\times)^d.$$

又有同构

$$K^\times \otimes_\mathbb{Z} \mathrm{Hom}_K(\mathbb{G}_\mathrm{m}, T) \cong K^\times \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Z}^d \cong (K^\times)^d.$$

在上面的两个同构下, 映射

$$\begin{aligned} K^\times \otimes_\mathbb{Z} \mathrm{Hom}_K(\mathbb{G}_\mathrm{m}, T) &\longrightarrow T(K) \\ x \otimes f &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

等同于 $(K^\times)^d$ 上的恒同映射. 这就证明了本命题. □

注 (1) $\mathrm{Gal}(K/F)$ 作用在 $X_*(T)$ 上, 其定义为: ${}^\sigma f({}^\sigma x) = {}^\sigma(f(x))$ (其中 $f \in X_*(T)$, $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)$). 在此作用下命题 2.2.3 中的同构是 $\mathrm{Gal}(K/F)$ 模同构.

(2) 由命题 2.2.2 和 2.2.3 容易导出 $\mathbb{Z}$ 上的对偶偶对:

$$\langle\ ,\ \rangle: X(T) \times X_*(T) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$\langle \chi, \lambda \rangle = m,$$

其中 m 满足 $\chi \circ \lambda(x) = x^m$.

(3) 显然有

$$X_*(T) = \mathrm{Hom}(X(T), \mathbb{Z}).$$

命题 2.2.4 设 K/F 是有限 Galois 扩张, $G = \mathrm{Gal}(K/F)$, M 是有限生成的无扭 G 模. 则在 F 同构意义下存在唯一的定义在 F 上的环面 T, 使得 T 在 F 上分裂并且有模同构 $X(T) \cong M$.

证明 唯一性来自于命题 2.2.2 的 (3).

以 $\overline{F}$ 记 F 的代数闭包, 以 $\overline{F}[M]$ 记 M 上的取值在 $\overline{F}$ 中的具有有限支集的函数组成的向量空间. 在 $\overline{F}[M]$ 中定义一个乘法 (卷积) 为

$$f_1 f_2(x) = \sum_{y \in M} f_1(y) f_2(y^{-1}x), \qquad f_1, f_2 \in \overline{F}[M].$$

显然 $\overline{F}[M]$ 是一个既约的有限生成的交换 $\overline{F}$ 代数. 进一步, $\overline{F}[M]$ 具有 Hopf 代数结构, 它的余乘法 μ^* 由对角线映射 $M \to M \times M$ 所诱导, 余逆 ι^* 由 M 的取逆映射 $x \mapsto x^{-1}$ 所诱导. 于是存在仿射代数群 T 使得 $\overline{F}[T] = \overline{F}[M]$.

我们将 $T(\overline{F})$ 与 $\mathrm{Hom}_{\overline{F}\text{代数}}(\overline{F}[M], \overline{F})$ 等同. 则乘法由下式给出

$$\overline{F}[M] \xrightarrow{\mu^*} \overline{F}[M] \otimes \overline{F}[M] \xrightarrow{x \otimes y} \overline{F} \otimes \overline{F} \xrightarrow{m} \overline{F},$$

其中 $m(a \otimes b) = ab$. 任一 $x \in M$ 决定 T 的一个特征标 $\chi_x : T \to \mathbb{G}_\mathrm{m}$, 其定义为 $\chi_x(t) = t(x)$. 反之, 设 $\chi : T \to \mathbb{G}_\mathrm{m}$ 是一个特征标. 定义 $\chi^* : \overline{F}[\mathbb{G}_\mathrm{m}] \to \overline{F}[T] = \overline{F}[M]$ 为 $\chi^*(\psi) = \psi \circ \chi$, 则 χ^* 是一个 $\overline{F}$ 代数同态, 因而诱导出群同态 $\mathbb{Z} = X(\mathbb{G}_\mathrm{m}) \to M$. 但 $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, M) \cong M$, 所以我们得到结论 $X(T) = M$. 因此 T 是环面. 由于 $\overline{F}[T] = F[M] \otimes_F \overline{F}$, 所以 T 是定义在 F 上的.

令 $\overline{G} = \mathrm{Gal}(F_s/F)$, $G' = \mathrm{Gal}(F_s/K)$, 则 $\overline{G}/G' = G$. 将 M 看作 $\overline{G}$ 模 (G' 作用平凡). 对于 $\sigma \in \overline{G}$, $x = \sum_{y \in M} x(y) y \in F_s[M]$ ($x(y) \in F_s$), 令 ${}^\sigma x = \sum {}^\sigma x(y)\, {}^\sigma y$. 对于 $t \in \mathrm{Hom}_{F_s\text{代数}}(F_s[M], F_s)$, 令 $({}^\sigma t)(x) = \sigma(t(\sigma^{-1}(x)))$. 显然对于 $x \in M$ 有 ${}^\sigma \chi_x = \chi_{{}^\sigma x}$. 于是 $X_K(T) = X(T)$, 即 T 在 F 上分裂. □

下面的定理是命题 2.2.2 和命题 2.2.4 的直接推论.

定理 2.2.5 设 K/F 是有限 Galois 扩张, $G = \mathrm{Gal}(K/F)$. 令 $\mathcal{T}$ 为定义在 F 上, 在 K 上分裂的环面的范畴, $\mathcal{M}$ 为有限生成无扭 G 模的范畴, $\mathcal{X}$ 为将环面 T 映为 $X(T)$ 并将同态 $\psi: T \to T'$ 映为 ${}^t\psi$ 的函子. 则 $\mathcal{X}$ 给出了范畴 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{M}$ 的等价.

命题 2.2.6 设 K/F 是有限可分扩张, T 是定义在 K 上的环面. 则存在定义在 F 上的环面 $\tilde{T}$ 和定义在 K 上的同态 $\rho: \tilde{T} \to T$ 使得

(1) 对于任意定义在 F 上的环面 T' 和定义在 K 上的同态 $\psi: T' \to T$, 存在定义在 F 上的同态 $\varphi: T' \to \tilde{T}$ 使得 $\psi = \rho\varphi$; 偶对 $\{\tilde{T}, \rho\}$ 在 F 同构下是唯一的. 进一步, 我们有同构

(2) $\tilde{T}(F) \cong T(K)$ 和

(3) $X_F(\tilde{T}) \cong X_K(T)$.

证明 我们应用定理 2.2.5 把本命题转化为特征标模的问题.

设 L/F 是有限 Galois 扩张, $L \supseteq K$, 使得 T 在 L 上分裂. 记 $G = \mathrm{Gal}(L/F)$, $H = \mathrm{Gal}(L/K)$. 令 $\tilde{M} = \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} X(T)$. 设 $\tilde{T}$ 为定义在 F 上的环面使得 $X(\tilde{T}) = \tilde{M}$ (见命题 2.2.3), 同态 $\rho: \tilde{T} \to T$ 由 ${}^t\rho(\chi) = 1 \otimes \chi$ 所定义. 则我们有同构

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_G(X(\tilde{T}), X(T')) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} X(T), X(T')) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(X(T), \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} X(T')) \\ &\cong \mathrm{Hom}_H(X(T), X(T')). \end{aligned}$$

因此映射

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_G(X(\tilde{T}), X(T')) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_H(X(T), X(T')) \\ {}^t\psi &\longmapsto {}^t\psi \circ {}^t\rho \end{aligned}$$

是满射. 这就证明了 (1). 应用同构

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_G(X(\tilde{T}), L^\times) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_H(X(T), L^\times) \\ f &\longmapsto f \circ {}^t\rho, \end{aligned}$$

由命题 2.2.2 (1) 我们得到本命题的 (2). 另一方面, 如果我们将 G 写成 H 的陪集的无交并: $G = \bigcup_{i=1}^n \xi_i H$, 则 $X(\tilde{T}) = \bigoplus_{i=1}^n \xi_i({}^t\rho(X(T)))$. 于是映射

$$\chi \longmapsto \sum_{i=1}^n {}^{\xi_i}({}^t\rho(\chi))$$

诱导出同构 $X(T)^H \cong X(\tilde{T})^G$, 即 (3) 得证. □

设 H 是群 G 的子群, $G=\bigcup_{i=1}^{n}\xi_i H$ 是陪集分解. 如果 M 是 H 模 (H 在 M 上的整表示), 则诱导模 $\mathrm{Ind}_H^G(M)$ 是 $\mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z}[G],M)$, 它的 G 模结构定义为 $(\sigma\psi)(r)=\psi(r\sigma)$, 其中 $\sigma\in G$, $\psi\in\mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z}[G],M)$, $r\in\mathbb{Z}[G]$ (注意: 如果 $\sigma\in H$, 则 $\sigma(\psi(r))=\psi(\sigma r)$).

引理 2.2.7 映射

$$I:\ \mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z}[G],M)\longrightarrow \mathbb{Z}[G]\otimes_{\mathbb{Z}[H]}M$$
$$\psi\longmapsto\sum_{i=1}^{n}\xi_i^{-1}\otimes\psi(\xi_i)$$

是同构, 其逆由下式给出:

$$I^{-1}(\sigma\otimes m)(\tau)=\begin{cases}\tau\sigma m, & \text{如果 } \tau\sigma\in H,\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$

命题 2.2.6 中给出的偶对 $(\tilde{T},\rho)$ (或简单地, $\tilde{T}$) 记为 $\mathrm{R}_{K/F}(T)$. 我们称 $\mathrm{R}_{K/F}(T)$ 是对 T 作**基域限制** (restricting ground field) (由 K 到 F) 所得到的. 显然有

$$X(\mathrm{R}_{K/F}(T))=\mathrm{Ind}_H^G X(T),$$

这里 T 在 Galois 扩张 L/F 上分裂, $G=\mathrm{Gal}(L/F)$, $H=\mathrm{Gal}(L/K)$.

2.3 同源

2.3.1 同源及其基本性质

设 T,T' 是两个环面. 由 T 到 T' 的**同源** (isogeny) 是指具有有限核的满同态 $\alpha:\ T\to T'$. 我们用 $\nu(\alpha)$ (相应地, $\nu_s(\alpha)$) 记 α 的次数 (相应地, $\nu(\alpha)$ 的可分部分). 设 f 和 f' 分别是 T 和 T' 到 $(\mathbb{G}_{\mathrm{m}})^d$ 的同构. 令

$$\varepsilon={}^t(f'\circ\alpha\circ f^{-1})={}^tf^{-1}\circ{}^t\sigma\circ{}^tf',\tag{2.2}$$

则 ε 是 $X((\mathbb{G}_{\mathrm{m}})^d)$ 的自同态, 因而是 $X(\mathbb{G}_{\mathrm{m}})^d_{\mathbb{Q}}$ 的线性变换. 用初等因子理论将 ε 对角化后立见 $\nu(\alpha)=|\det\varepsilon|=[\mathrm{Cok}\,{}^t\alpha]$, $\nu_s(\alpha)=e=|\mathrm{Ker}\,\alpha|$, 其中 e 被 $|\det\varepsilon|=p^m e$, $(p,e)=1$ 决定, p 是定义域的特征. 于是有

$$\alpha\text{ 可分 }\Leftrightarrow\ \nu(\alpha)\not\equiv 0 \mod p\ \Leftrightarrow\ |\mathrm{Ker}\,\alpha|=|\mathrm{Cok}\,{}^t\alpha|.$$

我们将用 δ_T (相应地, $\delta_{X(T)}$) 记 T (相应地, $X(T)$) 的恒同映射. 对于 $z\in\mathbb{Z}$, $z\delta_T$ 意为映射 $x\mapsto x^z$, $x\in T$. 下面的命题说明同源关系是对称的.

命题 2.3.1 设 T, T' 是定义在 F 上的两个环面, $\alpha: T \to T'$ 是 F 同源. 则存在 F 同源 $\beta: T' \to T$ 满足 $\beta \circ \alpha = \nu(\alpha)\delta_T$ 和 $\alpha \circ \beta = \nu(\alpha)\delta_{T'}$. 如果 α 是可分的, 则 β 也是可分的.

证明 设 K/F 为有限 Galois 扩张使得 T 和 T' 在其上都分裂. 则有 ${}^{\sigma}\alpha = \alpha$ $(\forall\, \sigma \in G = \mathrm{Gal}(K/F))$. 设 ε 为 (2.2) 式所定义的 $X((\mathbb{G}_{\mathrm{m}})^d)$ 的自同态. 令 $\eta = \nu(\alpha)\varepsilon^{-1}$, 则 η 也是 $X((\mathbb{G}_{\mathrm{m}})^d)$ 的自同态. ${}^t\beta = {}^tf' \circ \eta \circ {}^tf^{-1}$ 决定了环面的同态 $\beta: T' \to T$ (见命题 2.2.6 (1)). β 是定义在 K 上的. 等式 $\beta \circ \alpha = \nu(\alpha)\delta_T$ 和 $\alpha \circ \beta = \nu(\alpha)\delta_{T'}$ 显然成立. 于是

$${}^{\sigma}\beta \circ \alpha = {}^{\sigma}\beta \circ {}^{\sigma}\alpha = {}^{\sigma}(\beta \circ \alpha) = {}^{\sigma}(\nu(\alpha)\delta_T) = \nu(\alpha)\delta_T = \beta \circ \alpha.$$

由于 α 为满射, 所以上式意味着 ${}^{\sigma}\beta = \beta$ $(\forall\, \sigma \in G)$, 所以 β 是 F 同源. 由 $\nu(\beta)\nu(\alpha) = \nu(\beta \circ \alpha) = \nu(\nu(\alpha)\delta_T) = \nu(\alpha)^d$ 知本命题的最后一句话成立. □

在命题 2.3.1 的观念下, 如果 T' (相应地 T) F 同源于 T (相应地 T'), 我们经常写 $T \rightleftharpoons T'$ (在 F 上).

推论 2.3.2 设 F' 是 F 的扩域, 则 $X_{F'}(T)$ 与 $X_{F'}(T)$ 有相同的秩.

证明 由于 $\alpha: T \to T'$ 是满同态, 所以 ${}^t\alpha: X(T') \to X(T)$ 是单同态, 故有 $\mathrm{rank}\, X_{F'}(T') \leqslant \mathrm{rank}\, X_{F'}(T)$. 对于 β 作同样的考虑, 即有 $\mathrm{rank}\, X_{F'}(T') = \mathrm{rank}\, X_{F'}(T)$.

命题 2.3.3 设 T, T' 是定义在 F 上的两个环面, K/F 为有限 Galois 扩张使得 T 和 T' 在其上都分裂. 令 $G = \mathrm{Gal}(K/F)$. 则有

$$T \rightleftharpoons T' \text{ (在 } F \text{ 上)} \iff X(T)_{\mathbb{Q}} \cong X(T')_{\mathbb{Q}} \text{ (作为 } G \text{ 模)}.$$

证明 设 $f: T \xrightarrow{\sim} (\mathbb{G}_{\mathrm{m}})^d$ 是同构. 令 $g_\sigma = {}^{\sigma}f \circ f^{-1}$. 则 ${}^tg_\sigma$ 在 $X((\mathbb{G}_{\mathrm{m}})^d)$ 上的作用对应于 σ 在 $X(T)$ 上的作用. 令 f', g'_σ 为关于 T' 的相应于 T 的 f, g_σ.

设 $\alpha: T \to T'$ 为一个 F 同源. 由于 ${}^{\sigma}\alpha = \alpha$, 所以有

$${}^tg_\sigma \varepsilon = \varepsilon\, {}^tg'_\sigma. \tag{2.3}$$

于是由 (2.2) 式我们得到

$${}^t({}^{\sigma}f) \circ {}^t(f^{-1}) \circ {}^t\alpha = {}^t\alpha \circ {}^{\sigma}({}^tf') \circ ({}^tf')^{-1}. \tag{2.4}$$

即 ${}^t\alpha$ (视为线性变换 $X(T')_{\mathbb{Q}} \to X(T)_{\mathbb{Q}}$) 给出一个同构. 反之, 设有同构 $\gamma: X(T')_{\mathbb{Q}} \to X(T)_{\mathbb{Q}}$ 使得 ${}^t({}^{\sigma}f) \circ {}^t(f^{-1}) \circ \gamma = \gamma \circ {}^{\sigma}({}^tf') \circ ({}^tf')^{-1}$. 用适当的整数乘 γ, 我们得到 (2.4) 式, 其中 α 为某个同源. 而 (2.4) 式蕴含着 (2.3) 式. 这说明 ${}^{\sigma}\alpha = \alpha$. □

命题 2.3.4　设 $T, T', K/F, G$ 同上, $T \rightleftharpoons T'$ (在 F 上), 并且 $[K:F] \not\equiv 0 \bmod p$ (p 为 F 的特征). 则 T 和 T' 是可分 F 同源的.

证明　设 $\alpha: T \to T'$ 是 F 同源. 则有 (2.3) 式. 我们的目的是用另一个 ε^* 代替 (2.3) 式中的 ε, 这个 ε^* 要满足 $\det \varepsilon^* \not\equiv 0 \bmod p$. 我们将要把 ${}^t g_\sigma$ 和 ${}^t g'_\sigma$ 视为整数矩阵, 并且用 ${}^t g_\sigma^{(p)}$ 和 ${}^t g_\sigma'^{(p)}$ 记这两个矩阵 $\bmod p$ 的约化. 由 (2.3) 式知: 对于任意的 σ 有 ${}^t g_\sigma^{(p)}$ 和 ${}^t g_\sigma'^{(p)}$ 相同的特征根, 所以它们有相同的不可约部分 (参见 [62] 2. Lemma). 由假设有 $|G| \not\equiv 0 \bmod p$, 所以这两个模表示 $\mathbb{F}_p$ 等价. 但由于矩阵 ${}^t g_\sigma^{(p)}$ 和 ${}^t g_\sigma'^{(p)}$ 的系数都在 $\mathbb{F}_p$ 中, 所以此二矩阵 $\mathbb{F}_p$ 等价 (参见 [30], II §16). 换句话说, 存在整数矩阵 ε_1 (或 $X((\mathbb{G}_{\mathrm{m}})^d)$ 的自同态) 使得 $\det \varepsilon_1 \not\equiv 0 \bmod p$ 并且 $g_\sigma \varepsilon_1 \equiv \varepsilon_1 g'_\sigma \bmod p$. 为了证明本命题, 我们只要找到一个整数矩阵 η 使得

$$p({}^t g_\sigma \eta - \eta\, {}^t g'_\sigma) = {}^t g_\sigma \varepsilon_1 - \varepsilon_1\, {}^t g'_\sigma, \tag{2.5}$$

这因为 $\varepsilon^* = \varepsilon_1 - p\eta$ 将 (归纳地) 符合我们在证明开始所提出的目的的要求. 为了做到这一点, 用下式定义 ζ_σ:

$${}^t g_\sigma \varepsilon_1 - \varepsilon_1\, {}^t g'_\sigma = p\zeta_\sigma. \tag{2.6}$$

ζ_σ 满足

$${}^t g_\sigma \zeta_\tau - \zeta_{\sigma\tau} + \zeta_\sigma\, {}^t g'_\sigma = 0.$$

两端右乘 ${}^t g'_{\tau^{-1}}$ 并对 $\tau \in G$ 求和, 即得

$${}^t g_\sigma \mu - \mu\, {}^t g'_\sigma = |G|\zeta_\sigma, \quad \text{其中 } \mu = -\sum_{\tau \in G} \zeta_\tau\, {}^t g'_{\tau^{-1}}. \tag{2.7}$$

设 a, b 为使得 $a|G| + bp = 1$ 的整数. 令 $\eta = a\mu + b\varepsilon_1$, 则由 (2.6), (2.7) 式知 η 满足所要的关系:

$${}^t g_\sigma \eta - \eta\, {}^t g'_\sigma = \zeta_\sigma.$$

□

我们再作一个补充说明. 设 $\alpha: T \to T'$ 是 F 同源, K 为使得 T 和 T' 在其上都分裂的域. 对于 T, 令 $\tilde{T} = \mathrm{R}_{K/F} T$. 则有同构

$$\Theta:\ X_K(T) \cong X_F(\tilde{T}). \tag{2.8}$$

对于 T' 有相应的 $\tilde{T}'$ 和 Θ'. 令 $\tilde{\alpha} = \mathrm{R}_{K/F}(\alpha)$ (即 $\mathrm{R}_{K/F}$ 在 α 的图上作用的结果 (参见 [401] Chap. 1,1.3 节)), 则 $\tilde{\alpha}$ 是 F 同源, 并且有

$$\Theta \circ {}^t\alpha = {}^t\tilde{\alpha} \circ \Theta'. \tag{2.9}$$

其证明留给读者.

2.3.2　环面与乘法群概形

设 G 是有限群, H 是子群. 考虑 H 在 $\mathbb{C}$ 上的一个表示. 令 M 为表示模. 以 Γ 和 $\tilde{\Gamma}$ 分别记群代数 $\mathbb{C}[H]$ 和 $\mathbb{C}[G]$. 令 $\tilde{M} = M \otimes_\Gamma \tilde{\Gamma}$. 则 $\tilde{M}$ 是关于 G/H 的由 M 诱导的 G 的表示模. 对于 M 的特征标 χ, 以 χ^* 记的诱导特征标, 即

$$\chi^* = \frac{1}{|H|}\sum_{\rho \in G}\chi'(\rho\tau\rho^{-1}), \qquad \tau \in G, \tag{2.10}$$

其中 χ' 表示 χ 在 G 上的扩充, 它在 H 之外取值为 0. 我们称 M (或 χ) 为有理的, 如果 $\chi(\tau) \in \mathbb{Q}$ $(\forall\, \tau \in H)$. 例如设 $M = M_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} M$, M 是有限生成无扭 H 模, 则 M 是有理的. 如果 χ 是有理的, 则由 (2.10) 式知 χ^* 也是有理的.

设 χ_i $(1 \leqslant i \leqslant h)$ 是 G 的不可约特征标. 则 χ_i 的共轭的和是有理的. 我们将用 Ξ_i $(1 \leqslant i \leqslant h')$ 记用这种方式由不可约特征标得到的有理特征标. 以 X 记 G 的有理特征标生成的 $\mathbb{Z}$ 模, 则 Ξ_i 构成 X 的一组基.

令 H_ν $(1 \leqslant \nu \leqslant r)$ 为 G 的所有循环子群的共轭类的表示. 我们用 X_L 记由 $(X_1^{(\nu)})^*$ $(1 \leqslant \nu \leqslant r)$ 生成的 $\mathbb{Z}$ 模, 其中 $X_1^{(\nu)}$ 为 H_ν 的主特征标. 显然 $X_1 \subseteq X$. 但是已经知道 $[X : X_1]$ 是有限的 (参见 [31] Hilfsätze). 于是有 $h' = r$. 数量 $N(G) = [X : X_1]$ 仅依赖于 G.

现在设 T 是定义在 F 上的环面, T 在有限 Galois 扩张 K/F 上分裂, $G = \mathrm{Gal}(K/F)$. 设 χ 是 $X(T)_{\mathbb{C}}$ 的特征标 ($X(T)_{\mathbb{C}}$ 为 G 模 $X(T)$ 的纯量扩张). 由于 $\chi \in X$, 故 $N(G)\chi \in X_1$, 因此有

$$N(G)\chi + \sum_\lambda n_\lambda(\chi_1^{(\lambda)})^* = \sum_\mu n_\mu(\chi_1^{(\mu)})^*, \tag{2.11}$$

其中 n_λ 和 n_μ 是由 χ 唯一决定的非负整数. 令 d 为 $N(G), n_\lambda, n_\mu$ 的最大公因子, $N(G) = dm$, $n_\lambda = dm_\lambda$, $n_\mu = dm_\mu$, 则有

$$m\chi + \sum_\lambda m_\lambda(\chi_1^{(\lambda)})^* = \sum_\mu m_\mu(\chi_1^{(\mu)})^*, \tag{2.12}$$

其中 $(m, m_\lambda, m_\mu) = 1$. 令 F_ν 是对应于 H_ν 的域. 如果考虑 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ 在 F_ν 上分裂的情形, 则 $X(\mathbb{G}_{\mathrm{m}})$ 成为平凡 H_ν 模, $\chi_1^{(\nu)}$ 是 $X(\mathbb{G}_{\mathrm{m}})$ 的特征标. 因为 $X(\mathrm{R}_{F_\nu/F}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}))$ 是 $X(\mathbb{G}_{\mathrm{m}})$ 关于 G/H_ν 的诱导模, 由命题 2.2.6 (3) 即知

$$(m)X(T) + \sum_\lambda m_\lambda X(\mathrm{R}_{F_\lambda/F}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}))_{\mathbb{Q}} \cong \sum_\mu m_\mu X(\mathrm{R}_{F_\mu/F}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}))_{\mathbb{Q}}.$$

根据命题 2.3.3 就得到

$$T^m \times \prod_\lambda (\mathrm{R}_{F_\lambda/F}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}))^{m_\lambda} \rightleftharpoons \prod_\mu (\mathrm{R}_{F_\mu/F}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}))^{m_\mu} \qquad (\text{在 } F \text{ 上}).$$

综上所述, 再应用命题 2.3.4 于 $[K : F] \not\equiv 0 \bmod p$ 的情形, 就得到

定理 2.3.5 (Ono[280]) 设 T 是定义在 F 上的环面, T 在有限 Galois 扩张 K/F 上分裂, $G = \mathrm{Gal}(K/F)$. 令 F_ν 取遍所有使得 K/F_ν 循环的在 F 上的同构类的代表. 则存在唯一确定的整数 m, m_λ, m_μ 满足 $(m, m_\lambda, m_\mu) = 1$ 并且使得

$$T^m \times \prod_\lambda (\mathrm{R}_{F_\lambda/F}(\mathbb{G}_\mathrm{m}))^{m_\lambda} \rightleftharpoons \prod_\mu (\mathrm{R}_{F_\mu/F}(\mathbb{G}_\mathrm{m}))^{m_\mu} \quad (\text{在 } F \text{ 上}). \tag{2.13}$$

特别地, 如果基域的特征不整除 $[K : F]$, 则 (2.13) 式中的同源可以取为可分的.

注 如果 K 和 K' 都是使得 T 分裂的 F 上的 Galios 扩张, 则 $K \cap K'$ 也是. 因此我们可以取这样的最小的域. 此时可以认为 m, m_λ, m_μ 被 T 和 F 所确定.

2.4 例

我们将给出代数环面的一些例子. 其中最明显的应当是 $(\mathbb{G}_\mathrm{m})^d$.

例 2.4.1 设 L/K 是域的 n 次可分扩张. 我们定义一个代数群 $L^\times$ 如下: $(L^\times)(\overline{K})$ 为 $L \otimes_K \overline{K}$ 的单位群, 这里 $\overline{K}$ 为 K 的代数闭包. 取定 L/K 的一组基就得到相应的 $L \otimes_K \overline{K}$ 在 $\overline{K}$ 上的一组基. 在这组基下, 用 $L \otimes_K \overline{K}$ 的一个单位作乘法就得到 $\mathrm{GL}(n, \overline{K})$ 的一个元素. 这使得 $(L^\times)(\overline{K})$ 成为 $\mathrm{GL}(n, \overline{K})$ 的一个闭子群. 由于 $L \otimes_K \overline{K} \cong \underbrace{\overline{K} \oplus \cdots \oplus \overline{K}}_{n\text{ 个}}$ (这里我们应用了 L/K 的可分性), 所以 $(L^\times)(\overline{K}) \cong (\overline{K}^\times)^n$, 这说明 $L^\times$ 是一个代数环面. K 的任一包含 L 的 Galois 扩张都是 $L^\times$ 的分裂域. 用基域限制的语言来说, 显然有 $L^\times = \mathrm{R}_{L/K}(\mathbb{G}_\mathrm{m})$. $L^\times$ 的特征标模 $X(L^\times)$ 同构于由陪集 $\mathrm{Gal}(K_s/K)/\mathrm{Gal}(K_s/L)$ 生成的 $\mathrm{Gal}(K_s/K)$ 模.

例 2.4.2 设 L/K 如上. 定义代数群 G 满足要求:

$$G(\overline{K}) = \{x \text{ 是 } L \otimes_K \overline{K} \text{ 的单位, 且 } \mathrm{N}_x = 1\},$$

即 $G(\overline{K})$ 由 $(\overline{K}^\times)^n$ 中使得 $x_1 \cdots x_n = 1$ 的元素 $(x_1, \cdots, x_n)$ 组成. 所以 G 是代数环面, 它在 $\overline{K}$ 上同构于 $\mathbb{G}_\mathrm{m}^{n-1}$. (关于其他的例子, 见 [279].)

例 2.4.3 关于一个非退化的二次型 q 的 SO_2 是一个代数环面.

设 V 是相应的二次空间, e_1, e_2 是 V 的一组正交基. 则 V 的正交群由下述形状的矩阵组成:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ -c\lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ c\lambda_2 & -\lambda_1 \end{pmatrix},$$

其中 λ_1, $\lambda_2 \in K$ 且 $\lambda_1^2 + c\lambda_2^2 = 1$. 所以 V 的特殊正交群由上述第一种矩阵组成. 此群同构于 K 的二次扩张 $K[x]/(x^2+c)$ 中的范数为 1 的元素组成的群. 所以 SO_2 是代数环面.

例 2.4.4　如果 h 是 K 上的四元可除代数 C 上的一个斜 Hermite 型, 则特殊酉群 $SU_1(C/K, h)$ 是代数环面.

第三章　代数数域上的环面

本章将讨论数域上的环面的上同调. 最简单的环面是 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$, 它的 K 有理点是 $K^\times$. 所以我们从代数数域的上同调出发 (这种上同调早年受 Tate 的影响, 日后变为 Grothendieck 的 étale 上同调了), 如同 Tate 和 Ono 所作的那样, 将 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}(K) = K^\times$ 上的结果推广到环面上是自然的. 如果 K 上的环面 T 在 K 上是分裂的, 则 $T \cong \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$, 这时所谓 "推广" 就是由 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ 到它的直积的推广. 但是对于一般的环面还需要考虑 Galois 群的作用 (包括 Galois 上同调).

3.1　代　数　数

在本节我们回顾代数数轮中的某些事实. 详情见 [400], [3].

3.1.1　代数数与代数整数

一个代数数域是指有理数域的一个有限扩张 K, K 的元素称为代数数.

一个代数数 x 称为整的 (或代数整数), 如果 x 满足形如

$$x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m = 0, \qquad a_i \in \mathbb{Z}$$

的方程. 一个代数数域 K 中的全体代数整数组成一个环, 记为 O_K. O_K 是秩为 $n = [K:\mathbb{Q}]$ 的自由 $\mathbb{Z}$ 模. O_K 是一个整环, 其中每个理想可以唯一地分解为素理想的乘积.

3.1.2　赋值

K 的一个绝对值, 或**赋值** (valuation), 是满足下述三条性质的一个映射 $v: K \to \mathbb{R} \cup \{0\}$:

(1) $v(x) = 0$ 当且仅当 $x = 0$,

(2) $v(xy) = v(x)v(y)$,

(3) 存在一个常数 $C > 0$ 使得 $v(x+y) \leqslant C\max\{v(x), v(y)\}$, $\forall\, x, y \in K$.

我们称 v 为平凡赋值, 如果 $v(0) = 0$, $v(x) = 1$ $(\forall\, x \neq 0)$. 在 $C = 1$ 时, v 的赋值环为 $R_v = \{x \in K \mid v(x) \leqslant 1\}$.

如果 $\mathfrak{p}$ 是 O_K 的一个素理想, 则有如下的与 $\mathfrak{p}$ 相关的绝对值 $v_{\mathfrak{p}}$: 对于 $x \in K^\times$, 如果

$$xO_K = \mathfrak{p}^r \mathfrak{a}, \quad (\mathfrak{p}, \mathfrak{a}) = 1,$$

则定义

$$v_{\mathfrak{p}}(x) = (\mathrm{N}\mathfrak{p})^{-r},$$

其中 $\mathrm{N}\mathfrak{p} = |O_K/\mathfrak{p}|$. 这里的整数 r 常记为 $\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(x)$.

设 $x \mapsto x^{(i)}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 是 K 到 $\mathbb{C}$ 的全部嵌入, 其中前 r_1 个将 K 映入 $\mathbb{R}$, 后 r_2 对复共轭将 K 严格地映入 $\mathbb{C}$ (则 $r_1 + 2r_2 = n$), 对于 $j > r_1$, 第 j 个与第 $j + r_2$ 个互为复共轭. 对于 $x \in K$, 令 $v_{\infty, i} = |x^{(i)}|$ (如果 $1 \leqslant i \leqslant r_1$), $v_{\infty, i} = |x^{(i)}|^2$ (如果 $r_1 < i \leqslant r_1 + r_2$), 其中 $|\ |$ 表示 $\mathbb{C}$ 的通常的绝对值. 容易证明 $v_{\mathfrak{p}}$ 和 $v_{\infty, i}$ 都是 K 的赋值. 这些赋值 $v_{\mathfrak{p}}$ 和 $v_{\infty, i}$ 称为 K 的**正规化赋值** (normalized valuation).

设 v 是 K 的一个赋值. 相应于 v 有 K 上的一个度量, 即 $d(x, y) = v(x - y)$. 在此度量诱导的拓扑下 K 成为一个拓扑域. K 的两个赋值 v_1 和 v_2 称为等价的, 如果它们在 K 上诱导的拓扑相同. 代数数域 K 上的任一赋值都等价于上述的正规化赋值之一. 我们称 K 的赋值的一个等价类 (或一个正规化赋值) 为 K 的一个**素除子** (prime divisor).

弱逼近定理 (weak approximation theorem) *设 v_i $(1 \leqslant i \leqslant N)$ 是 K 的互不等价的非平凡赋值. 对于每个 i, 令 K_i 为由 K 的元素组成具有由 v_i 诱导的拓扑的拓扑空间. 则 K 在对角线映射下的像在 $\prod_{i=1}^{N} K_i$ 中稠密.*

3.1.3 赋值的完备化

K 关于赋值 v 的完备化是指一个有序对 $(\tilde{K}, \rho)$, 其中 $\tilde{K}$ 是一个度量空间, $\rho\colon K \to \tilde{K}$ 是一个等距映射, 满足下述两个条件:

(1) $\tilde{K}$ 是完备的度量空间 (即任意 Cauchy 序列都收敛),

(2) $\rho(K)$ 在 $\tilde{K}$ 中稠密.

两个完备化 $(\tilde{K}_1, \rho_1)$ 和 $(\tilde{K}_2, \rho_2)$ 称为等价的, 如果存在一个等距映射 $\eta\colon \tilde{K}_1 \to K_2$ 使得下面图交换:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}_1 & \xrightarrow{\ \eta\ } & \tilde{K}_2 \\ & {\scriptstyle\rho_1}\nwarrow \quad \nearrow{\scriptstyle\rho_2} & \\ & K & \end{array}$$

K 的完备化的一个等价类称为 K 的一个**位** (place). 由 K 的完备化 $(\tilde{K}, \rho)$ 所决定的位称为实的, 如果 $\tilde{K}$ 同构于 $\mathbb{R}$; 称为虚的, 如果 $\tilde{K}$ 同构于 $\mathbb{C}$. 这两种位都称作无限的或阿氏的 (Archimidean), 其余的位都称作有限的或非阿的. 可以证明位和素除子是互相对应的, 我们将不区分它们. 对于 K 的位 v, 我们用 $x \mapsto |x|_v$ 记相应的正规化赋值. 定义 K 上的距离函数为 $d(x, y) = |x - y|^{\alpha}$, 其中如果 v 为虚

的, 则 $\alpha = \frac{1}{2}$, 否则 $\alpha = 1$. K 关于这样的度量的完备化记为 K_v. 有理数域 $\mathbb{Q}$ 关于素数 p 所定义的赋值 v_p 的完备化记为 $\mathbb{Q}_p$.

对于 K 的有限位 v, 令

$$O_v = \{x \in K_v \mid |x|_v \leqslant 1\},$$

$$U_v = \{x \in K_v \mid |x|_v = 1\},$$

$$P_v = \{x \in K_v \mid |x|_v < 1\},$$

则 O_v 是 K_v 的唯一的极大紧子环, U_v 是 O_v 的可逆元素乘法群, P_v 是 O_v 的唯一的极大理想. 存在 $\pi_v \in P_v$, 使得 $P_v = \pi_v O_v$. 我们称这样的 π_v 为 K_v 的**单值化参数** (uniformizing parameter) 或**素元** (prime element). $k(v) = O_v/P_v$ 称为 K_v 的剩余域, 它是有限域, 其阶数称为 K_v 的模.

我们经常把代数数域称为整体域, 而把代数数域的完备化称为局部域.

3.1.4　分歧指数与剩余次数

设 F 是一个整体域, K 是 F 的有限代数扩张, w 是 K 的一个位. 令 ρ 为 K 到它在 w 处的完备化 K_w 的自然嵌入. 则 K_w 是 $\rho(F)$ 在 K_w 中的闭包的有限代数扩张. ρ 在 F 上诱导出到此闭包的一个嵌入, 此嵌入决定了 F 的一个位 v. 我们称 v 在 w 之下, 也称 w 在 v 之上, 记为 $w \mid v$. 在这种情形下我们经常把 F_v 与 F 在 K_v 中的闭包等同起来.

设 π (相应地, π') 为 F_v (相应地, K_w) 的素元, q (相应地, q') 为 F_v (相应地, K_w) 的模. 整数 $\mathrm{ord}_w(\pi)$ 称为扩张 K_w/F_v 的分歧阶或**分歧指数** (ramification index), 记为 $e(K_w/F_v)$. 满足 $q' = q^f$ 的整数 f 称为 K_w 在 F_v 上的模次数或**剩余类次数** (residue class degree), 记为 $f(K_w/F_v)$. 我们有 $[K_w : F_v] = e(K_w/F_v)f(K_w/F_v)$.

我们称 F 的一个素除子 v 在 n 次扩张 K/F 中完全分裂, 如果 K 中有 n 个在 v 之上的素除子. 此时有 $e(K_w/F_v) = f(K_w/F_v) = 1$ (w 为 K 的在 v 之上的任一素除子). 我们称 v 在 K/F 中不分解, 如果其中只有一个素除子 w 在 v 之上且 $e(K_w/F_v) = 1$. 此时有 $f(K_w/F_v) = n$. 我们称 K 的一个素除子 w 在 K/F 中分歧, 如果 $e(K_w/F_v) > 1$, 其中 v 是 F 的在 w 之下的素除子. 我们称 v 在 K/F 中分歧, 如果存在 K 的在 v 之上的素除子 w, 使得 w 在 K/F 中分歧.

3.1.5　分解群与惯性群

设 K 是 F 的有限 Galois 扩张. 记 $G = \mathrm{Gal}(K/F)$.

设 w 是 K 的一个素除子. 对于 $\sigma \in G$, 定义 $|a|_{\sigma w} = |\sigma^{-1}a|_w$ ($a \in K$). 则 σw 也是 K 的素除子. 若又有 $\tau \in G$, 则有 $\sigma(\tau w) = (\sigma\tau)w$. 设 R_w 为 w 的赋值

环, 则有 $\sigma R_w = R_{\sigma w}$. 用 σ 作用关于 w 的 Cauchy 序列得到关于 σw 的 Cauchy 序列; 反过来, 用 σ^{-1} 作用关于 σw 的 Cauchy 序列得到关于 w 的 Cauchy 序列. 于是, 根据连续性, 有同构 $\sigma_w: K_w \xrightarrow{\sim} K_{\sigma w}$. 如果 w 是在 F 的素除子 v 之上的, 则 σw 也在 v 之上. 此时同构 σ_w 是 F_v 同构. 显然有 $\sigma_{\tau w} \circ \tau_w = (\sigma\tau)_w$. 如果 w 和 w' 是在 F 的同一素除子 v 之上的, 则存在 $\sigma \in G$, 使得 $\sigma w = w'$.

w 的分解群 G_w 是如下定义的 G 的子群:

$$G_w = \{\sigma \in G | \sigma w = w\}.$$

注意

$$G_{\tau\sigma} = \{\sigma \in G | \sigma\tau w = \tau w\},$$

于是 w 的分解群在相差一个共轭的意义下被 v 所确定. 根据前面所述, 如果 $\sigma \in G_w$, 则 σ 是 K_w 的 F_v 自同构. 所以我们有由 G_w 到 $\mathrm{Gal}(K_w/F_v)$ 的单同态 i. 进一步, i 是同构.

令 $k(v)$ (相应地, $k(w)$) 为 F (相应地, K) 关于 v (相应地, w) 的剩余域. 则有满同态

$$G(K_w/F_v) \longrightarrow G(k(w)/k(v))$$

$$\sigma \longmapsto \overline{\sigma},$$

其中 $\overline{\sigma}$ 的定义为

$$\overline{\sigma}(x \mod P_w) = \sigma(x) \mod P_w.$$

以 $\mathfrak{p}_v$ (相应地, $\mathfrak{P}_w$) 记对应于 F (相应地, K) 的有限素除子 v (相应地, w) 的素理想. 由于 $R_w/\mathfrak{P}_w \cong k(w)$, $R_v/\mathfrak{p}_w \cong k(v)$, 所以上面的满同态导致正合序列

$$1 \longrightarrow I_w \longrightarrow G_w \xrightarrow{j} \mathrm{Gal}((R_w/\mathfrak{P}_w)/(R_v/\mathfrak{p}_w)) \longrightarrow 1,$$

其中

$$j\sigma(x \mod \mathfrak{P}_w) = \sigma(x) \mod \mathfrak{P}_w, \quad (\sigma \in G_w),$$

$$I_w = \{\sigma \in G_w \mid \sigma(x) \equiv x \mod \mathfrak{P}_w, \forall\, x \in R_w\}.$$

I_w 称为 w 的**惯性群** (inertia group), 它的阶为 $e(K_w/F_v)$.

设 w 是 K 的在 F 的素除子 v 之上非分歧的有限素除子 (事实上几乎所有的素除子都是非分歧的). 则

$$G \supset G_w \cong G(K_w/F_v) \cong G(k(w)/k(v)).$$

由于剩余类域是有限域, 所以 Galois 群 $G(k(w)/k(v))$ 是循环群, 生成元为

$$x \longmapsto x^{\mathrm{N}_v},$$

其中 $\mathrm{N}_v = |k(v)|$ 为绝对范数. 由此即知在 G_w 中有唯一的元素 σ_w 满足

$$a^{\sigma_w} \equiv a^{\mathrm{N}_v} \mod \mathfrak{P}_w, \quad \forall\, a \in R_w.$$

这个 σ_w 称为关于素除子 w 的 **Frobenius 自同构** (Frobenius automorphism). 由 σ_w 的定义立得

$$\sigma_{\tau w} = \tau^{-1}\sigma_w\tau.$$

所以在共轭的意义下 Frobenius 自同构被 v 唯一决定.

3.1.6 adele 环

设 K 是一个代数数域. 我们沿用前面的符号. 以 S_K 记 K 的所有素除子的集合, 以 S_∞ 记 K 的所有无限素除子的集合. 设 S 是 S_K 的包含 S_∞ 的有限子集. 对于这样的 S, 令

$$\mathbb{A}_K(S) = \prod_{v\in S} K_v \times \prod_{v\notin S} O_v,$$

并在 $\mathbb{A}_K(S)$ 上赋予乘积拓扑. $\mathbb{A}_K(S)$ 称为 K 的 S-**adele 环** (ring of S-adeles). K 的 **adele 环** (ring of adeles) $\mathbb{A}_K$ 定义为 $\mathbb{A}_K(S)$ 的直极限, 其中 S 取遍 S_K 的包含 S_∞ 的所有有限子集 (此有限子集集合上的序由包含关系所定义). $\mathbb{A}_K$ 是局部紧的. 事实上, 所有的 $\mathbb{A}_K(S)$ 的开集构成 $\mathbb{A}_K$ 的开集. 如果 L/K 是有限 Galois 扩张, 则 $\mathbb{A}_L$ 典范地 (同时是代数地和拓扑地) 同构于 $\mathbb{A}_K \otimes_K L$. 在这里我们通过对角线映射 $x \mapsto (x, x, \cdots)$ 把 K 嵌入到 $\mathbb{A}_K$ 中 (注意: 对于几乎所有的 $v \in S_K \setminus S_\infty$ 有 $|x|_v \leqslant 1$, 因此 $(x, x, \cdots) \in \mathbb{A}_K$). 这样的 $(x, x, \cdots)$ $(x \in K)$ 称为**主 adele** (principal adele). 在此意义下, K 在 $\mathbb{A}_K$ 中离散. $\mathbb{A}_K/K$ 在商拓扑下是紧的.

强逼近定理 (strong approximation theorem) 固定 K 的一个位 v_0. 令 $S'_K = S_K \setminus \{v_0\}$. 对于 S'_K 的任一包含 $S_\infty \setminus \{v_0\}$ 的有限子集 S', 定义

$$\mathbb{B}_K(S') = \prod_{v\in S'} K_v \times \prod_{v\in S'_K\setminus S'} O_v.$$

以 $\mathbb{B}$ 记 $\mathbb{B}_K(S')$ 的直极限 (直观地说, $\mathbb{B}$ 就是在 $\mathbb{A}_K$ 的直积因子中任意去掉一个). 则在对角线映射下 K 在 $\mathbb{B}$ 中的像在 $\mathbb{B}$ 中稠密.

3.1.7　idele 群

设 S 是 S_K 的包含 S_∞ 的有限子集. 令

$$J_K(S) = \prod_{v\in S} K_v^\times \times \prod_{v\notin S} U_v,$$

在 $J_K(S)$ 上赋予乘积拓扑. K 的 **idele 群** (group of ideles) J_K 定义为 $J_K(S)$ 的直极限, 其中 S 取遍 S_K 的包含 S_∞ 的所有有限子集. J_K 是 $\mathbb{A}_K$ 的可逆元素组成的乘法群, 所以 J_K 也记为 $\mathbb{A}_K^\times$ (但是 J_K 有更细的拓扑). $K^\times$ 在 J_K 中离散.

对于任一 $a = (a_v) \in J_K$, 我们记

$$|a| = |a|_{\mathbb{A}_K} = \prod_v |a_v|_v,$$

此式右端的乘积中 v 取遍的 K 所有的位. 映射 $|\ |: J_K \to \mathbb{R}_+^\times$ 是连续的, 并且在 $K^\times$ 上取常值 1 (即所谓 "乘积公式").

令 $J_K^1 = \{a \in J_K \mid |a| = 1\}$. 则 J_K^1 是紧的, 而且 J_K 是 J_K^1 和 $\mathbb{R}_+^\times$ 的直积.

3.1.8　Dirichlet 单位定理

设 S 是 S_K 的包含 S_∞ 的有限子集. K 的元素 x 称为一个 S 单位, 如果 $|x|_v = 1\ (\forall\, v \notin S)$.

如果 $S = S_\infty$, 则 S 单位就是 O_K 的单位. 以 $U_K(S)$ 记 K 的 S 单位群, 以 W_K 记 O_K 的有限阶单位组成的群. 显然 W_K 就是 K 中的单位根群, 并且 $W_K \subseteq U_K(S)\ (\forall\, S)$.

定理 3.1.1 (Dirichlet 单位定理)

(1)　W_K 是有限群.

(2)　$V_K(S) = U_K(S)/W_K$ 是秩为 $s-1$ 的自由 Abel 群 ($s = |S|$).

(3)　$U_K(S) = W_K \times V_K(S)$.

3.2　Galois 上同调

本节将着眼于 Galois 群的上同调. 我们先考虑类域论中有关上同调群的一些结果.

3.2.1　Galois 群的上同调

设 K/F 是域的 Galois 扩张, 其群为 $G = \mathrm{Gal}(K/F)$. 设 $\{K_i \mid i \in I\}$ 为含于 K 的 F 上的有限 Galois 扩张的全体. 令 $U_i = \mathrm{Gal}(K_i/F)$, 则 $G = \varprojlim G/U_i$ 是投射有限群.

G 在 K 的加法群上的作用使得 K 成为 G 模. 由于 $K^{U_i} = K_i$ 以及 $K = \bigcup K_i$, 所以 K 是离散 G 模. 进一步, K_i 是 $G(K_i/F)$ 模, 并且 $G(K_i/F) \cong G/U_i$. 于是有

$$H^n_{\mathrm{ct}}(G, K) \cong \varinjlim H^n(G(K_i/F), K_i), \tag{3.1}$$

其中 H^n_{ct} 表示连续上同调.

如果 K/F 是有限 Galois 扩张, 则由正规基定理知：K 作为 $F[G]$ 模是由一个元素生成的自由模. 所以它同时是 F 上的上诱导模和诱导模. 因此 Tate 上同调群 $\hat{H}^n(G(K/F), K) = 0$ $(\forall\, n \in \mathbb{Z})$. 由 (3.1) 式即知对于任意的 Galois 扩张 K/F, 都有

$$H^n(G(K/F), K) = 0, \qquad \forall\, n \geqslant 1.$$

3.2.2　Hilbert 定理 90

我们用域 K 的乘法群 $K^\times$ 代替上一小节中的加法群 K, 则 $(K^\times)^{U_i} = K_i^\times$, $K^\times = \bigcup K_i^\times$ 是离散 G 模. 我们有

$$H^n_{\mathrm{ct}}(G, K^\times) \cong \varinjlim H^n(G(K_i/F), K_i^\times). \tag{3.2}$$

但是其余的讨论有很大的差异.

命题 3.2.1 (Hilbert 定理 90) $H^1_{\mathrm{ct}}(G(K/F), K^\times) = 0$.

证明　根据 (3.2) 式我们只要对于 K/F 有限的情形证明本命题. 设 f 是 G 的取值在 $K^\times$ 中的 1 上闭链. 由 Dedekind 关于自同构无关性的定理知, 存在 $c \in K^\times$ 使得

$$b = \sum_{\sigma\in G} f(\sigma)\sigma(c) \neq 0.$$

用 $\tau \in G$ 作用此式, 得到

$$\begin{aligned}
\tau(b) &= \sum_{\sigma\in G} (\tau f(\sigma))(\tau\sigma(c)) \\
&= \sum_{\sigma\in G} f^{-1}(\tau) f(\tau\sigma)\cdot\tau\sigma(c) \quad (\text{因为 } f(\tau\sigma) = f(\tau)\tau f(\sigma)) \\
&= f^{-1}(\tau)\sum_{\nu\in G} f(\nu)\cdot\nu(c) \\
&= f^{-1}(\tau) b.
\end{aligned}$$

于是 $f(\tau)=b\cdot\tau(b)$, 即 f 是 1 上边缘. □

3.2.3　局部域的乘法群和单位群的 Galois 上同调群

在本小节我们设 F 为一个代数数域在一个有限位 v 处的完备化, $\overline{F}$ 为 F 的代数闭包. 我们把 O_v, U_v, P_v 分别记为 O_F, U_F, P_F. 局部类域论的一个重要结果是

定理 3.2.2　*存在同构, 即所谓 "不变量" 映射:*

$$\mathrm{inv}_F:\ H^2(G(\overline{F}/F),\overline{F}^\times)\longrightarrow\mathbb{Q}/\mathbb{Z}.\tag{3.3}$$

如果 K/F 是 $\overline{F}$ 中的 n 次扩张,

$$\mathrm{Res}_{F/K}:\ H^2(G(\overline{F}/F),\overline{F}^\times)\longrightarrow H^2(G(\overline{F}/K),\overline{F}^\times)$$

是限制同态, 则有

$$\mathrm{inv}_K\circ\mathrm{Res}_{F/K}=n\circ\mathrm{inv}_F\,.\tag{3.4}$$

证明　参见 [331] §1 Theorem 2, 3.

进一步, 有

定理 3.2.3　*如果 K/F 是 $\overline{F}$ 中的 n 次扩张, 则 $H^2(G(K/F),\overline{K}^\times)$ 是循环群, 其生成元 $u_{K/F}\in H^2(G(\overline{F}/F),\overline{F}^\times)$ 的不变量是 $\frac{1}{n}$.*

证明　参见 [331] §1 Theorem 3 Cor. 2.

设 K/F 是 n 次 Galois 扩张, $G=G(K/F)$. 又设 H 是 G 的 m 阶子群. 由 Hilbert 定理 90 我们有 $H^1(H,K^\times)=0$. 设 F' 为 H 的不动域, 则 $H=G(K/F')$. 于是 $H^2(H,K^\times)$ 是由 $u_{K/F}$ 生成的 m 阶循环群. 如果

$$\mathrm{Res}_{F/K}:\ H^2(G(\overline{F}/F),\overline{F}^\times)\longrightarrow H^2(G(\overline{F}/F^\times),\overline{F}^\times)$$

是限制同态, 则有

$$u_{K/F'}=\mathrm{Res}(u_{K/F}).\tag{3.5}$$

这个等式来自于不变量的计算:

$$\mathrm{inv}_{F'}(\mathrm{Res}\,u_{K/F})=[F':F]\,\mathrm{inv}(u_{K/F})=[F':F]\frac{1}{n}=\frac{1}{m}=\mathrm{inv}_{F'}(u_{K/F'}).$$

因此 G 模 $K^\times$ 是一个以 $u_{K/F}$ 为基本类的类模. 现在我们可以应用 Tate-Nakayama 定理 (见 1.3.2 节), 从而得到

定理 3.2.4　对于所有的整数 $n \in \mathbb{Z}$, 由上积给出的映射 $\alpha \mapsto \alpha \cup u_{K/F}$ 是由 $\hat{H}^n(G,\mathbb{Z})$ 到 $\hat{H}^{n+2}(G,K^\times)$ 的同构. 进一步, 我们有交换图

$$
\begin{array}{ccc}
\hat{H}^n(G,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cup u_{K/F}} & \hat{H}^{n+2}(G,K^\times) \\
\Big\downarrow \text{Res} & & \Big\downarrow \text{Res} \\
\hat{H}^n(H,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cup u_{K/F'}} & \hat{H}^{n+2}(H,K^\times)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
\hat{H}^n(G,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cup u_{K/F}} & \hat{H}^{n+2}(G,K^\times) \\
\Big\uparrow \text{Cor} & & \Big\uparrow \text{Cor} \\
\hat{H}^n(H,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cup u_{K/F'}} & \hat{H}^{n+2}(H,K^\times)
\end{array} \tag{3.6}
$$

下面我们叙述一个关于单位群的上同调的结果.

命题 3.2.5　设 K/F 是群为 G 的有限 Galois 扩张. 则

(1)　存在 U_K 的开子群 V 使得 $\hat{H}^n(G,V)=0$ $(\forall\, n \in \mathbb{Z})$.

(2)　如果非分歧, 则 $\hat{H}^n(G,U_K)=0$ $(\forall\, n \in \mathbb{Z})$.

证明　请参看 [331] §1 Prop. 1, 3.

最后我们用上同调做一些计算.

命题 3.2.6　设 F 是非阿局部域, K/F 是非分歧 Galois 扩张, $G=G(K/F)$. 如果 A 是有限生成 $\mathbb{Z}$ 自由模同时又是 G 模, 则范数映射 $\mathrm{N}=\mathrm{N}_G$ 诱导出满同态

$$\mathrm{N}:\ \mathrm{Hom}(A,U_K) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(A,U_K).$$

证明　对于 $n \geqslant 1$, 令 $U_K^n=\{x \in U_K | x \cong 1 \bmod P_K^n\}$. 这些群都是 G 不变的. 所以我们只要验证

$$\mathrm{N}:\ \mathrm{Hom}(A,U_K/U_K^1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(A,U_K/U_K^1),$$

$$\mathrm{N}:\ \mathrm{Hom}(A,U_K^n/U_K^{n+1}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(A,U_K^n/U_K^{n+1})$$

都是满同态.

令 $k_K=O_K/P_K$ 为 O_K 的剩余域. U_K^n/U_K^{n+1} 作为 G 模与 k_K 同构. 于是我们考虑

$$\mathrm{N}:\ \mathrm{Hom}(A,k_K) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(A,k_K).$$

设 $k_F=O_F/P_F$, 则 k_K 作为 G 模同构于 $\mathbb{Z}[G]\otimes k_F$. 而 $\mathrm{Hom}(A,\mathbb{Z}[G]\otimes k_F)$ 同构于 $\mathbb{Z}[G]\otimes \mathrm{Hom}(A,k_F)$, 所以

$$\hat{H}^0(G,\mathbb{Z}[G]\otimes \mathrm{Hom}(A,k_F))=0,$$

即 N 是满同态.

U_K/U_K^1 作为 G 模与乘法群 $k_K^\times$ 同构. 所以我们考虑

$$\mathrm{N}:\ \mathrm{Hom}(A, k_K^\times) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(A, k_K^\times).$$

此映射的满性等价于 $\hat{H}^0(G, \mathrm{Hom}(A, k_F^\times)) = 0$. 由于 G 是循环群且 $\mathrm{Hom}(A, k_K^\times)$ 有限, 故所有的 $\hat{H}^p(G, \mathrm{Hom}(A, k_F^\times))$ 有相同的阶. 我们将证明

$$\hat{H}^1(G, \mathrm{Hom}(A, k_F^\times)) = H^1(G, \mathrm{Hom}(A, k_F^\times))$$

是 0. 令 $\overline{k}_K$ 为 k_K 的代数闭包, $\mathscr{F}$ 是 Frobenius 自同构 $\sigma_o:\ x \mapsto x^{|k_K|}$ 生成的 $\mathrm{Gal}(\overline{k}_K/k_K)$ 的子群. 则序列

$$0 \longrightarrow H^1(G, \mathrm{Hom}(A, k_F^\times)) \longrightarrow H^1(\mathscr{F}, \mathrm{Hom}(A, \overline{k}_F^\times))$$

正合. 我们只要证明此序列中右端的群为 0. $\mathscr{F}$ 上的 1 上闭链 f 由 $f(\sigma_0)$ 所决定. 为证明 f 是上边缘, 只要证明存在 $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, k_F^\times)$ 使得 $f(\sigma_0) = \sigma_0\varphi - \varphi$. 设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的一组基. 令

$$\sigma_0^{-1}\lambda_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\lambda_j.$$

矩阵 (a_{ij}) 是整数矩阵, 因而它的特征值都是代数整数. 于是, 如果 k_K 的元素个数为 q, 则 矩阵 $(qa_{ij} - \delta_{ij})$ 非奇异 (这里 δ_{ij} 为 Kronecker 符号). 我们可以将此非奇异阵写成乘积 $(b_{ij})(m_i\delta_{ij})(c_{ij})$, 其中 (b_{ij}) 和 (c_{ij}) 都是整数可逆矩阵, 并且其逆矩阵 (b'_{ij}) 和 (c'_{ij}) 也都是整数矩阵, $m_1, \cdots, m_n$ 都是非零整数. 令 $f(\sigma_0) = \psi$, 并且令 $\psi(\lambda_i) = \alpha_i$. 如果 $\varphi(\lambda_i) = \beta_i$, 则

$$(\sigma_0\varphi)(\lambda_i) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_0(\varphi(\sigma_0^{-1}\lambda_i)) = \prod_{j=1}^{n} \beta_j^{qa_{ji}}.$$

于是方程 $\psi = \sigma_0\varphi - \varphi$ 等价于以下 n 个方程

$$\alpha = \prod_{j=1}^{n} \beta_j^{qa_{ji} - \delta_{ji}}.$$

记 $\gamma_i = \prod_{h=1}^{n} \alpha_h^{c'_{hi}}$, $\delta_j = \prod_{h=1}^{n} \beta_h^{b'_{hj}}$, 则上述 n 个方程等价于

$$\gamma_i = \delta_i^{m_i}.$$

由此方程可以解出 $\delta_1, \cdots, \delta_n$. 令

$$\beta_j = \prod_{h=1}^{n} \delta_h^{b'_{hj}},$$

我们就得到了原来方程的解. □

3.2.4　半局部理论和整体不变量

设 K/F 是域的 Galois 扩张, 其 Galois 群为 $G = G(K/F)$. 我们将考察 G 在 J_K 的卡氏积结构上的作用. 设 $x \in J_K$, 则 $x = (x_w)$, 其中 w 取遍 S_K 中的位. G 的元素 σ 诱导出 $\sigma_w: K_w \to K_{\sigma w}$ 使得 $(\sigma x)_{\sigma w} = \sigma_w x_w$, 即有下面的交换图:

$$\begin{array}{ccc} K_w^\times & \xrightarrow{\sigma_w} & K_{\sigma w}^\times \\ \downarrow{\scriptstyle i_w} & & \downarrow{\scriptstyle i_{\sigma w}} \\ J_K & \xrightarrow{\sigma} & J_K \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} K_w^\times & \xrightarrow{\sigma_w} & K_{\sigma w}^\times \\ \uparrow{\scriptstyle j_w} & & \uparrow{\scriptstyle j_{\sigma w}} \\ J_K & \xrightarrow{\sigma} & J_K \end{array}$$

这里 i_w 将 $x \in K_w$ 映为 J_K 中 w 分量为 x 而其他分量为 1 的元素, j_w 是到 w 分量的投影.

下面的命题是 Shapiro 引理的直接推论:

命题 3.2.7(半局部理论)　*设 $v \in S_F$, $w \in S_K$, w 在 v 上. 则存在自然的逆同构*

$$H^n(G, \prod_{w|v} K_w^\times) \underset{j_{w_0}\circ \mathrm{Res}}{\overset{\mathrm{Cor}\circ i_{w_0}}{\rightleftarrows}} H^n(G_{w_0}, K_{w_0}^\times) \tag{3.7}$$

以及

$$H^n(G, \prod_{w|v} U_w) \underset{j_{w_0}\circ \mathrm{Res}}{\overset{\mathrm{Cor}\circ i_{w_0}}{\rightleftarrows}} H^n(G_{w_0}, U_{w_0}),$$

其中 U_w 是 K_w 中的单位群.

这样对于在 v 之上的所有的 w, 上同调群 $H^n(G_w, K_w^\times)$ 都典范同构. 由于 v 上不同的 w 所对应的 K_w 都同构, 所以为方便起见, 我们用 K^v 记任一 K_w (w 在 v 之上). 我们也用 $G^v = G(K^v/F_v)$ 记局部 Galois 群, 用 $H^n(G^v, (K^v)^\times)$ 记任一上同调群 $H^n(G_w, K_w^\times)$.

命题 3.2.8　*$\hat{H}(G, J_K)$ 同构于直和 $\coprod_{v\in S_F} \hat{H}^n(G^v, (K^v)^\times)$.*

证明　易见 $J_K = \varinjlim J_K(S)$, 其中

$$J_K(S) = \prod_{v\in S}(\prod_{w|v} K_w^\times) \times \prod_{v\notin S}(\prod_{w|v} U_w),$$

S 取遍 S_F 的包含 (在中 K/F) 分歧的位和阿氏位的有限子集. 由于有限群的上同调与直极限可交换, 任意上同调与乘积可交换, 所以我们只要考察各个部分的上同调就足够了. 由命题 3.2.5 知: 如果 S 包含所有分歧的位, 则 $\prod_{v\notin S}(\prod_{w|v} U_w)$ 有平凡的上同调. 所以我们得到

$$\hat{H}^n(G, J_K(S)) \cong \prod_{v\in S} \hat{H}^n(G^v, (K^v)^\times).$$

令 $S \to S_F$, 即有

$$\hat{H}(G, J_K) \cong \coprod_{v \in S_F} \hat{H}^n(G^v, (K^v)^\times). \qquad \square$$

推论 3.2.9 (1) $H^1(G, J_K) = 0$.

(2) $H^2(G, J_K) \cong \coprod_{v \in S_F} (\frac{1}{n_v}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})$, 其中 $n_v = [K^v : F_v]$.

证明 (1) 应用 Hilbert 定理 90.

(2) 应用定理 3.2.3. $\square$

对于任一 $v \in S_K$, 我们用 inv_v 记 $\mathrm{inv}_K v$. 对于 $\alpha \in H^2(G, J_K)$, 用 $\mathrm{inv}_v(\alpha)$ 记 $\mathrm{inv}_v(j^v(\alpha))$, 其中 j^v 是由 $H^2(G, J_K)$ 到 $H^2(G^v, (K^v)^\times)$ 上的投射. 由命题 3.2.5 知: 除了有限多个 v 之外, 都有 $\mathrm{inv}_v(\alpha) = 0$. 所以我们可以定义映射 ("不变量"):

$$\mathrm{inv} = \sum_{v \in S_F} \mathrm{inv}_v : \ H^2(G, J_K) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

3.2.5 idele 类群的 Galois 上同调

我们定义 K 的 idele 类群 C_K 为 $J_K/K^\times$, 对于任意 $S \subseteq S_K$, 定义 K 的 S-idele 类群为 $J_K(S)/U_K(S)$. 对于任意 Galois 扩张 K/F (其 Galois 群为 G), 由正合序列

$$1 \longrightarrow K^\times \longrightarrow J_K \longrightarrow C_K \longrightarrow 1, \tag{3.8}$$

可得到正合序列

$$\cdots \longrightarrow H^1(G, C_K) \longrightarrow H^2(G, K^\times) \xrightarrow{\gamma} H^2(G, J_K) \xrightarrow{\varepsilon} H^2(G, C_K) \longrightarrow \cdots. \tag{3.9}$$

可以证明存在交换图:

$$\begin{array}{ccc} H^2(G, J_K) & \xrightarrow{\varepsilon} & H^2(G, C_K) \\ & \searrow^{inv} & \downarrow \beta \\ & & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{array}$$

(参见 [378] §11.2). 对于 $u \in H^2(G, C_K)$, 我们将用 $\mathrm{inv}(u)$ 记 $\beta(u)$. 整体类域论的一个重要定理是

定理 3.2.10 设 K/F 是 n 次 Galois 扩张, $G = G(K/F)$. 则

(1) $H^1(G, C_K) = 0$.

(2) $H^2(G, C_K)$ 是 n 阶循环群, 并且它有典范生成元 $u_{K/F}$ 使得

$$\mathrm{inv}(u_{K/F}) = \frac{1}{n}.$$

请参见 [378] 9.1 节, 11.2 节.

我们再叙述两个结果.

定理 3.2.10 和 Tate-Nakayama 定理的一个直接推论是

定理 3.2.11 用基本类 $u_{K/F}$ 作上积给出同构

$$\hat{H}^n(G(K/F),\mathbb{Z}) \cong \hat{H}^{n+2}(G(K/F),C_K), \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}.$$

这样的同构使得: 对于域扩张 $K \supset F' \supset F$ (K/F Galois, $G = G(K/F)$, $G' = G(K/F')$), 下面图交换:

$$\begin{array}{ccc} \hat{H}^n(G,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\sim} & \hat{H}^{n+2}(G,C_K) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}} \\ \hat{H}^n(G',\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\sim} & \hat{H}^{n+2}(G',C_K) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \hat{H}^n(G,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\sim} & \hat{H}^{n+2}(G,C_K) \\ \uparrow{\scriptstyle \mathrm{Cor}} & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{Cor}} \\ \hat{H}^n(G',\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\sim} & \hat{H}^{n+2}(G',C_K) \end{array} \tag{3.10}$$

命题 3.2.12 (1) (3.9) 式中的 γ 是单射, 并且有正合序列

$$0 \longrightarrow H^2(G,K^\times) \longrightarrow \coprod_{v\in S_F} H^2(G^v,(K^v)^\times).$$

(2) 如果 $\alpha \in H^2(G,K^\times)$, 则 $\mathrm{inv}(\alpha) = 0$.

证明 由 $H^1(G,C_K) = 0$ 我们得到 (1). 关于 (2) 请见 [370]. □

3.2.6 Tate 定理

设 F 为代数数域. 固定一个有限 Galois 扩张 K/F. 令 $G = \mathrm{Gal}(K/F)$. 设 S 是 K 的位的有限集合, 满足以下四条性质:

(S1) S 在 G 下稳定,

(S2) S 包含所有的阿氏位,

(S3) 包含所有在 F 上分歧的位,

(S4) S 足够大, 使得 K 的任一理想类含有一个理想, 其支集含于 S.

设 Y 为 S 由生成的自由 Abel 群. 则我们有同态

$$b: Y \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$\sum n_w w \longmapsto \sum n_w.$$

令 $X = \mathrm{Ker}\, b$. 定义 G 在 Y 上的作用为

$$\sigma(\sum n_w w) = \sum n_{(\sigma^{-1}w)} w, \qquad \sigma \in G.$$

则有 G 模的正合序列

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{b'} Y \xrightarrow{b} \mathbb{Z} \longrightarrow 0. \tag{3.11}$$

令 $S' = S_K \setminus S$. 用 U, J, C 分别记 $U_K(S')$, $J_K(S')$, $C_K(S')$. 则有另一个正合序列

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{a'} J \xrightarrow{a} C \longrightarrow 0. \tag{3.12}$$

我们的目标是证明 **Tate 定理** (Tate's theorem). 此定理说: 通过 2 维数移动, 序列 (3.12) 诱导出的上同调序列同构于比较简单的序列 (3.11) 所导出的上同调序列. 确切地说, 我们有

定理 3.2.13 *存在上同调类*

$$\alpha_3 \in \hat{H}^2(G, \mathrm{Hom}(X, U)), \quad \alpha_2 \in \hat{H}^2(G, \mathrm{Hom}(Y, J)), \quad \alpha_1 \in \hat{H}^2(G, \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, C)) \tag{3.13}$$

使得下面的图交换:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & \hat{H}^n(G,X) & \longrightarrow & \hat{H}^n(G,Y) & \longrightarrow & \hat{H}^n(G,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \hat{H}^{n+1}(G,X) & \longrightarrow \cdots \\
& \downarrow{\scriptstyle \alpha_3^n} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_2^n} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_1^n} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_3^{n+1}} & \\
\cdots \longrightarrow & \hat{H}^{n+2}(G,U) & \longrightarrow & \hat{H}^{n+2}(G,J) & \longrightarrow & \hat{H}^{n+2}(G,C) & \longrightarrow & \hat{H}^{n+3}(G,U) & \longrightarrow \cdots
\end{array} \tag{3.14}$$

其中竖直箭头 α_i^n ($i = 1, 2, 3$, $n \in \mathbb{Z}$) 是用 α_i 作上积得到的同构.

证明 此定理的证明要分为几步.

第一步. 构造 α_1.

我们令 α_1 为 $\hat{H}^2(G, C)$ 中的基本类 α 在典范同构 $C \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, C)$ 下的像. 我们知道对于所有的 $n \in \mathbb{Z}$, 用 α_1 作上积得到的映射 α_1^n : $\hat{H}^n(G, \mathbb{Z}) \to \hat{H}^{n+2}(G, C)$ 都是同构.

第二步. 构造 α_2.

以 S_* 记 F 的在 S 之下的位的集合. 定义映射 h : $S_* \to S$: $h(v) = w$, 其中 $w \mid v$. 对于 S 中的 w 以及任一 G 模, 令

$$\begin{aligned} j_w : \mathrm{Hom}(Y, M) &\longrightarrow M \\ f &\longmapsto f(w), \end{aligned}$$

则为 G_w 同态 (G_w 是 w 的分解群).

引理 3.2.14　*对于任意 G 模 M, 存在典范同构*

$$\hat{H}^n(G, \mathrm{Hom}(Y, M)) \xrightarrow{\sim} \prod_{v \in S_*} \hat{H}^n(G_{h(v)}, M),$$

左端的元素 θ 在此同构下的像的 $v(\in S_*)$ 分量为 $j_{h(v)} \circ \mathrm{Res}\,\theta$.

证明　注意: 对于给定的 F 的位 v, K 的位于 v 之上的所有的位在 G 作用下构成一个轨道. 于是 $Y_v = \sum_{w|v} \mathbb{Z}w$ 是 G 模. 因为 Y 是 Y_v $(v \in S_*)$ 的直和, 所以

$$\mathrm{Hom}(Y, M) \cong \prod_{v \in S_*} \mathrm{Hom}(Y_v, M).$$

由于上同调与直积可交换, 我们得到

$$\hat{H}^n(G, \mathrm{Hom}(Y, M)) \cong \prod_{v \in S_*} \hat{H}^n(G, \mathrm{Hom}(Y_v, M)).$$

考虑映射

$$\mathrm{Hom}(Y_v, M) \underset{i}{\overset{j}{\rightleftarrows}} M,$$

其中 $j(f) = f(h(v))$, $(i(x))\sum n_w w = n_{h(v)}x$ $(x \in M)$. 根据上面我们所说的注意, 有

$$\mathrm{Hom}(Y_v, M) = \sum_{\tau \in G/G_{h(v)}} \tau(i(M)).$$

由 Shapiro 引理即知本引理为真. 引理 3.2.14 证毕.

对于 K 的任一位 w, 令 α_w 为 $\hat{H}^2(G_w, K_w^\times)$ 中的局部基本类. 对于 $w \in S$, 令

$$i_w : K_w^\times \longrightarrow J$$

为典范嵌入, 它将 K_w 的非零元素 x 映为 w 分量为 x 其余分量为 1 的 idele. 此嵌入显然是 G_w 同态.

在引理 3.2.14 中取 M 为 J. 定义 α_2 为 $\hat{H}^2(G\,\mathrm{Hom}(Y, J))$ 中满足下述条件的唯一的元素: 对于任意 $v \in S_*$, 都有 $\hat{H}^2(G_{h(v)}, J)$ 中的等式:

$$j_{h(v)}(\mathrm{Res}\,\alpha_2) = i_{h(v)}\alpha_{h(v)}. \tag{3.15}$$

第三步. 与 α_2 的定义无关. 此事实由下面的引理保证:

引理 3.2.15　*对于任一 $w \in S$, 在 $\hat{H}^2(G_w, J)$ 中有*

$$j_w(\mathrm{Res}\,\alpha_2) = i_w\alpha_w. \tag{3.16}$$

证明 设 $\tau \in G$ 使得 $w = \tau h(v)$. 则 $G_w = \tau G_{h(v)}\tau^{-1}$. 令自同构 τ 作用在上面的第 2 步的整个过程. 令 $\tau_*\alpha_2$ 为在自同构

$$\begin{aligned}(G, J) &\longrightarrow (G, J)\\ (\sigma, x) &\longmapsto (\tau\sigma\tau^{-1}, \tau^{-1}x)\end{aligned}$$

下的结构改变所给出的 α_2 的像. 类似地, 令 $\tau_*\alpha_w$ 为在自同构

$$\begin{aligned}(G_{h(v)}, K^\times) &\longrightarrow (G_{h(v)}, K^\times)\\ (\sigma, x) &\longmapsto (\tau\sigma\tau^{-1}, \tau^{-1}x)\end{aligned}$$

下的结构改变所给出的 $\alpha_{h(v)}$ 的像. 则相应于 (3.15) 式有

$$j_w \operatorname{Res}(\tau_*\alpha_2) = i_w(\tau_*\alpha_{h(v)}).$$

但是我们知道 $\tau_*\alpha_2 = \alpha_2$ (见 1.1.5 节), 并且 $\tau_*\alpha_{h(v)} = \alpha_w$ (因为局部基本类是典范的, 见定理 3.2.3). 引理 3.2.15 证毕.

第四步. α_2^n 是同构.

对于 $w \in S$, 令 i'_w : $\mathbb{Z} \to Y$ 为由 $i'_w(n) = nw$ 所给出的 G 模单同态. 考虑图:

$$\begin{array}{ccc}\coprod_{v\in S_*} \hat{H}^n(G_{h(v)}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{i'} & \hat{H}^n(G, Y)\\ \Big\downarrow \coprod \alpha^n_{h(v)} & & \Big\downarrow \alpha_2^n\\ \coprod_{v\in S_*} \hat{H}^{n+2}(G_{h(v)}, K^\times_{h(v)}) & \xrightarrow{i} & \hat{H}^{n+2}(G, J)\end{array} \tag{3.17}$$

其中左边的竖直箭头是同构, 这是因为对于 K 的每个位 w, 用 α_w 作上积给出同构 α_w^n : $\hat{H}^n(G_w, \mathbb{Z}) \cong \hat{H}^{n+2}(G_w, K_w^\times)$. 底下的水平箭头 i 由映射:

$$\hat{H}^n(G_w, K_w^\times) \xrightarrow{\operatorname{Cor} \circ i_w} \hat{H}^n(G, J)$$

所诱导, 其中 $w = h(v)$, 因而是同构. 上面的水平箭头 i' 由映射:

$$\hat{H}^n(G_w, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\operatorname{Cor} \circ i'_w} \hat{H}^n(G, Y)$$

所诱导, 其中 $w = h(v)$. $Y = \sum Y_v$ 意味着 $\hat{H}^n(G, Y) = \coprod \hat{H}^n(G, Y_v)$. 显然 $Y_v = \sum_{\tau\in D/G_w} \tau(i'_w(\mathbb{Z}))$. 所以由 Shapiro 引理, 有 $\hat{H}^n(G, Y_v) = \hat{H}^n(G_w, \mathbb{Z})$.

现在, 为了证明 α_2^n 是同构, 只要证明图 (3.17) 交换. 为此只要证明: 对于任一 $w = h(v)$ 以及任一 $\xi \in \hat{H}^n(G_w, \mathbb{Z}$, 都有

$$\alpha_2 \cup (\operatorname{Cor}(i'_w(\xi))) = \operatorname{Cor}(i_w(\alpha_w \cup \xi)).$$

由上积的性质易见此式左端等于 $\mathrm{Cor}(\mathrm{Res}(\alpha_2 \cup i'_w(\xi)))$. 取 j_w 的一个截面 s. 由上积的函子性质得到交换图:

$$\begin{array}{ccc} \hat{H}^2(G_w, J) \otimes \hat{H}^n(G_w, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \hat{H}^{n+2}(G_w, J) \\ \downarrow{\scriptstyle s\otimes i'_w} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ \hat{H}^2(G_w, \mathrm{Hom}(Y, J)) \otimes \hat{H}^n(G_w, Y) & \longrightarrow & \hat{H}^{n+2}(G_w, J) \end{array}$$

所以 $\alpha_2 \cup i'_w(\xi) = j_w(\mathrm{Res}(\alpha_2)) \cup \xi$, 它等于 $i_w(\alpha_w) \cup \xi$. 再由上积的函子性质有交换图:

$$\begin{array}{ccc} \hat{H}^2(G_w, K_w^\times) \otimes \hat{H}^n(G_w, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \hat{H}^{n+2}(G_w, K_w^\times) \\ \downarrow{\scriptstyle i_w\otimes \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle i_w} \\ \hat{H}^2(G_w, J) \otimes \hat{H}^n(G_w, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \hat{H}^{n+2}(G_w, J) \end{array}$$

我们得到 $i_w(\alpha_w) \cup \xi = i_w(\alpha_w \cup \xi)$.

对于群的行正合交换图:

$$\begin{array}{ccccccccccc} (\mathrm{I}) & & 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{h'} & Y & \xrightarrow{h} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle f_3} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \\ (\mathrm{II}) & & 0 & \longrightarrow & U & \xrightarrow{g'} & J & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

我们 $\mathrm{Hom}((\mathrm{I}), (\mathrm{II}))$ 以记群同态的三元组 $f = (f_1, f_2, f_3)$. 定义同态:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}((\mathrm{I}), (\mathrm{II})) & \xrightarrow{u_1} & \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, C) \\ \downarrow{\scriptstyle u_2} & & \downarrow{\scriptstyle (b,1)} \\ \mathrm{Hom}(Y, J) & \xrightarrow{(1,a)} & \mathrm{Hom}(Y, C) \end{array}$$

为 $u_i(f) = f_i \ (i = 1, 2, 3)$ 以及 $(w, v)(f) = v \circ f \circ w$. 由于 Y 是 $\mathbb{Z}$ 自由的, 所以 $(1, a)$ 为满射.

第五步. 存在唯一的 $\tilde{\alpha} \in \hat{H}^2(G, \mathrm{Hom}((\mathrm{I}), (\mathrm{II})))$ 使得 $u_1(\tilde{\alpha}) = \alpha_1$ 且 $u_2(\tilde{\alpha}) = \alpha_2$.

由于序列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}((\mathrm{I}), (\mathrm{II})) &\xrightarrow{(u_1, u_2)} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, C) \times \mathrm{Hom}(Y, J) \\ &\xrightarrow{(b,1)-(1,a)} \mathrm{Hom}(Y, C) \longrightarrow 0 \end{aligned} \tag{3.18}$$

正合, 为了证明 $\tilde{\alpha}$ 的存在性, 我们只要证明 $\hat{H}^2(G, \mathrm{Hom}(Y, C))$ 中的等式

$$(b, 1)\alpha_1 = (1, a)\alpha_2.$$

由第二步中的引理 3.2.14, 我们只要在 $\hat{H}^2(G_w, C)$ 中验证

$$j_w \operatorname{Res}((b,1)\alpha_1) = j_w \operatorname{Res}((1,a)\alpha_2), \quad \forall\, w \in S.$$

在图:

$$\begin{array}{ccccc}
\hat{H}^2(G,\operatorname{Hom}(Y,J)) & \xrightarrow{(1,a)} & \hat{H}^2(G,\operatorname{Hom}(Y,C)) & \xleftarrow{(b,1)} & \hat{H}^2(G,\operatorname{Hom}(Z,C)) \\
\downarrow{\scriptstyle \operatorname{Res}} & & \downarrow{\scriptstyle \operatorname{Res}} & & \\
\hat{H}^2(G_w,\operatorname{Hom}(Y,J)) & & \hat{H}^2(G_w,\operatorname{Hom}(Y,C)) & & \downarrow \\
\downarrow{\scriptstyle j_w} & & \downarrow{\scriptstyle j_w} & & \\
\hat{H}^2(G_w,J) & \xrightarrow{a} & \hat{H}^2(G_w,C) & \xleftarrow{\operatorname{Res}} & \hat{H}^2(G,C)
\end{array}$$

中左边的矩形是交换的, 这来源于 Res 和 j_w 的自然性. 所以有 $j_w \operatorname{Res}(1,a)\alpha_2 = a(j_w \operatorname{Res}\alpha)$. 另一方面我们有 $j_w \operatorname{Res}(b,1)\alpha_1 = \operatorname{Res}\alpha$, 其原因是: 根据定义, α_1 在同构 $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, C) \to C$ 下映为 α 以及图:

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Hom}(Y,C) & \xleftarrow{(b,1)} & \operatorname{Hom}(\mathbb{Z},C) \\
& {\scriptstyle j_w}\searrow & \downarrow \\
& & C
\end{array}$$

交换. 于是 $\tilde{\alpha}$ 的存在性就归结为证明 $\hat{H}^2(G_w, C)$ 中的等式

$$\operatorname{Res}\alpha = a(j_w \operatorname{Res}\alpha_2). \tag{3.19}$$

设 K/F' 是以 G_w 为群的 Galois 扩张. 令 v' 为 F' 的在 w 之下的位. 则 K/F' 在 v' 处的局部次数等于整体次数 $n' = [K : F']$, 并且 w 是 K 的唯一的在 v' 之上的位. 由 (3.16) 式我们知道: $\operatorname{inv}_{w'}(j_w \operatorname{Res}\alpha_2)$ 当 $w' = v'$ 时等于 $\frac{1}{n'}$ 而在其他的 w' 处等于 0, 于是 $\operatorname{inv}(a j_w \operatorname{Res}\alpha_2) = \frac{1}{n'}$. 另一方面由于限制映射将基本类映为基本类, 所以 $\operatorname{Res}\alpha$ 是整体基本类, 并且 $\operatorname{inv}(\operatorname{Res}\alpha) = \frac{1}{n'}$. 而基本类是不变量为扩张次数的倒数的典范类, 故 (3.19) 式成立.

由第二步的引理 3.2.14 有

$$\hat{H}^1(G,\operatorname{Hom}(Y,C)) \cong \prod_{v \in S_*} \hat{H}^1(G_{h(v)}, C) = 0.$$

由此即知 α 是唯一的.

第六步. 构造 α_3.

引理 3.2.16 令 $\alpha_3 = u_3(\tilde{\alpha})$, 则图 (3.14) 交换.

证明 我们有交换图:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & \mathrm{Hom}((\mathrm{I}),(\mathrm{II})) & & \xrightarrow{u_1} & & \mathrm{Hom}(\mathbb{Z},C) \\
 & & \downarrow u_3 & \searrow u_2 & & & \downarrow (b,1) \\
 & & & & \mathrm{Hom}(Y,J) & \xrightarrow{(1,a)} & \mathrm{Hom}(Y,C) \\
 & & & & \downarrow (b',1) & & \downarrow (b',1) \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(x,U) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(X,J) & \xrightarrow{(1,a)} & \mathrm{Hom}(X,C)
\end{array}
\qquad (3.20)
$$

并且对于 $i=1,2,3$, 有

$$\alpha_i = u_i(\tilde{\alpha}),$$

$$\alpha_i^n(\xi) = \alpha_i \cup \xi = \tilde{\alpha} \cup \xi.$$

此图的交换性来自上积的函子性质.

第七步. 最后, 对于图 (3.14) 应用五引理即知 α_3^n 是同构.

Tate 的这个定理容易推广到 Galois 模上. 设 M 是无扭 G 模, 令 $(\mathrm{I})\otimes M$ (相应地, $(\mathrm{II})\otimes M$) 为正合序列 (I) (相应地, (II)) 在 $\mathbb{Z}$ 上与 M 作张量积所得到的结果. 由于 M 无扭, 所以这两个新的序列仍然正合. 令 G 作用在它们上, 其定义为 $\sigma(x\otimes y) = \sigma x \otimes \sigma y$. 则显然偶对

$$\mathrm{Hom}((\mathrm{I}),(\mathrm{II})) \times ((\mathrm{I})\otimes M) \longrightarrow (\mathrm{II})\otimes M$$

是 G 偶对, 并且用上面构造出来的典范类 α 作上积给出下面图中的竖直箭头:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & \hat{H}^n(G,X\otimes M) & \longrightarrow & \hat{H}^n(G,Y\otimes M) & \longrightarrow & \hat{H}^n(G,\mathbb{Z}\otimes M) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & \hat{H}^{n+2}(G,U\otimes M) & \longrightarrow & \hat{H}^{n+2}(G,J\otimes M) & \longrightarrow & \hat{H}^{n+2}(G,C\otimes M) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}
\qquad (3.21)
$$

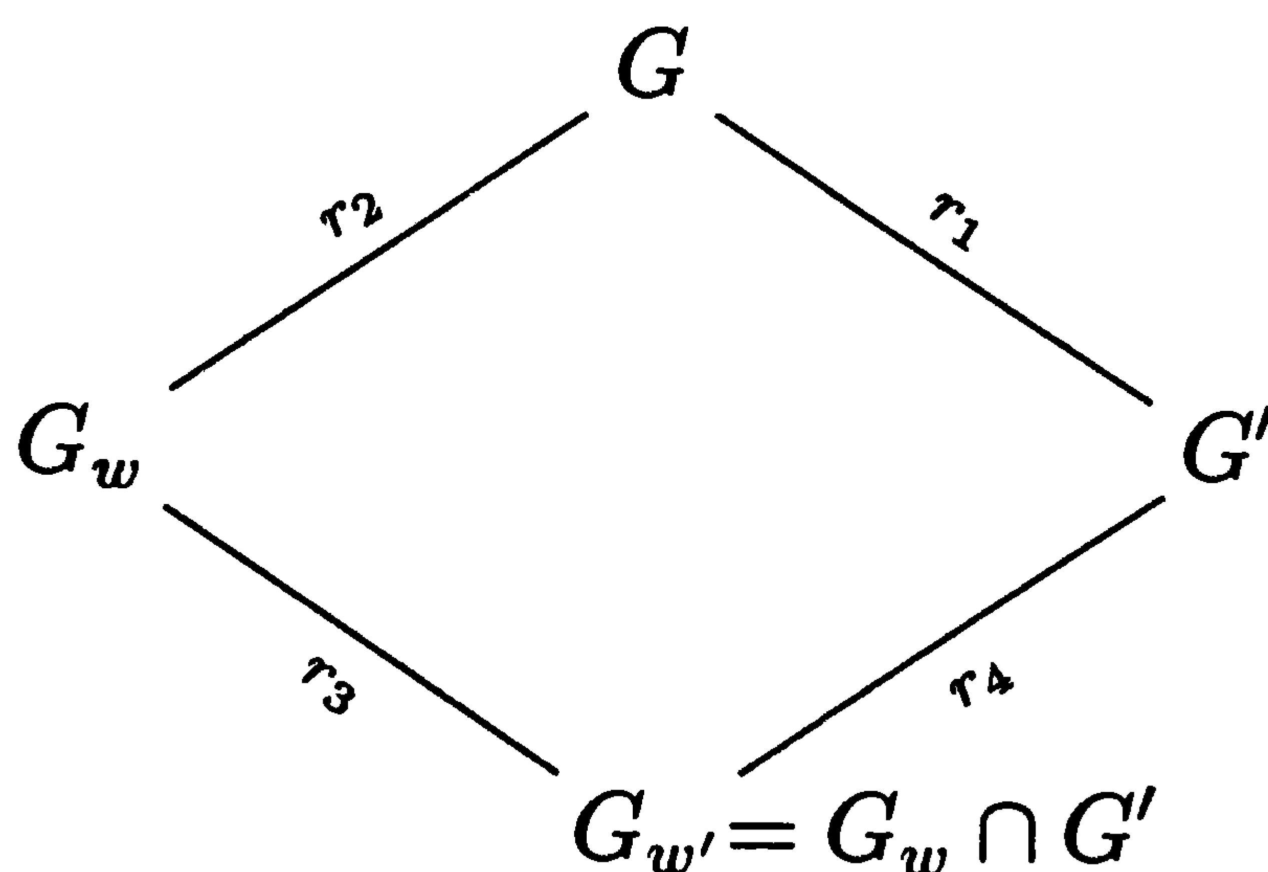
此图类似于图 (3.14). □

定理 3.2.17 图 (3.21) 中的竖直箭头是同构.

证明 根据 Tate-Nakayama 定理我们只需证明这些竖直箭头在 $M=\mathbb{Z}$ 时是同构, 但是要把 G 换成的任一子群 G'. 这由我们已经证明的结果和下面的命题所保证:

命题 3.2.18　设 G' 为 G 的子群. 则典范类 $\alpha' \in H^2(G', \mathrm{Hom}((\mathrm{I}), (\mathrm{II})))$ 是 α 的限制.

证明　根据由 (3.14) 式给出的 α 以及 α' 的定义, 我们只要在将 α 换为 α_1 和 α_2 的情形证明本命题即可, 这是整体基本类在限制映射下变为其他基本类的基础性质. 为了对于 α_2 验证本命题, 我们用 r_i 记由下面图所诱导的限制映射:



于是对于任意 $w \in S$, 有

$$j_w r_4 r_1 \alpha_2 = j_w r_3 r_2 \alpha_2 = r_3 j_w r_2 \alpha_2 = i_w r_3 \alpha_w.$$

因为关于 G_w 的局部基本类的限制 $r_3\alpha_w$ 是关于 G'_w 的基本类, 于是得到我们所要的结果 $\alpha'_2 = r_1\alpha_2$. □

(3.17) 式中的同构 i 和 i' 也可以类似地扩充. 我们不再给出证明.

命题 3.2.19　对于任意的自由 G 模 M 和所有整数 n, 有同构

$$\coprod_{v \in S_*} \hat{H}^n(G_{h(v)}, M \otimes \mathbb{Z}) \cong \hat{H}^n(G, M \otimes Y), \tag{3.22}$$

$$\coprod_{v \in S_*} \hat{H}^n(G_{h(v)}, M \otimes K^\times_{h(v)}) \cong \hat{H}^n(G, M \otimes J). \tag{3.23}$$

3.2.7　Galois 上同调的对偶定理

现在我们讨论 Galois 上同调的对偶定理. 以 μ_n 记 n 次单位根群, 令 $\mu = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mu_n$.

定理 3.2.20(局部 Tate 对偶定理 (local Tate duality theorem))　设 K 为 $\mathbb{Q}_p$ 的有限扩张, $\overline{K}$ 为 K 的代数闭包. 令 $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. 设 A 为有限 G_K 模. 则对于 $i = 0, 1, 2$, 上积

$$H^i(G_K, \mathrm{Hom}(A, \mu)) \times H^{2-i}(G_K, A) \xrightarrow{\cup} H^2(G_K, \mu) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

决定有限交换群的同构

$$H^i(G_K, \mathrm{Hom}(A, \mu)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(H^{2-i}(G_K, A), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

定理 3.2.21(整体对偶定理 (global duality theorem)) 设 K 为 $\mathbb{Q}$ 的有限扩张, S 为 S_K 的包含 S_∞ 的有限子集, 以 K_S 记 K 上在 S 外非分歧的极大代数扩张. 令 $G_S = \mathrm{Gal}(K_S/K)$. 设 A 是 G_S 模, 并且作为 $\mathbb{Z}$ 模是有限生成的. 则对于 $i = 0, 1, 2$, 上积

$$\hat{H}^i(G_S, \mathrm{Hom}(A, C_K(S))) \times \hat{H}^{2-i}(G_S, A) \xrightarrow{\cup} H^2(G_S, C_K(S))$$

决定拓扑群同构

$$\hat{H}^0(G_S, \mathrm{Hom}(A, C_K(S))) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(\hat{H}^2(G_S, A), \mathbb{R}/\mathbb{Z}).$$

如果进一步假设 A 为自由 $\mathbb{Z}$ 模, 则有拓扑群同构

$$\hat{H}^{-1}(G_S, \mathrm{Hom}(A, C_K(S))) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(\hat{H}^3(G_S, A), \mathbb{R}/\mathbb{Z}).$$

以上对偶定理的证明见 [274], [152] 及 [254].

设 K 为数域, p 为素数, $p > 2$, M 为有限 p 准素 G_S 模. 对于 $v \in S$, 以 K_v 记 K 在 v 处的完备化. 设 w 为 v 在 K_S 上的一个扩充. 以 $K_{S,w}$ 记 K 在 K_S 内所有有限扩张在 w 处的完备化的并集. 由

$$G_v = \mathrm{Gal}(\overline{K}_v/K_v) \longrightarrow \mathrm{Gal}(K_{S,w}/K_v) \longrightarrow \mathrm{Gal}(K_S/K) = G_S$$

得到限制映射

$$\mathrm{Res}_v^i : H^i(G_S, M) \longrightarrow H^i(G_v, M).$$

由此得到映射

$$\alpha_M : H^0(G_S, M) \longrightarrow \bigoplus_{v \in S} H^0(G_v, M),$$

$$\beta_M : H^1(G_S, M) \longrightarrow \bigoplus_{v \in S} H^1(G_v, M),$$

$$\gamma_M : H^2(G_S, M) \longrightarrow \bigoplus_{v \in S} H^2(G_v, M).$$

利用 Tate 对偶得到映射

$$\widehat{\alpha_M} : \bigoplus_{v \in S} H^2(G_v, \mathrm{Hom}(M, \mu_{p^\infty})) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(H^0(G_S, M), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p),$$

$$\widehat{\beta_M} : \bigoplus_{v \in S} H^1(G_v, \mathrm{Hom}(M, \mu_{p^\infty})) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(H^1(G_S, M), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p),$$

$$\widehat{\gamma_M} : \bigoplus_{v \in S} H^0(G_v, \mathrm{Hom}(M, \mu_{p^\infty})) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(H^2(G_S, M), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p).$$

由类域论可得非退化偶对

$$\operatorname{Ker}\beta_m \times \operatorname{Ker}\widehat{\alpha_M} \longrightarrow \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p,$$

被称为 **Poitou-Tate 对偶** (Poitou-Tate duality).

在以下的定理中我们记 $M^D = \operatorname{Hom}(M, \mu_{p^\infty})$, $A^\wedge = \operatorname{Hom}(A, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$.

定理 3.2.22　*存在同态* $\delta_M : H^2(G_S, M^D)^\wedge \to H^1(G_S, M)$ *使得下面的序列正合:*

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow H^0(G_S, M) & \xrightarrow{\alpha_M} & \bigoplus_{v\in S} H^0(G_v, M) & \xrightarrow{\widehat{\gamma_{M^D}}} & H^2(G_S, M^D)^\wedge & & \\
 & & & & \downarrow \delta_M & & \\
H^1(G_S, M^D)^\wedge & \xleftarrow{\widehat{\beta_{M^D}}} & \bigoplus_{v\in S} H^1(G_v, M) & \xleftarrow{\beta_M} & H^1(G_S, M) & & \\
\downarrow \widehat{\delta_{M^D}} & & & & & & \\
H^2(G_S, M) & \xrightarrow{\gamma_M} & \bigoplus_{v\in S} H^2(G_v, M) & \xrightarrow{\widehat{\alpha_M}} & H^0(G_S, M^D)^\wedge & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

此序列称为 **Poitou-Tate 序列**.

现在设对于 $v \in S$ 给定 $H^1(G_v, M)$ 的子群 $W_v(M)$. 由 Tate 对偶

$$H^1(G_v, M) \times H^1(G_v, M^D) \longrightarrow \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$$

所决定的 $W_v(M)$ 的正交补记为 $W_v(M^D)$. 定义映射

$$\varphi_M :\ H^1(G_S, M) \xrightarrow{\beta_M} \bigoplus_{v\in S} H^1(G_v, M) \longrightarrow \bigoplus_{v\in S} H^1(G_v, M)/W_v(M)$$

和

$$\eta_M :\ H^2(G_S, M^D)^\wedge \longrightarrow \operatorname{Ker}\varphi_M,$$

并将 β_M 的限制记为

$$\rho_M :\ \operatorname{Ker}\varphi_M \longrightarrow \bigoplus_{v\in S} W_v(M).$$

则有下面的正合序列:

$$\begin{array}{ccccc}
0 \longrightarrow \operatorname{Ker}\varphi_M & \longrightarrow & H^1(G_S, M) & \xrightarrow{\varphi_M} & \bigoplus_{v\in S} H^1(G_v, M)/W_v(M) \\
 & & & & \downarrow \widehat{\rho_{M^D}} \\
\bigoplus_{v\in S} H^2(G_v, M) & \xleftarrow{\gamma_M} & H^2(G_S, M) & \xleftarrow{\widehat{\eta_{M^D}}} & (\operatorname{Ker}\varphi_{M^D})^\wedge \\
\downarrow \widehat{\alpha_{M^D}} & & & & \\
H^0(G_S, M^D)^\wedge \longrightarrow 0 & & & &
\end{array}$$

此序列称为 Cassels 序列. 在 Wiles 给出的 Fermat 最后定理的证明中用到这个序列时, 取 $W_v(M)=0$.

在本篇的余下部分我们将把以上关于数域上的上同调的结果推广到环面上去. 类似的结果对于椭圆曲线也成立, 详情请见: [73], [74], [249], [84], [133] 及 [368].

3.3　环面的 adele 点

3.3.1　环面的局部点

在本小节我们用 F 表示一个代数数域在一个位 v 处的完备化, 用 O_F, U_F, P_F 分别记 O_v, U_v, P_v. 设 T 是定义在 F 上的一个环面, T 在有限扩张 K/F 上分裂, $G=\mathrm{Gal}(K/F)$. 令 ψ 是在 2.1.1 节中定义的同构

$$\psi: T\cong \mathrm{Hom}(X(T),\mathbb{G}_{\mathrm{m}}).$$

对于 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ 的任一子群 H, $\mathrm{Hom}(X(T),H)$ 可以被典范地看作 $\mathrm{Hom}(X(T),\mathbb{G}_{\mathrm{m}})$ 的子群. 以下我们总是将 $\mathrm{Hom}(X(T),H)$ 视为 $\mathrm{Hom}(X(T),\mathbb{G}_{\mathrm{m}})$ 的子群. 由命题 2.2.2 我们有

$$T(K)=\psi^{-1}(\mathrm{Hom}(X(T),K^{\times})),$$
$$T(F)=\psi^{-1}(\mathrm{Hom}_G(X(T),K^{\times})).$$

现在我们定义群

$$T(O_K)=\psi^{-1}(\mathrm{Hom}(X(T),U_K)), \tag{3.24}$$
$$T(O_F)=\psi^{-1}(\mathrm{Hom}_G(X(T),U_K)). \tag{3.25}$$

显然 $T(O_F)=T(O_K)\cap T(F)$, 即 $T(O_F)=T(O_K)^G$. 又显然有

$$T(O_K)=\{x\in T(K)\mid \xi(x)\in U_K,\ \forall\,\xi\in X(T)\}. \tag{3.26}$$

进而有

$$T(O_F)=\{x\in T(F)\mid \xi(x)\in U_F,\ \forall\,\xi\in X_F(T)\}. \tag{3.27}$$

事实上, 设 $x\in T(F)$ 满足 $\xi(x)\in U_F$ $(\forall\,\xi\in X_F(T))$. 则对于任意的 $\eta\in X(T)$, 有 $\mathrm{N}_{K/F}\eta(x)=\prod_{\sigma\in G}(\eta(x))^{\sigma}=(\sum_{\sigma\in G}{}^{\sigma}\eta)(x)\in U_F$. 由于

$$|y|_K^{[K:F]}=|\mathrm{N}_{K/F}|_F,\quad \forall\,y\in K.$$

我们得知 $\eta(x) \in U_K$, 即 $x \in T(F) \cap T(O_K) = T(O_F)$. 这就证明了 (3.27) 式中的 "$\supseteq$". 另一方向的包含关系是明显的. (注意, 如果我们将 T 与对角群 $D(d) \subset \mathrm{GL}(d)$ 等同, 则对于有限位 v, $T(O_K)$ 是 $T(K)$ 中系数在赋值环 $O_K(=\{x \in K \mid |x|_K \leqslant 1\})$ 中且行列式在 O_K 中可逆的元素组成的群.) 令 F 为 K 同构 $T \cong (\mathbb{G}_{\mathrm{m}})^d$, 则 f 诱导出同构

$$T(K) \cong (K^\times)^d, \qquad T(O_K) \cong (U_K)^d. \tag{3.28}$$

这意味着 $T(K)$ 是局部紧的, 并且 $T(O_K)$ 是 $T(K)$ 的唯一极大紧子群. 易见 $T(F)$ 是局部紧的, $T(O_F)$ 是 $T(F)$ 的唯一极大紧子群.

设 ξ_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ 是 $X(F)$ 的一组基. 定义映射 $\psi: T(F) \to (\mathbb{R}_+^\times)^r$ 为

$$\psi(x) = (|\xi_1(x)|, \cdots, |\xi_r(x)|). \tag{3.29}$$

则 ψ 诱导出同构

$$T(F)/T(O_F) \cong \begin{cases} (\mathbb{R}_+^\times)^r, & v \text{ 无限}, \\ \mathbb{Z}^r, & v \text{ 有限}. \end{cases}$$

3.3.2 环面的 adele 点

设 F 是数域, T 是定义在 F 上的环面. 当不致引起混淆时, 我们将下标 F 省略掉, 例如记 $\mathbb{A} = \mathbb{A}_F$, $J = J_F$, $T(O_v) = T(O_{F_v})$ 等等. 对于包含 S_∞ 的 F 位的有限集 S, 令

$$T_S = \prod_{v \in S} T(F_v), \qquad T(\mathbb{A}(S)) = T_S \times \prod_{v \notin S} T(O_v).$$

T 的 adele 群 $T(\mathbb{A})$ 定义为 $T(\mathbb{A}(S))$ 关于 S 的直极限. 从典范等同的观点来看, 我们有

$$T(\mathbb{A}) = \mathrm{Hom}(X(T), J).$$

回顾 F 的 **idele 类群** (idele class group) $C = C_F$ 由下面的正合序列所定义:

$$1 \longrightarrow F^\times \longrightarrow J \longrightarrow C \longrightarrow 1. \tag{3.30}$$

由于 $X(T)$ 是 $\mathbb{Z}$ 自由的, 所以有正合序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(X(T), F^\times) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X(T), J) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X(T), C) \longrightarrow 0,$$

或

$$0 \longrightarrow T(F) \longrightarrow T(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X(T), C) \longrightarrow 0. \tag{3.31}$$

如果我们令 $C_F(T) = T(\mathbb{A}_F)/T(F)$, 则有

$$C_F(T) = \mathrm{Hom}(X(T), C_F). \tag{3.32}$$

令

$$T(O(S)) = T(F) \cap T(\mathbb{A}(S)),$$

并称之为 S 单位群. S_∞ 单位群 $T(O(S_\infty))$ 将简单地称为 T 的单位群.

以后我们将用同样的符号来记 alele 化的态射. 例如, 如果 $\xi \in X_F(T)$, 我们将同样用 ξ 记映射 $T(\mathbb{A}) \to J$ (其定义为 $\xi(x) = (\xi(x_v))$).

令

$$T(\mathbb{A})^1 = \{x \in T(\mathbb{A}) | \xi(x) \in J_F^1, \forall\, \xi \in X_p(T)\},$$
$$T(\mathbb{A}(S))^1 = T(\mathbb{A})^1 \cap T(\mathbb{A}(S)),$$
$$T_S^1 = T(\mathbb{A})^1 \cap T_S.$$

命题 3.3.1 $T(\mathbb{A})/T(\mathbb{A})^1 \cong (\mathbb{R}_+^\times)^{r(T)}$, 其中 $r(T)$ 为 $X_F(T)$ 的秩.

证明 设 ξ_i $(1 \leqslant i \leqslant r(T))$ 为 $X(T)$ 的一组基. 则映射

$$\Phi: x \longmapsto (|\xi_1(x)|_\mathbb{A}, \cdots, |\xi_{r(T)}(x)|_\mathbb{A})$$

是由 $T(\mathbb{A})$ 到 $(\mathbb{R}_+^\times)^{r(T)}$ 的同态, 其核为 $T(\mathbb{A})^1$. 因此我们只要证明是满射.

令 $\mathscr{L}(T)$ 为 T 的李代数, $\mathrm{d}\xi_i$ 为 ξ_i 的微分, $\exp: \mathscr{L}(T) \to T$ 为指数映射 (参见 [47]). 易见 $\{\mathrm{d}\xi_i \mid 1 \leqslant i \leqslant r(T)\}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关. 事实上, 设 $\sum_i a_i \mathrm{d}\xi_i = 0$, 其中 $a_i \in \mathbb{Q}$. 无妨设 $a_i \in \mathbb{Z}$. 则有 $\mathrm{d}(\sum_i a_i\xi_i) = 0$. 于是 $\sum_i a_i\xi_i = 0$. 但 ξ_i $(1 \leqslant i \leqslant r(T))$ $\mathbb{Z}$ 线性无关, 故 $a_i = 0$ $(\forall\, i)$. 所以 $\{\mathrm{d}\xi_i \mid 1 \leqslant i \leqslant r(T)\}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关.

选取 $X_j \in \mathscr{L}(T)$ 使得 $\mathrm{d}\xi_i(X_j) = \delta_{ij}$. 则有 $\xi_i(\exp tX_j) = \exp(t\,\mathrm{d}\xi_i(x_j)) = \exp(t\delta_{ij})$ $(\forall\, t \in \mathbb{R})$. 对于 $a = (a_1, \cdots, a_{r(T)}) \in (\mathbb{R}_+^\times)^{r(T)}$, 取 $t_i \in \mathbb{R}$ 使得 $\exp\, t_i = a_i$. 固定 F 的一个无穷位 v, 令 $x_v = \prod_i \exp\, t_i X_i \in T(F_v)$, $x = (x_v, 1, 1, \cdots) \in T(\mathbb{A})$. 则 $\Phi(x) = a$. □

命题 3.3.2 $T(\mathbb{A}) = T(\mathbb{A})^1 \cdot T(\mathbb{A}(S_\infty))$.

证明 由于 $T(\mathbb{A}(S_\infty))$ 是 $T(\mathbb{A})$ 的开子群, 所以 $T(\mathbb{A})^1 T(\mathbb{A}(S_\infty))$ 在中 $T(\mathbb{A})$ 开, 并且商空间 $T(\mathbb{A})/T(\mathbb{A})^1 T(\mathbb{A}(S_\infty))$ 离散. 另一方面, 此商空间是空间 $T(\mathbb{A})/T(\mathbb{A})^1$ 的连续像, 而 $T(\mathbb{A})/T(\mathbb{A})^1$ 连通 (见命题 3.3.1), 所以必有 $T(\mathbb{A}) = T(\mathbb{A})^1 \cdot T(\mathbb{A}(S_\infty))$. □

定理 3.3.3 (Ono[283]). $T(\mathbb{A})^1/T(F)$ 是紧致的.

证明 设 K/F 是有限 Galois 扩张, T 在 K 上分裂. 把 J_F 嵌入到 $J_K = J_F \otimes_F K$ 中, 也把 $T(\mathbb{A}_F)$ 嵌入到 $T(\mathbb{A}_K)$ 中. 由于 T 在 K 上分裂, 所以有同构 $f: T \to (\mathbb{G}_\mathrm{m})^d$. 于是 $T(\mathbb{A}_K) \cong (J_K)^d$. 定义映射 $N: (J_K)^d \to (\mathbb{R}_+^\times)^d$, 它将 $(a_1, \cdots, a_d)$ 映为 $(|a_1|_{\mathbb{A}_K}, \cdots, |a_d|_{\mathbb{A}_K})$. 令 χ_i $(1 \leqslant i \leqslant d)$ 为 $X((\mathbb{G}_\mathrm{m})^d)$ 的典范基. 则对于 $x \in T(\mathbb{A}_K)$ 显然有

$$N \circ f(x) = 1, \qquad |\chi_i \circ f(x)|_{\mathbb{A}_K} = 1.$$

由于 $\chi_i \circ f$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$ 是 $X(T) \supset X_F(T)$ 的基, 所以

$$f(T(\mathbb{A}_F)^1) = f(T(\mathbb{A}_F)) \cap (J_K^1)^d.$$

于是我们有

$$f(T(\mathbb{A}_F)^1)(K^\times)^d = f(T(\mathbb{A}_F))(K^\times)^d \cap (J_K^1)^d.$$

因为在 $(J_K)^d$ 中 $f(T(\mathbb{A}_F))$ 是闭的而 $(K^\times)^d$ 是离散的, 所以 $f(T(\mathbb{A}_F))^1(K^\times)^d$ 在 $(J_K^1)^d$ 中闭. 由于 $J_K^1/K^\times$ 紧, 所以 $f(T(\mathbb{A}_F))^1(K^\times)^d/(K^\times)^d$ 也紧. 显然映射 f 诱导自然的连续同态 $\tilde{f}: T(\mathbb{A})^1/T(F) \to (J_K^1/K^\times)^d$, 其像为 $f(T(\mathbb{A}_F))^1(K^\times)^d/(K^\times)^d$, 于是得到定理的结论. □

推论 3.3.4 $h = [T(\mathbb{A}) : T(F)T(\mathbb{A}(S_\infty))] < \infty$.

证明 根据定理 3.3.3, 存在包含 $T(\mathbb{A})^1$ 关于 $T(F)$ 的陪集的代表系的紧集 C. 再由命题 3.3.2 知任一 $x \in T(\mathbb{A})$ 可以写为 $x = c\,t\,x_\infty$, 其中 $c \in C$, $t \in T(F)$, $x_\infty \in T(\mathbb{A}(S_\infty))$. 于是 C 也包含 $T(\mathbb{A})$ 关于 $T(F)T(\mathbb{A}(S_\infty))$ 的陪集的代表系. 但 $T(\mathbb{A}(S_\infty)$ 在 $T(\mathbb{A}))$ 中开, 所以 $T(F)T(\mathbb{A}(S_\infty))$ 也在 $T(\mathbb{A})$ 中开. 这说明 $T(\mathbb{A})/T(F)T(\mathbb{A}(S_\infty))$ 离散. 而离散的紧集是有限集, 所以 $h < \infty$. □

命题 3.3.5 *存在 F 的位的有限子集 S, 使得 $T(\mathbb{A}) = T(F)T(\mathbb{A}(S))$.*

证明 设 x_i $(1 \leqslant i \leqslant h)$ 是 $T(\mathbb{A})$ 关于 $T(F)T(\mathbb{A}(S_\infty))$ 的陪集的代表系. 令 M 为 F 的位的集合 S_F 的子集,

$$M = \bigcup_{i=1}^{h} \{v \in S_F | x_{i,v} \notin T(O_v)\}.$$

则 M 是有限集. 令 $S = M \cup S_\infty$, 则 $x_i \in T(\mathbb{A}(S))$. 于是有 $T(\mathbb{A}) = T(F)T(\mathbb{A}(S))$. □

说明: 用约化群代替环面 T 也有类似的结果. (参见 [46] 与 [258].)

3.4　算　术　群

3.4.1　算术子群的定义

设 G 是 $\mathbb{Q}$ 上的线性代数群, Γ 是 G 的有理点群 $G(\mathbb{Q})$ 的子群. 如果对于任意代数嵌入 $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_n$ (n 为任意正整数) Γ 和 $G(\mathbb{Q}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ **可公度** (commensurable) (两个子群 Γ_1 和 Γ_2 称为可公度的, 如果 $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ 在 Γ_1 和 Γ_2 中都指数有限), 则称 Γ 为**算术子群** (arithmetic subgroup). 为了验证 Γ 与 $G(\mathbb{Q}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ 可公度, 事实上只要考虑一个嵌入 $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_n$ 即可.

例 3.4.1　设 K 是数域, E 是 K 的单位群, 则 E 是 $T = \mathrm{R}_{K/F}(\mathbb{G}_\mathrm{m})$ 的一个算术子群.

令 $\overline{\mathbb{Q}}$ 为 $\mathbb{Q}$ 的代数闭包, U 为 $\overline{\mathbb{Q}}^\times$ 的子群, 其元素为 $\overline{\mathbb{Q}}$ 的代数单位. 令

$$\Gamma = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}(X(T), U).$$

则 Γ 是 $T(\mathbb{Q})$ 的算术子群, 并且 $T(\mathbb{Q})$ 的任一算术子群含于 Γ.

3.4.2　算术子群的零化

我们重新证明 Serre[330] 给出的零化算术子群的结果.

设 v 是 $\overline{\mathbb{Q}}$ 的一个复位. 则 $\overline{\mathbb{Q}}$ 关于 v 的完备化同构于 $\mathbb{C}$. v 处的分解群是二阶群, 它的非平凡元记为 ι_v (无穷位处的 Frobenius). 不同的复位 v 所对应的 ι_v 在群 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 中共轭. 我们用 C_∞ 记它们组成的共轭类.

设 T 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的环面, $X(T)$ 是特征标群. 记 $Y = X(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. 令 Λ 为 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 的通过有限商的 $\mathbb{Q}$ 不可约表示类的集合. 对于每个 $\lambda \in \Lambda$, 令 Y_λ 为 Y 的与 λ 对应的同型 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 子模, 即 Y 的所有与 λ 同构的子 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 模的和. 则有直和分解

$$Y = \coprod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda.$$

令 $Y^0 = Y_1$, 其中 1 是 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 的单位表示; 令

$$Y^- = \sum_{\lambda \in \Lambda^-} Y_\lambda,$$

其中 $\Lambda^- = \{\lambda \in \Lambda | \lambda(\iota) = -1, \ \forall\, \iota \in C_\infty\}$. 令 Y^+ 为其余 Y_λ 的和. 则有

$$Y^0 = Y^G = \{y \in Y | (\sigma - 1)y = 0, \ \forall\, \sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})\},$$

$$Y^- = \{y \in Y | (\iota + 1)y = 0, \ \forall\, \iota \in C_\infty\},$$

$$Y = Y^0 \oplus Y^- \oplus Y^+.$$

命题 3.4.1 设 Γ 是环面 T 的算术子群, $\overline{\Gamma}$ 是 Γ 的 Zariski 闭包, 则

$$Y(T/\overline{\Gamma}) = Y^0 \oplus Y^-. \tag{3.33}$$

(由于环面 $T/\overline{\Gamma}$ 是 T 的商, 所以我们将 $Y(T/\overline{\Gamma})$ 与 $Y(T)$ 的子模等同.)

证明 首先设 Y 是不可约的, 即 T 没有非零的真子环面.

如果 $Y = Y^0$, 则 T 同构于 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$, 因此 Γ 有限. 这说明 $Y(T/\overline{\Gamma}) = Y(T)$, 所以 (3.33) 式成立. 如果 $Y = Y^-$, 则 $T(\mathbb{R}) = \mathrm{Hom}_H(X(T), \mathbb{C}^\times)$ 紧 (其中 $H = \{1, \iota\}$). 由于 Γ 是 $T(\mathbb{R})$ 的离散子群, 故有限. 于是同样有 (3.33) 式.

如果 $Y = Y^+$, 则 $T(\mathbb{R})$ 不是紧的. 而由 Ono 的定理 (定理 3.3.3) 知 $T(\mathbb{R})/\Gamma$ 紧, 所以 Γ 是无限的. 于是 $\overline{\Gamma}$ 是 T 的维数至少为 1 的代数子群. $\overline{\Gamma}$ 的连通分支是 T 的非平凡子群, 故 $\overline{\Gamma} = T$, 于是 $Y(T/\overline{\Gamma}) = 0$. 所以也有 (3.33) 式.

对于一般的情形的证明容易从不可约的情形导出. 例如取一个环面 $T' \to T$, 使得 T' 分裂为不可约环面的直积. 再注意到 Γ 与 $T' \to T$ 的像 (是 T 的一个算术子群) 可公度即可. □

3.5 环面的上同调

3.5.1 分裂环面有理点群表达为张量积

设 K/F 是有限 Galois 扩张, 其 Galois 群为 G. 设 N 是有限秩的 $\mathbb{Z}$ 模同时是 G 模. 令 $N^\wedge = \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Z})$. 则对于任意 G 模 C, 有典范同构

$$N^\wedge \otimes C \cong \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Z}) \otimes \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, C) \cong \mathrm{Hom}(N, C). \tag{3.34}$$

设 T 是 F 环面, 它在 K 上分裂. 则 $T(K)$ 是 G 模. 于是我们可以考虑上同调群 $H^n(G, T(K))$. 由 (3.34) 式有

$$T(K) = \mathrm{Hom}(X(T), K^\times) = X(T)^\wedge \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times. \tag{3.35}$$

这使得我们可以应用 Tate-Nakayama 关于张量积的上同调的结果.

3.5.2 环面的 Galois 上同调

根据定理 3.2.2 和 3.2.3, 我们可以应用定理 1.3.3 的推论 1.3.5 ($X(T)^\wedge$ 无扭) 从而得到

命题 3.5.1 设 F 是一个代数数域在某个有限位处的完备化. 则用 $K^\times$ 的基本类作上积给出同构

$$H^n(G, X(T)^\wedge) \cong H^{n+2}(G, T(K)).$$

如果 F 是一个代数数域, Y 是由 S_F 生成的自由群, $b: Y \to \mathbb{Z}$ 是由 $b(\sum n_w) = \sum n_v$ 所给出的同态, X 是 b 的核. 则由 Tate 的定理 (定理 3.2.17) 我们得到

命题 3.5.2　下面的图交换, 并且竖直箭头是由作上积给出的同构:

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots \longrightarrow & \hat{H}^n(G, X \otimes X(T)^\wedge) & \longrightarrow & \hat{H}^n(G, Y \otimes X(T)^\wedge) & \longrightarrow & \hat{H}^n(G, X(T)^\wedge) & \longrightarrow \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \cdots \longrightarrow & \hat{H}^{n+2}(G, T(K)) & \longrightarrow & \hat{H}^{n+2}(G, T(\mathbb{A}_K)) & \longrightarrow & \hat{H}^{n+2}(G, C_K(T)) & \longrightarrow \cdots \end{array} \tag{3.36}$$

3.5.3　正合偶对

由 $C_K(T) = \mathrm{Hom}(X(T), C_K)$ 我们得到自然偶对

$$C_K(T) \times X(T) \longrightarrow C_K.$$

由 Tate-Nakayama 对偶定理 (定理 1.3.6) 知关于这个偶对的上积决定一个正合偶对

$$\hat{H}^n(G, C_K(T)) \times \hat{H}^{2-n}(G, X(T)) \longrightarrow \hat{H}^2(G, C_K).$$

由于对于所有的 $n \in \mathbb{Z}$, $\hat{H}^{2-n}(G, X(T))$ 都有限, 所以 $\hat{H}^n(G, C_K(T))$ 也都有限, 并且有 (非典范的) 同构

$$\hat{H}^n(G, C_K(T)) \cong \hat{H}^{2-n}(G, X(T)), \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}. \tag{3.37}$$

3.5.4　环面的 Galois 上同调正合序列

取正合序列

$$0 \longrightarrow T(K) \longrightarrow T(\mathbb{A}_K) \longrightarrow C_K(T) \longrightarrow 0 \tag{3.38}$$

(参见 3.3 节 的 (3.31) 式) 的上同调, 我们得到正合序列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow & H^0(G, T(K)) \longrightarrow H^0(G, T(\mathbb{A}_K)) \longrightarrow H^0(G, C_K(T)) \longrightarrow \\ & H^1(G, T(K)) \xrightarrow{\beta} H^1(G, T(\mathbb{A}_K)) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

即

$$0 \to T(F) \to T(\mathbb{A}_F) \to C_K(T)^G \to H^1(G, T(K)) \xrightarrow{\beta} H^1(G, T(\mathbb{A}_K)) \to \cdots$$

或

$$0 \longrightarrow C_F(T) \xrightarrow{\alpha} C_K(T)^G \longrightarrow H^1(G, T(K)) \xrightarrow{\beta} H^1(G, T(\mathbb{A}_K)) \longrightarrow \cdots \tag{3.39}$$

另一方面, 取序列 (3.38) 的 Tate 上同调, 我们得到正合序列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow & \hat{H}^0(G, T(K)) \longrightarrow \hat{H}^0(G, T(\mathbb{A}_K)) \xrightarrow{\gamma} \hat{H}^0(G, C_K(T)) \longrightarrow \\ & H^1(G, T(K)) \xrightarrow{\beta} H^1(G, T(\mathbb{A}_K)) \longrightarrow \cdots \end{aligned} \tag{3.40}$$

由 (3.39) 式和 (3.40) 式即知

$$\operatorname{Coker} \alpha \cong \operatorname{Ker} \beta \cong \operatorname{Coker} \gamma.$$

由于 $\hat{H}^0(G, C_K(T))$ 有限 (见 (3.37) 式), 所以 $\operatorname{Coker} \alpha$ 有限.

3.5.5 特殊的域扩张下的结果

我们给出与上一小节类似的映射的更多的结果.

设 K/F 是有限 Galois 扩张, 其 Galois 群为 G. 用 S_K (相应地, S_F) 记 K (相应地 F) 的位的集合. 令映射 $h: S_F \to S_K$ 将 S_F 中的位 v 映为 S_K 中位于 v 之上的一个位 w.

定理 3.5.3 设 T 是定义在 F 上的一个代数环面, T 在有限 Galois 扩张 K/F 上分裂. 如果 K/F 是循环扩张, 或存在 F 的一个位 v 使得 $K \otimes_F F_v$ 是域 (即 v 在 K 上的扩充只有一个). 则对于任意 $n \in \mathbb{Z}$, 典范映射

$$\hat{H}^n(G, T(K)) \longrightarrow \prod_{v \in S_F} \hat{H}^n(G_{h(v)}, T(K_{h(v)})) \tag{3.41}$$

为单射.

证明 由命题 2.2.3 我们知道 $T(K) \cong X_*(T) \otimes K^\times$ (其中 $X_*(T) = \operatorname{Hom}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}, T)$) 为 G 模同构, 于是 $\hat{H}^n(G, T(K)) \cong \hat{H}^n(G, X_*(T) \otimes K^\times)$. 类似地我们有 $\hat{H}^n(G_{h(v)}, T(K_{h(v)})) \cong \hat{H}^n(G_{h(v)}, X_*(T) \otimes K^\times_{h(v)})$. 因此我们只需证明映射

$$\hat{H}^n(G, X_*(T) \otimes K^\times) \longrightarrow \prod_{v \in S_F} \hat{H}^n(G_{h(v)}, X_*(T) \otimes K^\times_{h(v)})$$

是单射. 在 3.2.6 节 的 (3.23) 式给出的同构中取 $M = X_*(T)$, 即知我们只需证明映射

$$\hat{H}^n(G, X_*(T) \otimes K^\times) \longrightarrow \hat{H}^n(G, X_*(T) \otimes J)$$

为单射. 由同一小节的图 (3.21) 知这等价于证明

$$\hat{H}^{n-2}(G, X_*(T) \otimes X) \longrightarrow \hat{H}^{n-2}(G, X_*(T) \otimes Y)$$

为单射. 再应用图 (3.21), 我们只要证明映射

$$\hat{H}^{n-3}(G, X_*(T) \otimes Y) \longrightarrow \hat{H}^{n-3}(G, X_*(T) \otimes \mathbb{Z})$$

是满射. 我们将证明对于所有的 $n \in \mathbb{Z}$

$$\hat{H}^{n}(G, X_*(T) \otimes Y) \longrightarrow \hat{H}^{n}(G, X_*(T) \otimes \mathbb{Z})$$

都是满射. 事实上, 由假设我们知道存在 F 的一个位 v, 其分解群 $G_{h(v)} = G$. 在上述同一小节的 (3.22) 式中取 $M = X_*(T)$, 则该式左端的一个分量是 $\hat{H}^n(G, X_*(T) \otimes \mathbb{Z})$. 这就证明了本定理. □

定理 3.5.4 设 T 是定义在 F 上的一个代数环面, T 在有限 Galois 扩张 K/F 上分裂. 设 S 是 F 的位的有限集合, S 包含 F 的所有无穷位. 如果对于所有的 $v \in S$, 分解群 $G_{h(v)}$ 都是循环群, 则典范映射

$$\hat{H}^n(G, T(K)) \longrightarrow \prod_{v \in S} \hat{H}^n(G_{h(v)}, T(K_{h(v)})) \tag{3.42}$$

为满射.

推论 3.5.5 在上面的记号下典范映射

$$\hat{H}^n(\mathrm{Gal}(\overline{F}/F), T(\overline{F})) \longrightarrow \prod_{v \notin S_\infty} \hat{H}^n(\mathrm{Gal}(\overline{F}_v/F), T(\overline{F}_v)) \tag{3.43}$$

为满射.

定理 3.5.4 的证明 (3.42) 式的右端含于 $\bigoplus_v \hat{H}^n(G_{h(v)}, T(K_{h(v)}))$ 中. 应用 3.2.6 节的图 (3.21) 和 (3.23) 式, 我们只需证明如下的事实: 对于任一 $v \in S$, 给定 $\alpha_v \in \hat{H}^n(G_{h(v)}, T(K_{h(v)}))$, 则对于每个 $v \notin S$, 存在 $\alpha_v \in \hat{H}^n(G_{h(v)}, T(K_{h(v)}))$, 使得整体的元素 $(\alpha_v) \in \bigoplus_v \hat{H}^n(G_{h(v)}, T(K_{h(v)}))$, 并且在映射 $\hat{H}^n(G, X_*(T) \otimes J) \to \hat{H}^n(G, X_*(T) \otimes C)$ 下的像为零. 这等价于: 给定 $\bigoplus_v \hat{H}^{n-2}(G_{h(v)}, T_* \otimes Y)$ 中相应于 $v \in S$ 的有限多个分量, 存在其他的分量, 使得所得到的 $\bigoplus_v \hat{H}^{n-2}(G_{h(v)}, T_* \otimes Y)$ 的元素在映射

$$\hat{H}^{n-2}(G_{h(v)}, T_* \otimes Y) \longrightarrow \hat{H}^{n-2}(G_{h(v)}, T_* \otimes \mathbb{Z})$$

下的像为零. 我们将证明这个结果对于所有的 n 都成立.

由于 $G_{h(v)}$ 是循环群 ($\forall\, v \in S$), 根据 Frobenius 的一个定理, 对于任一 $v \in S$, 我们可以选取 K 的一个位 $\overline{v}$, 使得 $\overline{v}$ 不在 S 中的任一满足 $G_v = G_{h(v)}$ 的 v 之上. 这种选取有无穷多种. 设 $\overline{v} = h(\hat{v})$, 其中 $\hat{v}$ 是 F 的位. 我们可以进一步设所有的 $\hat{v}$ 都两两不同. 以 S' 记这样得到的 $\hat{v}$ 的集合. 现在设对于 $v \in S$ 给定了 $\beta_v \in \hat{H}^n(G_{h(v)}, X_*(T))$, 我们定义 $(x_v) \in \hat{H}^n(G_{h(v)}, X_*(T)) \cong \hat{H}^n(G, X_*(T) \otimes Y)$ 符合以下要求:

$$\begin{aligned} x_v &= \beta_v, && \text{如果 } v \in S, \\ x_{\hat{v}} &= -\beta_v, && \text{如果 } h(\hat{v}) = \overline{v},\ v \in S, \\ x_v &= 0, && \text{如果 } v \notin S \cup S'. \end{aligned}$$

则此元素在映射 $\hat{H}^n(G_{h(v)}, T_* \otimes Y) \to \hat{H}^n(G_{h(v)}, T_* \otimes \mathbb{Z})$ 下的像为零. 这就证明了定理 3.5.4. □

3.5.6 环面的自同构群的 Galois 上同调

设 G 是群, G 作用在 (不一定交换的) 群 A 上. 由 G 到 A 的一个映射 $\sigma \mapsto a_\sigma$ 被称为 G 的取值在 A 中的一个 1 上闭链, 如果

$$a_{\sigma\tau} = a_\sigma\, {}^\sigma a_\tau, \qquad \forall\, \sigma, \tau \in G. \tag{3.44}$$

我们用 $Z^1(G, A)$ 记所有 1 上闭链的集合. 两个 1 上闭链称为上同调的, 如果存在 $c \in A$ 使得

$$b_\sigma = c^{-1} a_\sigma\, {}^\sigma c, \qquad \forall\, \sigma \in G. \tag{3.45}$$

这是 1 上闭链集合上的一个等价关系. 此等价关系下的等价类的集合记为 $H^1(G, A)$. 如果 A 是交换的, 则这里的 H^1 就是通常的 H^1.

像前面一样, 设 T 是定义在域 F 上的一个环面, T 在有限 Galois 扩张 K/F 上分裂, 我们将考虑 $H^1(\mathrm{Gal}(K/F), \mathrm{Aut}_K T)$. 这需要另外一个概念.

设 G_1 是定义在 K 上的一个代数群. F 为 K 的一个子域. 一个有序对 (G, f) 称为 G 的 **K/F 形式** (K/F-form), 如果 G 是定义在 F 上的代数群, f 是由 G_1 到 G 的 K 同构. 两个 K/F 形式 (G, f) 和 (G', f') 称为 F 等价的, 如果存在由 G 到 G' 的 F 同构. 我们用 $\varepsilon(K/F, G_1)$ 记 G_1 的 K/F 形式的 F 同构类.

设 $\langle (G, f) \rangle$ 是 G_1 的 K/F 形式的一个 F 同构类, 它包含 K/F 形式 (G, f). 对于 $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/F)$, 令 $\varphi_\sigma = f^{-1} \circ {}^\sigma f$. 则

$$\varphi_{\sigma\tau} = f^{-1} \circ {}^{\sigma\tau} f = (f^{-1} \circ {}^\sigma f) \circ {}^\sigma(f^{-1} \circ {}^\tau f) = \varphi_\sigma \circ {}^\sigma \varphi_\tau.$$

这就是说 $\sigma \mapsto \varphi_\sigma$ 是 $\mathrm{Gal}(K/F)$ 的取值在 $\mathrm{Aut}_K G_1$ 中的一个 1 上闭链.

如果 (G',f') 是另一个 K/F 形式, $\varphi'_\sigma=(f')^{-1}\circ({}^\sigma f')$, 以及 $\rho: G'\to G$ 是一个 F 同构. 令 $\psi=f^{-1}\rho f'$. 则 $\psi\in \mathrm{Aut}_K(G_1)$. 进一步有

$$^\sigma\psi={}^\sigma f^{-1}\circ{}^\sigma\rho\circ{}^\sigma f'=\varphi_\sigma^{-1}\psi\varphi'_\sigma,$$

即

$$\varphi'_\sigma=\psi^{-1}\circ\varphi_\sigma\circ{}^\sigma\psi, \tag{3.46}$$

亦即 (φ_σ) 和 (φ'_σ) 是上同调的. 于是我们可以定义映射

$$\begin{aligned}\theta:\ \varepsilon(K/F,G_1)&\longrightarrow H^1(\mathrm{Gal}(K/F),\mathrm{Aut}_K G_1)\\ \langle(G,f)\rangle&\longmapsto\langle(\varphi_\sigma)\rangle,\end{aligned}$$

其中

$$\varphi_\sigma=f^{-1}\circ{}^\sigma f. \tag{3.47}$$

命题 3.5.6 如果 T 是定义在一个完全域 F 上的环面, 并且在有限 Galois 扩张 K/F 上分裂, 则映射

$$\theta:\ \varepsilon(K/F,T)\longrightarrow H^1(\mathrm{Gal}(K/F),\mathrm{Aut}_K(T))$$

为双射.

证明 首先证明 θ 是单射. 设 $\theta(\langle(T_1,f)\rangle)=\theta(\langle(T_1',f')\rangle)$. 即存在 $\psi\in \mathrm{Aut}_K T$ 使得 (3.46) 式成立. 令 $\rho=f\circ\psi\circ(f')^{-1}$. 显然 $\rho: T_1'\to T$ 是同构, 并且有

$$\begin{aligned}{}^\sigma\rho&={}^\sigma f\circ{}^\sigma\psi\circ{}^\sigma(f')^{-1}\\ &=(f\circ\varphi_\sigma)\circ(\varphi_\sigma^{-1}\circ\psi\circ\varphi'_\sigma)\circ((\varphi'_\sigma)^{-1}\circ(f')^{-1})=f\circ\psi\circ(f')^{-1}=\rho.\end{aligned}$$

这说明是定义在 F 上的. 于是 $\langle(T_1,f)\rangle=\langle(T_1',f')\rangle$.

下面证明 θ 是满射. 令 $(\tilde T,\rho)=\mathrm{R}_{K/F}(T)$ (参见命题 2.2.6). 对于给定的 $(\varphi_\sigma)\in Z^1(\mathrm{Gal}(K/F),\mathrm{Aut}_K(T))$, 定义

$$T_1=\{x\in\tilde T\mid \rho(x)=\varphi_\sigma({}^\sigma\rho(x)),\ \forall\,\sigma\in\mathrm{Gal}(K/F)\}.$$

(φ_σ) 是 1 上闭链意味着 ${}^\sigma T_1=T_1$ $(\forall\,\sigma\in\mathrm{Gal}(K/F))$. 这说明 T_1 是定义在 F 上的. 于是 $\rho|_{T_1}: T_1\to T$ 是 K 同构. 令 $f=(\rho|T_1)^{-1}$, 则 (T_1,f) 是 T 的一个 K/F 形式. 显然有 $\theta(\langle(T_1,f)\rangle)=\langle(\varphi_\sigma)\rangle$. □

3.5.7　环面扩张与上同调

我们来考虑上同调和环面扩张.

环面同态的一个序列

$$0 \longrightarrow T' \xrightarrow{\iota} T \xrightarrow{\pi} T'' \longrightarrow 0 \tag{3.48}$$

称为 (严格) **正合的** (exact), 如果 $\mathrm{Ker}\,\iota = 0$, $\mathrm{Im}\,\iota = \mathrm{Ker}\,\pi$, $\mathrm{Im}\,\pi = T''$ 并且 ι 和 π 是可分的. 此时可以将 T' 视为 T 的子群, 并将 T'' 与 T/T' 等同.

如果序列 (3.48) 正合, 则 T 和序列 (3.48) 一起被称为 T' 被 T'' 的一个**扩张** (extension). 进一步, 如果序列在 F 上正合, 则此扩张称为定义在 F 上的. 在不至于引起混淆的情况下我们也称之为 T' 被 T'' 的 F 扩张.

T' 被 T'' 的两个扩张 T, S 称为 F 等价的, 如果存在 F 同态 $f: T \to S$ 使得下面的图交换:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & T' & \longrightarrow & T & \longrightarrow & T'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \\
0 & \longrightarrow & T' & \longrightarrow & S & \longrightarrow & T'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

T' 被 T'' 的 F 扩张的等价类的集合记为 $\mathrm{Ext}_F(T'', T')$. 给定正合序列 (3.48) 和环面同态 $f: T' \to S'$, $g:\ S'' \to T''$, 定义 $f_*(T)$ 为 $T \times S'$ 关于有序对 $(x^{-1}, f(x))$ 组成的子群的商, 这里 x 取遍 T' 的元素. 典范映射 $S' \to T \times S'$ 和 $T \times S' \to T$ 与取商复合定义了正合序列

$$0 \longrightarrow S' \longrightarrow f_*(T) \longrightarrow T'' \longrightarrow 0.$$

我们定义 $S'' \times T$ 的子群 $g^*(T) = \{(y, x) \in S'' \times T \mid g(y) = \pi(x)\}$. 则有正合序列

$$0 \longrightarrow T' \longrightarrow g^*(T) \longrightarrow S'' \longrightarrow 0.$$

设 $T_1, T_2 \in \mathrm{Ext}_F(T'', T')$. 则 $T_1 \times T_2 \in \mathrm{Ext}_F(T'' \times T'', T' \times T')$. 令 $\Delta: T'' \to T'' \times T''$ 为对角线映射, $\mu:\ T' \times T' \to T'$ 为乘法映射. 定义

$$T_1 * T_2 = \Delta^* \mu_*(T_1 \times T_2) \in \mathrm{Ext}_F(T'', T'),$$

称之为 Baer 乘法. 在此乘法下 $\mathrm{Ext}_F(T'', T')$ 成为一个交换群 (参见 [334] VII, §1, no.1).

设正合序列 (3.48) 是定义在 F 上的. 我们称 F 有理映射 $\sigma:\ T'' \to T$ 为一个 F 交叉截面, 如果 $\pi\sigma = \mathrm{id}$. 我们用 $\mathrm{Ext}^*_F(T'', T')$ 记 $\mathrm{Ext}_F(T'', T')$ 中具有 F 交叉截面的扩张组成的子集.

如果我们取 $g^*(T)$ 为上述的 $S'' \times T$ 的子群, 则映射

$$\begin{aligned} \sigma'' : S'' &\longrightarrow g^*(T) \\ y &\longmapsto (y, \sigma g y) \end{aligned}$$

是一个交叉截面. 类似地如果 $f_*(T)$ 是上述的 $T \times S'$ 的商, 则映射

$$\begin{aligned} \sigma' : T'' &\longrightarrow f_*(T) \\ x &\longmapsto \overline{(\sigma x, 1)} \end{aligned}$$

(其中 $\overline{(\sigma x, 1)}$ 意为取商) 是一个交叉截面. 可以证明 $\mathrm{Ext}_F^*(T'', T')$ 构成 $\mathrm{Ext}_F(T'', T')$ 的子群 (参见 [313] Proposition 8).

现在我们转移到环面的特征标群.

命题 3.5.7 序列 (3.48) 正合当且仅当它的对偶

$$0 \longleftarrow X(T') \overset{{}^t\iota}{\longleftarrow} X(T) \overset{{}^t\pi}{\longleftarrow} X(T'') \longleftarrow 0 \tag{3.49}$$

正合.

证明 注意当序列 (3.49) 正合时, $\mathrm{Coker}\ {}^t\iota = 0$ 是平凡 p 无扭的; 又有 $X(T') \cong X(T)/\mathrm{Ker}\ {}^t\iota = \mathrm{Coker}\ {}^t\pi$ 是 $\mathbb{Z}$ 自由的, 当然也是 p 无扭的. 于是由命题 2.1.9 即得本命题. □

设 K/F 是有限 Galois 扩张, $G = \mathrm{Gal}(K/F)$. 以 $\mathcal{T}(K/F)$ 记定义在 F 上并且在 K 上分裂的环面的范畴. 此范畴的对偶范畴记为 $\mathcal{M}(K/F)$, 其对象都是有限生成的自由 $\mathbb{Z}$ 模, 同时是 G 模 (参见定理 2.2.5).

命题 3.5.8 如果序列 (3.48) 在 F 上正合, 则

$$T \in \mathcal{T}(K/F) \iff T' \text{ 和 } T'' \in \mathcal{T}(K/F).$$

证明 取有限 Galois 扩张 L/F 使得 $L \supseteq K$ 且 $T, T', T'' \in \mathcal{T}(L/F)$. 则 (3.49) 式作为 $G(L/F)$ 模序列是正合的. 设 $T \in \mathcal{T}(K/F)$, 这意味着 $G(L/F)$ 的子群 $G(L/K)$ 在 $X(T)$ 上作用平凡. 对于任一 $\xi' \in X(T')$, 我们有

$$\xi' = {}^t\iota(\xi) = {}^t\iota({}^\sigma\xi) = {}^\sigma({}^t\iota(\xi)) = {}^\sigma\xi', \quad \forall\, \sigma \in G(L/K).$$

因此 $T' \in \mathcal{T}(K/F)$. 对于任一 $\xi'' \in X(T'')$, 我们有

$${}^t\pi(\xi'') = {}^\sigma({}^t\pi(\xi'')) = {}^t\pi({}^\sigma\xi''), \quad \forall\, \sigma \in G(L/K).$$

由于 ${}^t\pi$ 是单射, 所以 $\xi'' = {}^\sigma\xi''$ $(\forall\, \sigma \in G(L/K))$. 于是 $T'' \in \mathcal{T}(K/F)$. 反之, 设 $T', T'' \in \mathcal{T}(K/F)$. 对于任一 $\xi \in X(T)$ 以及 $\sigma \in G(L/K)$, 设 $\sigma^N = 1$. 则 ${}^t\iota({}^\sigma\xi) = {}^\sigma({}^t\iota(\xi)) = {}^t\iota(\xi)$, 因此 ${}^\sigma\xi - \xi \in \operatorname{Ker} {}^t\iota = \operatorname{Im} {}^t\pi$. 令 ${}^\sigma\xi - \xi = {}^t\pi(\xi'')$. 由于 ${}^\sigma({}^t\pi(\xi'')) = {}^t\pi({}^\sigma\xi'') = {}^t\pi(\xi'')$, 故有 ${}^{\sigma^{i+1}}\xi - {}^{\sigma^i}\xi = {}^t\pi(\xi'')$ $(0 \leqslant i \leqslant N-1)$. 于是我们得到 $N\,{}^t\pi(\xi'') = 0$. 由于 $X(T)$ 是 $\mathbb{Z}$ 自由的并且 ${}^t\pi$ 是单射, 所以有 $\xi'' = 0$, 即 ${}^\sigma\xi = \xi$. 这意味着 $T \in \mathcal{T}(K/F)$. □

现在设 $T', T'' \in \mathcal{T}(K/F)$. 由命题 3.5.8 知 $T \in \mathcal{T}(K/F)$ $(\forall\, T \in \operatorname{Ext}_F(T'', T'))$. 过渡到特征标模, 即映射 $T \to X(T)$ 给出集合 $\operatorname{Ext}_F(T'', T')$ 和 $\mathrm{E}(X(T'), X(T''))$ 之间的双射, 这里 $\mathrm{E}(X(T'), X(T''))$ 是通常 G 模意义下的 $X(T'')$ 被 $X(T')$ 扩张的等价类的集合. 集合 $\mathrm{E}(X(T'), X(T''))$ 在 Baer 乘法下构成一个交换群, 此群同构于 $\operatorname{Ext}^1_G(X(T'), X(T''))$ (参见 [69] Ch. XIV, 1). $\mathcal{T}(K/F)$ 和 $\mathcal{M}(K/F)$ 之间的典范对偶给出同构

$$\operatorname{Ext}_F(T'', T') \cong \operatorname{Ext}^1_G(X(T'), X(T'')). \tag{3.50}$$

命题 3.5.9 *存在同构*

$$\operatorname{Ext}^1_G(X(T'), X(T'')) \cong H^1(G, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(T'), X(T''))). \tag{3.51}$$

证明 任意给定 $X(T) \in \operatorname{Ext}^1_G(X(T'), X(T''))$. 此即给定了 G 同态的一个正合序列

$$0 \longrightarrow X(T') \longrightarrow X(T) \longrightarrow X(T'') \longrightarrow 0, \tag{3.52}$$

我们得到一个序列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(T'), X(T'')) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(T), X(T'')) \longrightarrow \\ \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(T''), X(T'')) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

此序列分裂 (因为序列 (3.52) 在 $\mathbb{Z}$ 上分裂). 由此我们有上同调序列

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \operatorname{Hom}_G(X(T), X(T'')) \longrightarrow \operatorname{Hom}_G(X(T''), X(T'')) \stackrel{\delta}{\longrightarrow} \\ H^1(G, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(T'), X(T''))) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

将给定的 $X(T)$ 对应于此同调序列中 $X(T'')$ 上的恒同映射在 δ 下的像 $\varepsilon = \delta(\mathrm{id}|_{X(T'')})$, 就给出 (3.51) 式所示的同构. □

推论 3.5.10 我们有同构

$$\operatorname{Ext}_F(T'', T') \cong H^1(G, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(T'), X(T''))) \tag{3.53}$$

和

$$\operatorname{Ext}_F(T'', \mathbb{G}_{\mathrm{m}}) \cong H^1(G, X(T'')). \tag{3.54}$$

现在设 x'' 是定义在 F 上的 X'' 的一般点. 令 K 为 T' 在 F 上的有限 Galois 分裂域. 我们可以把 $G = \mathrm{Gal}(K/F)$ 与由常数域扩张 K/F 所诱导的函数域扩张 $K(x'')/F(x'')$ 的 Galois 群等同起来.

命题 3.5.11 *存在正合序列*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^*_F(T'', T') \longrightarrow \mathrm{Ext}_F(T'', T') \longrightarrow H^1(G, T'(K(x''))). \tag{3.55}$$

证明 考虑下面的交换正合图:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & \mathrm{Ext}(T'',T') & & \\
 & & & & & & \downarrow\cong & & \\
\cdots \longrightarrow & \mathrm{Hom}_G(\widehat{T},\widehat{T''}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_G(\widehat{T''},\widehat{T''}) & \xrightarrow{\delta} & H^1(G,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\widehat{T'},\widehat{T''})) & \longrightarrow \cdots \\
 & \downarrow\alpha_1 & & \downarrow\alpha_2 & & \downarrow\alpha_3 & \\
\cdots \longrightarrow & \mathrm{Hom}_G(\widehat{T},L^\times) & \xrightarrow{\beta} & \mathrm{Hom}_G(\widehat{T''},L^\times) & \xrightarrow{\delta} & H^1(G,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\widehat{T'},L^\times)) & \longrightarrow \cdots \\
 & \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong & \\
\cdots \longrightarrow & T(F(x'')) & \xrightarrow{\pi} & T''(F(x'')) & \longrightarrow & H^1(G,T'(K(x''))) & \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

其中 $\widehat{S}$ 表示 $X(S)$ $(S = T, T', T'')$, $L = K(x'')$. T'' 的特征标在一般点 x'' 处的取值诱导出典范同态 $\xi'' : \widehat{X''} \to L^\times$. 上图中的竖直箭头 α_i 就是由 ξ'' 所诱导的. 由定义知, $T \in \mathrm{Ext}_F(T'', T')$ 有一个 F 交叉截面当且仅当 ξ'' 在 π 的像中, 即当且仅当 ξ'' 在 β 的像中. 由正合性, 这又当且仅当 $\delta\xi'' = 0$. 由于 $\xi'' = \alpha_2(\mathrm{id}|_{\widehat{T''}})$, 右边的方块的交换性说明 $\delta\xi'' = \alpha_3\varepsilon$, 其中 $\varepsilon \in H^1(G, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\widehat{T'}, \widehat{T''}))$ 是我们的扩张 T 所在的类. □

命题 3.5.12 *设 T', T'' 是定义在 F 上的环面. 如果 $T' \in \mathcal{T}(K/F)$ 并且 $X(T)$ 是 $G(K/F)$ 投射的, 则每个 $T \in \mathrm{Ext}_F(T'', T')$ 都有交叉截面.*

证明 由于 $X(T')$ 是 $G = G(K/F)$ 投射的, 所以

$$T'(K(x'')) = \mathrm{Hom}(X(T'), K(x'')^\times)$$

是弱投射的 (x'' 是 X'' 的一般点). 于是 $H^n(G, T'(K(x''))) = 0$ $(\forall\, n > 0)$. □

3.5.8 环面正合序列的 adele 点

最后我们给出有关环面的正合序列的 adele 点的一些结果. 我们固定一个定义在域 F 上并且在有限 Galois 扩张 K/F 上分裂的环面的正合序列

$$0 \longrightarrow T' \xrightarrow{\iota} T \xrightarrow{\pi} T'' \longrightarrow 0 \tag{3.56}$$

记 $G = \mathrm{Gal}(K/F)$. 对于任一 G 模 A, 用 $H^n(A)$ 记 $H^n(G, A)$.

与序列 (3.56) 相对应的是对偶正合序列

$$0 \longrightarrow X(T'') \xrightarrow{t_\pi} X(T) \xrightarrow{t_\iota} X(T') \longrightarrow 0 \tag{3.57}$$

此序列作为 G 模序列是正合的. 由于 $X(T)$, $X(T')$, $X(T'')$ 都是 $\mathbb{Z}$ 自由的, 所以对于任一 $\mathbb{Z}$ 模 A, 下面的序列正合:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(X(T'), A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X(T), A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X(T''), A) \longrightarrow 0. \tag{3.58}$$

在典范的等同

$$T(K) = \mathrm{Hom}(X(T), K^\times), \quad 和 \quad T(\mathbb{A}_K) = \mathrm{Hom}(X(T), J_K)$$

的意义下, 我们有正合序列

$$0 \longrightarrow T'(K) \longrightarrow T(K) \longrightarrow T''(K) \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow T'(\mathbb{A}_K) \longrightarrow T(\mathbb{A}_K) \longrightarrow T''(\mathbb{A}_K) \longrightarrow 0.$$

在序列 (3.58) 中取 $A = C_K$, 则得到正合序列

$$0 \longrightarrow C_K(T') \longrightarrow C_K(T) \longrightarrow C_K(T'') \longrightarrow 0. \tag{3.59}$$

取 (3.59) 式的上同调, 则得到正合序列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow C_K(T')^G \longrightarrow C_K(T)^G \xrightarrow{\pi^*} C_K(T'')^G \\ \longrightarrow H^1(C_K(T')) \longrightarrow H^1(C_K(T)) \longrightarrow \cdots \end{aligned} \tag{3.60}$$

由此我们得到

$$\mathrm{Coker}\, \pi^* \cong \mathrm{Ker}(H^1(C_K(T')) \longrightarrow H^1(C_K(T))). \tag{3.61}$$

另一方面, 由正合序列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \hat{H}^0(C_K(T')) \longrightarrow \hat{H}^0(C_K(T)) \longrightarrow \hat{H}^0(C_K(T'')) \\ \longrightarrow H^1(C_K(T')) \longrightarrow H^1(C_K(T)) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

知

$$\mathrm{Ker}(H^1(C_K(T')) \longrightarrow H^1(C_K(T))) \cong \mathrm{Coker}(\hat{H}^0(C_K(T)) \longrightarrow \hat{H}^0(C_K(T''))).$$

其中右端的群是有限群 (因为 $\hat{H}^0(C_K(T))$ 是有限群 (见 3.5.3 节). 于是我们得知 $\operatorname{Coker}\pi^*$ 是有限群.

对于任一同态 α, 令

$$q(\alpha) = \frac{|\operatorname{Coker}\alpha|}{|\operatorname{Ker}\alpha|}.$$

我们将证明 Ono 的下述定理 (见 [281]):

定理 3.5.13　令 μ 为典范映射 $T''(F)/\pi(T(F)) \longrightarrow T''(\mathbb{A}_F)/\pi(T(\mathbb{A}_F))$. 则

(1)　$|\operatorname{Coker}\mu| < \infty$。

(2)　$|\operatorname{Ker}\mu| < \infty$。

(3)　$g(\mu)$

$$= \frac{|\operatorname{Ker}(H^1(T(K)) \to H^1(T(\mathbb{A}_K))| \cdot |\operatorname{Ker}(H^1(C_K(T')) \to H^1(C_K(T)))|}{|\operatorname{Ker}(H^1(T'(K)) \to H^1(T'(\mathbb{A}_K))| \cdot |\operatorname{Ker}(H^1(T''(K)) \to H^1(T''(\mathbb{A}_K))|}.$$

证明　考虑下面的图:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \operatorname{Ker}\pi = T'(F) & \longrightarrow & \operatorname{Ker}\pi_{\mathbb{A}} = T'(\mathbb{A}_F) & \xrightarrow{\nu} & \operatorname{Ker}\tilde{\pi} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & T(F) & \longrightarrow & T(\mathbb{A}_F) & \longrightarrow & C_F(T) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\mathbb{A}}} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\pi}} & & \\
0 & \longrightarrow & T''(F) & \longrightarrow & T''(\mathbb{A}_F) & \longrightarrow & C_F(T'') & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \operatorname{Coker}\pi & \xrightarrow{\mu} & \operatorname{Coker}\pi_{\mathbb{A}} & \longrightarrow & \operatorname{Coker}\tilde{\pi} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

其中的所有同态都是自然的. 此图的交换性与正合性都是容易验证的 (参见 [69] Chap. III, Lemma 3.2). 于是由蛇形引理有正合序列

$$0 \to T'(F) \to T'(\mathbb{A}_F) \xrightarrow{\nu} \operatorname{Ker}\tilde{\pi} \to \operatorname{Coker}\pi \xrightarrow{\mu} \operatorname{Coker}\pi_{\mathbb{A}} \to \operatorname{Coker}\tilde{\pi} \to 0$$

由此得知

$$\operatorname{Coker}\mu \cong \operatorname{Coker}\tilde{\pi}, \tag{3.62}$$

$$\operatorname{Ker}\mu \cong \operatorname{Coker}\nu. \tag{3.63}$$

其次应用序列的一部分可以得到下面的正合交换图:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker}\,\tilde{\pi} & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathrm{Ker}\,\pi^* = C_K(T')^G & \xrightarrow{\nu} & \mathrm{Ker}\,\lambda & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C_F(T) & \longrightarrow & C_K(T)^G & \longrightarrow & \mathrm{Coker}\,\alpha & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\tilde{\pi}} & & \downarrow{\scriptstyle\pi^*} & & \downarrow{\scriptstyle\lambda} & & \\
0 & \longrightarrow & C_F(T'') & \longrightarrow & C_K(T'')^G & \longrightarrow & \mathrm{Coker}\,\alpha'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \mathrm{Coker}\,\tilde{\pi} & \xrightarrow{\mu} & \mathrm{Coker}\,\pi^* & \longrightarrow & \mathrm{Coker}\,\lambda & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

于是有正合序列

$$
0 \to \mathrm{Ker}\,\tilde{\pi} \to \mathrm{Ker}\,\pi^* \to \mathrm{Ker}\,\lambda \to \mathrm{Coker}\,\tilde{\pi} \to \mathrm{Coker}\,\pi^* \to \mathrm{Coker}\,\lambda \to 0,
$$

或

$$
0 \longrightarrow \mathrm{Coker}\,\varepsilon \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\lambda \longrightarrow \mathrm{Coker}\,\tilde{\pi} \longrightarrow \mathrm{Coker}\,\pi^* \longrightarrow \mathrm{Coker}\,\lambda \longrightarrow 0. \tag{3.64}
$$

我们已经知道 $\mathrm{Coker}\,\alpha$, $\mathrm{Coker}\,\alpha''$ 都是有限的 (见 3.5.4 节 的末尾), 所以 $\mathrm{Ker}\,\lambda$, $\mathrm{Coker}\,\lambda$ 是有限的. 于是有

$$
q(\lambda) = \frac{|\,\mathrm{Coker}\,\lambda|}{|\,\mathrm{Ker}\,\lambda|} = \frac{|\,\mathrm{Coker}\,\alpha''|}{|\,\mathrm{Coker}\,\alpha|}. \tag{3.65}
$$

另一方面我们又知道 $\mathrm{Coker}\,\pi^*$ 有限 (见 (3.61) 式). 由 (3.64) 式即知 $\mathrm{Cor}\,\varepsilon$ 和 $\mathrm{Coker}\,\tilde{\pi}$ 有限. 换句话说, (3.64) 式中出现的所有的群都有限. 于是有

$$
|\,\mathrm{Coker}\,\varepsilon| \cdot |\,\mathrm{Coker}\,\tilde{\pi}| \cdot |\,\mathrm{Coker}\,\lambda| = |\mathrm{Ker}\,\lambda| \cdot |\,\mathrm{Coker}\,\pi^*|. \tag{3.66}
$$

特别地由 (3.62) 式我们有 $\mathrm{Coker}\,\mu \cong \mathrm{Coker}\,\tilde{\pi}$. 这就证明了 (1).

其次考虑图 (其中 $G = \mathrm{Gal}(K/F)$)

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & & & \\
 & & & & \searrow & & & & \\
 & & & & \mathrm{Ker}\,\tilde{\pi} & & & & \\
 & & & {\scriptstyle\nu}\nearrow & & \searrow{\scriptstyle\varepsilon} & & & \\
0 \longrightarrow & \mathrm{Ker}\,\pi & \longrightarrow & \mathrm{Ker}\,\pi_{\mathbb{A}} & \xrightarrow[\delta]{\quad} & \mathrm{Ker}\,\pi^* & \longrightarrow & H^1 & \\
 & \| & & \| & & \| & & & \\
 & T'(F) & & T'(\mathbb{A}_F) & & C_K(T')^G & & &
\end{array}
$$

显然有 $\delta = \varepsilon \circ \nu$. 由于 $\operatorname{Coker}\delta$ 有限且 ε 是单射, 所以 $\operatorname{Coker}\nu$ 和 $\operatorname{Coker}\varepsilon$ 有限. 因此

$$|\operatorname{Coker}\delta| = |\operatorname{Coker}\nu||\operatorname{Coker}\delta|.$$

由 (3.63) 式即知 $\operatorname{Ker}\mu$ 有限, 这就证明了 (2), 并且

$$|\operatorname{Ker}\mu| = |\operatorname{Coker}\nu| = \frac{|\operatorname{Coker}\delta|}{|\operatorname{Coker}\delta|}. \tag{3.67}$$

由 (3.62), (3.65), (3.66), (3.67) 式我们得到

$$\begin{aligned} q(\mu) = \frac{|\operatorname{Coker}\mu|}{|\operatorname{Ker}\mu|} &= \frac{|\operatorname{Coker}\varepsilon|}{|\operatorname{Coker}\delta|}\frac{|\operatorname{Ker}\lambda|}{|\operatorname{Coker}\lambda|}\frac{|\operatorname{Coker}\pi^*|}{|\operatorname{Coker}\varepsilon|} \\ &= \frac{|\operatorname{Coker}\alpha|}{|\operatorname{Coker}\delta||\operatorname{Coker}\alpha''|}|\operatorname{Coker}\pi^*|. \end{aligned}$$

由此立得结论 (3). □

第四章　Tamagawa 数

本章将研究代数环面的一个算术不变量 ——Tamagawa (玉河恒夫) 数. 我们这里将再次介绍 [280] 及 [281] 的某些结果. 关于简约代数群的 Tamagawa 数的理论, 建议读者参看综述文章 [285], [286], [246] 及 [83]. Cassels 在他的介绍椭圆曲线的著名文章 [75] 里讨论了椭圆曲线的 Tamagawa 数. 关于 Tamagawa 数的当今难题：Bloch-Kato 猜想 (见 [45]). Kottwitz 在 [214] 讨论了环面复形的 Tamagawa 数.

这里的环面都是定义在代数数域 F 上的, 并且在一个有限 Galois 扩张 K/F 上分裂.

4.1　测　　度

4.1.1　Tamagawa 测度

迄今为止, 我们只用到了环面的拓扑与上同调. 现在我们将使用环面的测度. 当环面是 $K^\times$ 时, 这些测度的计算是 Tate 的博士论文 (见 [76]).

首先我们要在局部紧域 F_v 以及局部紧环 J_F 上把测度正规化 (关于拓扑群的测度论可见：[9], 第二章).

我们按以下的原则选择 F_v 上的 Haar 测度 $\mathrm{d}x_v$：

(M1) 若 v 是非阿的, $F_v \supseteq \mathbb{Q}_p$, 取 Haar 测度 $\mathrm{d}x_v$ 使得以下等式成立：

$$\int_{O_v} \mathrm{d}x_v = N\delta_v^{-\frac{1}{2}},$$

其中 δ_v 是扩张 $F_v/\mathbb{Q}_p$ 的相对微分.

(M2) 若 $F_v = \mathbb{R}$, 取 $\mathrm{d}x_v$ 等于通常的 Haar 测度.

(M3) 若 $F_v = \mathbb{C}$, 取 $\mathrm{d}x_v$ 等于通常 Haar 测度的 2 倍.

然后再把 $F_v^\times$ 上的测度正规化, 使其满足

(M4) 若 v 是非阿的, 则

$$\mathrm{d}^\times x_v = NP_v(NP_v - 1)^{-1}\frac{\mathrm{d}x_v}{|x|_v}.$$

(M5) 若 v 是阿基米德的, 则

$$\mathrm{d}^{\times}x_v=\frac{\mathrm{d}x_v}{|x|_v}.$$

设 J_F^S 是 J_F 的子群, 它由 $J_F(S)$ 内满足 $a_v=1$ (对所有的 $v\in S$) 的元素 $a=(a_v)$ 组成. 则 J_F^S 典范同构于直积 $\prod_{v\notin S}U_v$, 且 $J_F(S)$ 可被表成有限直积 $J_F(S)=\left(\prod_{v\in S}K_v^{\times}\right)\times J_F^S$. 我们可在 $J_F(S)$ 上定义一个测度 $\mathrm{d}\mu_S=\left(\prod_{v\in S}\mathrm{d}^{\times}x_v\right)\cdot\mathrm{d}\mu^S$, 这里的 $\mathrm{d}\mu^S$ 是 J_F^S 上的直积测度 $\prod_{v\notin S}\mathrm{d}^{\times}x_v$. 由于对几乎所有的 v 有 $\int_{U_v}\mathrm{d}^{\times}x_v=N\delta_v^{-\frac{1}{2}}$, 上述测度是有意义的. 因为 $J_F(S)$ 是 J_F 的开子群, 可以确定 J_F 上的一个 Haar 测度 $\mathrm{d}\mu$ 使得在 $J_F(S)$ 上有 $\mathrm{d}\mu=\mathrm{d}\mu_S$. 不难验证, 如果 $S\subset S'$, 那么由 S' 构造出的 $\mathrm{d}\mu_{S'}$ 与由 S 构造出的 $\mathrm{d}\mu_S$ 在 $J_F(S)$ 上重合. 因此我们在 J_F 上选取的 $\mathrm{d}\mu$ 不依赖于集合 S. 把 $\mathrm{d}\mu$ 像征性地记为 $\prod_v\mathrm{d}^{\times}x_v$, 且称之为 J_F 上的典范限制直积测度. 用 F 的 Dedekind ζ 函数 $\zeta_F(s)$ 在 $s=1$ 处的留数去除 $\mathrm{d}\mu$, 就可得到 J_F 上的 **Tamagawa 测度** (Tamagawa measure), 即 $\mathrm{d}^{\times}x=\left(\mathrm{Res}_{s=1}\zeta_F(s)\right)^{-1}\mathrm{d}\mu$.

现在选取一个 $v_0\in S_\infty$. 用以下方式

$$t\longmapsto(\underset{\substack{\uparrow\\ v_0}}{t},1,1,\cdots)\qquad(v_0\ \text{是实的})$$

或

$$t\longmapsto(\underset{\substack{\uparrow\\ v_0}}{t^{\frac{1}{2}}},1,1,\cdots)\qquad(v_0\ \text{是复的})$$

把 $\mathbb{R}_+^{\times}$ 嵌入 J_F 作为闭子群. 则我们有同构

$$J_F\cong J_F^1\times\mathbb{R}_+^{\times}.\tag{4.1}$$

选取 J_F^1 上的一个 Haar 测度 $\mathrm{d}^{\times}y$ 使得

$$\mathrm{d}^{\times}x=\mathrm{d}^{\times}y\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

则众所周知有

$$\int_{J_F^1/F^{\times}}\mathrm{d}^{\times}y=1,\qquad\int_{\mathbb{A}_f/F}\mathrm{d}x=1,\tag{4.2}$$

这里的 $\mathrm{d}x$ 是典范限制直积测度 $\prod\mathrm{d}x_v$. (参见 Tate 的 thesis, 即 [76] 的 Chap. XV)

4.1.2　非奇异簇上的局部测度

设 V 是定义在 F 上的 d 维非奇异簇, ω 是定义在 F 上的代数 d 形式, 满足

(1) V 上处处均有 $\omega \neq 0$,

(2) ω 在 V 上全纯, 也就是说, 在点 $x^0 \in V$ 处选取局部坐标 $(x_1, \cdots, x_d)$ 后, 有

$$\omega = f(x)\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_d,$$

其中 $f(x)$ 是在 x^0 的邻域内有定义的有理函数, 它可被写成形式幂级数:

$$f(x) = \sum a_{(i)}(x_1 - x_1^0)^{i_1} \cdots (x_d - x_d^0)^{i_d}. \tag{4.3}$$

现在假设 $x^0 \in V(F_v)$. 则 f 是一个系数在 F_v 内的幂级数. 由于 x^0 是简单点, 根据隐函数定理, 存在 x^0 在 $V(F_v)$ 内的一个邻域 U, 使得

(1) $\psi : x \mapsto (x_1 - x_1^0, \cdots, x_d - x_d^0)$ 是 U 到 F_v^d 的原点的一个 v 进邻域上的同态;

(2) 幂级数展开 (4.3) 在 $\psi(U)$ 内收敛.

我们在 $\psi(U)$ 内有正测度 $|f(x)|_v(\mathrm{d}x_1)_v \cdots (\mathrm{d}x_n)_v$. 通过 ψ^{-1} 把它拉回到 U, 就可得到 U 上正测度 ω_v. 不难看出, 这两个测度在两个邻域 U 和 U' 重叠的地方是相同的, 因此我们得到了 $V(F_v)$ 上一个正确定义的测度 ω_v.

4.1.3　环面的 adele 点群上的典范测度

设 T 是定义在 F 上的 d 维环面, 并且在 K 上分裂. 设 ξ_i, $1 \leqslant i \leqslant d$, 是 $X(T) = X_K(T)$ 的基. 则以下微分形式 (它在 ξ_i 的不同取法下至多差一个符号):

$$\omega_T = \wedge_{i=1}^d \xi_i^{-1}\mathrm{d}\xi_i$$

是不变的, 且定义在 K 上. ω_T 称为 T 上的典范型. 如果 ω 是定义在 F 上的任意不变微分形式, 且在 T 上是最高次的, 则根据唯一性, 存在 $\gamma \in K$ 使得 $\omega = \gamma\omega_T$.

设 $\alpha : T \to T'$ 是 F 同源, 并设 ω' 是定义在 F 上的 T' 的不变微分形式. 假设 T' 也在 K 上分裂, ξ_i' $(1 \leqslant i \leqslant d)$ 是 $\chi(T')$ 的基. 由上述, 我们有 $\omega' = \gamma'\omega_{T'}$, $\gamma' \in K$. 我们把从 ω' 通过 α 得到的 T 上微分形式记为 $\delta\alpha(\omega')$. 显然 $\delta\alpha(\omega')$ 是不变的, 且定义在 F 上, 但它可能是平凡的. 由表达式 $\omega' = \gamma'\omega_{T'}$, 我们得到

$$\delta\alpha(\omega') = \gamma'\delta\alpha(\omega_{T'}) = \gamma' \wedge_i {}^t\alpha(\xi_i')^{-1}\mathrm{d}({}^t\alpha(\xi_i')) = \gamma'\nu(\alpha)\omega_T.$$

(参看 2.3.1 节) 因此 $\delta\alpha(\omega')$ 是非平凡的当且仅当 α 是可分的. 在这种情形下, $\omega^* = \gamma'\omega_T$ 也在 F 上有定义. 换句话说, 乘以分裂域里的一个因子后, 典范型 $\omega_T, \omega_{T'}$ 的定义域可以下降到 F.

设 μ_v 是定义在 $T(F_v)$ 上的 Haar 测度, 使得无限乘积 $\prod_{v<\infty}\mu_v(T(O_v))$ 绝对收敛, 则称形式乘积 $\prod_v \mu_v$ 绝对收敛, 它定义了 $T(\mathbb{A}_F)$ 上的一个 Haar 测度.

现在取 T 上一个具有最高次数且定义在 F 上的不变微分形式 ω. 则 ω 典范地诱导了 $T(F_v)$ 上的一个 Haar 测度 (参见 4.1.2 节). 由于 $\prod_v \omega_v(T(O_v))$ 并不总绝对收敛, 我们引入一组校正因子. 也就是说, 如果有一组数 $\Gamma=\{c_v\}$, 使得 $\mu_v=c_v\omega_v$ 在 $T(\mathbb{A})$ 上给出一个绝对收敛乘积 $\mu=\prod_v \mu_v$, 则称 Γ 是 ω 的校正因子. 根据 F 上的微分形式在相差 $F^\times$ 的一个因子的意义下唯一, 再利用 F 内的乘积公式, Γ 可以用作 F 上定义的任意微分形式的校正因子. 在这个情形下, 我们令

$$\omega_{A,F}=\prod_v c_v\omega_v,$$

且称之为 $T(\mathbb{A})$ 上关于 Γ 的典范测度.

4.1.4 典范校正因子组

我们要引进 ω 的一组校正因子.

假设 K_w/F_v 是一个不分歧 Galois 扩张, 使得 T 在上分裂. 则 Galois 群 $G_v=\mathrm{Gal}(K_w/F_v)$ 可被典范地等同于 $G_{(v)}=\mathrm{Gal}(k(w)/k(v))$. 根据命题 2.2.4, 当我们把 $G_{(v)}$ 等同于 G_v 时, 利用特征标模 $X(T^{(v)})$ 等于 $X(T)$ 这个条件, 可以定义 T 的模 v 约化 $T^{(v)}$. 由于我们有

$$T(O_v)=\mathrm{Hom}_{G_v}(X(T),U_v),$$

$$T^{(v)}(k(v))=\mathrm{Hom}_{G_v}(X(T),k(w)^\times),$$

典范同态 $U_v\to k(w)^\times=U_v/U_v^{(1)}$ 诱导了同态 $T(O_v)\to T^{(v)}(k(v))$. 利用上同调的平凡性以及通常的长正合列论证, 可以导出正合列:

$$0\longrightarrow T^{(1)}(O_v)\longrightarrow T(O_v)\longrightarrow T^{(v)}(k(v))\longrightarrow 0 \tag{4.4}$$

(这里如果 r 是一个正整数, 则令

$$U_v^{(r)}=\{\alpha\in U_v\mid \alpha\equiv 1 \mod p_v^r\},$$

$$T^{(r)}(O_v)=\psi^{-1}(\mathrm{Hom}(X(T),U_v^{(r)}))$$

ψ 是第三篇第二章命题 2.2.2(i) 给出的映射).

然后计算 $[T^{(v)}(k(v))]$. 假设 $[k(v)]=q$. 则 $G_{(v)}$ 是由 Frobenius 映射 $\sigma_v: x\mapsto x^q$ 生成的. 利用第二章命题 2.2.2(ii) 的符号, $x\in T^{(v)}(k(v))$ 当且仅当

$$\prod_j y_j^{g_{ij}(\sigma_v)}=y_i^q,\qquad 1\leqslant i\leqslant d,$$

其中 $y=f(x)$. 利用初等因子理论把 $q\cdot I-(g_{ij}(\sigma_v))$ 对角化, 可以得到

$$[T^{(v)}(k(v))]=\det\left(qI-{}^tg_{\sigma_v}\right). \tag{4.5}$$

另一方面, 根据 [401], Ch.2, Th.2.2.5, 设 S' 是一个充分大的位集, S' 包含 S_∞ 以及所有使 K/F 分歧的有限位, 则对于 S' 以外的 v, 有

$$[T^{(v)}(k(v))]=q^d\int_{T(O_v)}\omega_v. \tag{4.6}$$

现在设 $L(s,\chi_T,K/F)$ 是命题 2.2.2(ii) 给出的 $G=\mathrm{Gal}(K/F)$ 的表示 $\sigma\mapsto {}^tg_\sigma$ 所确定的 Artin L 函数, 其中 χ_T 是 G 模 $X(T)$ 的特征标 (参看 [226] 或 [76] Chap. VIII). 对 $v\notin S'$, 据定义, $L(s,\chi,K/F)$ 的 Euler 乘积展开的 v 分量为

$$L(s,\chi,K/F)=\det\left(I-q^{-s\,t}g_{\sigma_v}\right)^{-1}. \tag{4.7}$$

如果我们令

$$c_v=\begin{cases}1, & 若\ v\in S_\infty,\\ L_v(1,\chi,K/F), & 若\ v\notin S_\infty.\end{cases}$$

则由 (4.5), (4.6) 和 (4.7), 对 $v\notin S'$, 有

$$\int_{T(O_v)}c_v\omega_v=1.$$

所以 $\Gamma=\{c_v\}$ 是一个校正因子组. 我们称这个 Γ 为典范校正因子组.

4.1.5 玉河数

记 $r_T=\mathrm{rank}\,X_F(T)$, 由公式

$$\rho(\chi_T)=\lim_{s\to 1}(s-1)^{r_T}L(s,\chi_T,K/F) \tag{4.8}$$

可定义一个数 $\rho(\chi_T)=\rho(\chi_T,K/F)$. 利用典范校正因子组 $\{c_v\}$, 由公式

$$\mathrm{d}T_{\mathbb{A}}=\rho(\chi_T)^{-1}\prod_v c_v\omega_v \tag{4.9}$$

可定义 adele 群 $T(\mathbb{A})=T(\mathbb{A}_f)$ 上的典范测度 $\mathrm{d}T_{\mathbb{A}}$. 测度 $\mathrm{d}T_{\mathbb{A}}$ 既与 ω 的选取无关, 又与分裂域 K 无关. 设 $\mathrm{d}(T(\mathbb{A})/T^1(\mathbb{A}))$ 是利用 $X_F(T)$ 的一个基所定义的测度, $\mathrm{d}T(F)$ 是典范离散测度, 它在每个点上的测度是 1, 则使得下式能够成立

$$\mathrm{d}T_{\mathbb{A}}=\mathrm{d}(T(\mathbb{A})/T^1(\mathbb{A}))\mathrm{d}(T^1(\mathbb{A})/T(F))\mathrm{d}T(F)$$

的紧群 $T^1(\mathbb{A})/T(F)$ 的测度 ($T^1(\mathbb{A})/T(F)$ 是 $T(\mathbb{A})/T(F)$ 的唯一极大紧子群), 称为 T 在 F 上的**玉河数**, 即 **Tamagawa 数** (Tamagawa number) $\tau(T) = \tau_F(T)$.

由 (4.2), 我们有 $\tau_F(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}) = 1$, 这里 $\omega = \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

设 ξ_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, $r = r_T$ 是模 $X_F(T)$ 的一个基. 设 $\psi : T(\mathbb{A}) \to \mathbb{R}_+^r$ 是一个映射, 定义为

$$\psi : x \mapsto (|\xi_1(x)|, \cdots, |\xi_r(x)|),$$

这里的 $|*|$ 是 idele 模. 这个映射诱导了同构 $\tilde{\psi} : T(\mathbb{A})/T^1(\mathbb{A}) \cong (\mathbb{R}_+^\times)^r$. 记 $(\mathbb{R}_+^\times)^r$ 上的典范测度为 $\mathrm{d}t$, 即

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t_1}{t_1} \cdots \frac{\mathrm{d}t_r}{t_r}.$$

把通过 $\tilde{\psi}$ 从 $\mathrm{d}t$ 得到的 $T(\mathbb{A})/T^1(\mathbb{A})$ 上的测度记为 $\mathrm{d}t_T$. 由于 $T^1(\mathbb{A})/T(F)$ 是紧的, 数 $\tau(T)$ 可以表示成比值:

$$\tau(T) = \frac{\int_{T(\mathbb{A})/T(F)} b(\check{\psi}(x))\mathrm{d}T_{\mathbb{A}}}{\int_{(\mathbb{R}_+^\times)^r} b(t)\mathrm{d}t}, \tag{4.10}$$

这里 b 是 $(\mathbb{R}_+^\times)^r$ 上的任意可积函数.

4.1.6　不变量 $h(T)$ 和 $i(T)$

我们再引入环面的两个不变量, 并叙述 Ono[281] 的主定理.

设 F 是任意的域. 取一个环面 $T \in \mathcal{T}(K/F)$. 我们断言第一个上同调群 $H^1(G(K/F), X(T))$ 与 K 的选取无关. 为了证明这一点, 只需证明对满足 $L \supset K$ 的两个 Galois 分裂域 L, K, 有 $H^1(G(L/F), X(T)) \cong H^1(G(K/F), X(T))$. 在这种情形下, 有以下正合列 (膨胀 – 限制序列):

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^1(G(K/F), X(T)^{G(L/K)}) &\xrightarrow{\text{inf}} H^1(G(L/F), X(T)) \\ &\xrightarrow{\text{res}} H^1(G(L/K), X(T)). \end{aligned}$$

由于 $G(L/K)$ 平凡地作用于 $X(T)$ 上, 立即可见 “inf” 导出了所需的同构. 所以我们可令

$$h(T) = h_F(T) = [H^1(G(K/F), X(T))].$$

在 3.5 节 公式 (3.39) 我们考虑了单射

$$\alpha : C_F(T) \longrightarrow C_K(T)^G, \qquad G = \mathrm{Gal}(K/F),$$

并且证明了

$$\mathrm{Coker}\,\alpha \cong \mathrm{Ker}(H^1(T(K)) \longrightarrow H^1(T(\mathbb{A}_K))$$

是有限的. 以下用 $H^1(T(K))$ 记 $H^1(G(K/F),T(K))$ 等. 现在我们要验证这个群与分裂域 K 的选取无关. 为此, 取一个有限 Galois 分裂域 L/F 使得 $L\supset K$. 考虑以下具有正合行的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & H^1(G(K/F),T(L)^{G(L/K)}) & \longrightarrow & H^1(G(L/F),T(L)) & \longrightarrow & H^1(G(L/K),T(L)) & \longrightarrow \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & H^1(G(K/F),T(\mathbb{A}_L)^{G(L/K)}) & \longrightarrow & H^1(G(L/F),T(\mathbb{A}_L)) & \longrightarrow & H^1(G(L/K),T(\mathbb{A}_L)) & \longrightarrow \cdots \end{array}$$

这里我们有 $T(L)^{G(L/K)}=T(K)$, $T(\mathbb{A}_L)^{G(L/K)}=T(\mathbb{A}_K)$. 此外, 根据 Hilbert 定理 90, 我们有 $H^1(G(L/K),T(L))=H^1(G(L/K),T(\mathbb{A}_L))=0$. 因此可得同构

$$\mathrm{Ker}(H^1(T(K))\longrightarrow H^1(T(\mathbb{A}_K)))\cong \mathrm{Ker}(H^1(T(L))\longrightarrow H^1(T(\mathbb{A}_L))),$$

并且可以令

$$i(T)=i_F(T)=[\mathrm{Coker}\,\alpha]=[\mathrm{Ker}(H^1(T(K))\longrightarrow H^1(T(\mathbb{A}_K)))].$$

定理 4.1.1(Ono)　$\tau(T)i(T)=h(T)$.

注意: 不变量 $\tau(T)$ 是纯算术的, $h(T)$ 是纯代数的, 而 $i(T)$ 则介乎其间. Ono 的这个定理给出了它们的联系.

4.2　函子性质

4.2.1　具有函子性质的集合 Φ

设 F 是代数数域, $\overline{F}$ 是 F 的代数闭包. Galois 群 $G(F)=G(\overline{F}/F)$ 连续地作用在 $X(T)$ 上 (关于 $G(F)$ 的 Krull 拓扑以及 $X(T)$ 的离散拓扑).

用 $\mathcal{T}(F)$ 记定义在 F 上的环面的范畴, $\mathcal{M}(F)$ 记有限生成 $\mathbb{Z}$ 自由的连续 $G(F)$ 模的范畴. 则 $\mathcal{T}(F)$ (或相应地, $\mathcal{M}(F)$) 是 $\mathcal{T}(K/F)$ (或相应地, $\mathcal{M}(K/F)$) 的并集, 其中 K 取遍所有的有限 Galois 子扩域. 由对偶性可知映射 $T\to X(T)$ 给出了 $\mathcal{T}(F)$ 与 $\mathcal{M}(F)$ 的对偶间的同构. 设 F_0 是 F 的子域, 使得 F/F_0 是有限可分的. 与 Weil 映射

$$R_{F/F_0}:\mathcal{T}(F)\longrightarrow \mathcal{T}(F_0)$$

对应的是诱导映射

$$\mathrm{Ind}_{F_0}^F: M\longrightarrow \mathbb{Z}[G(F_0)]\otimes_{\mathbb{Z}[G(F)]}M,\qquad M\in\mathcal{M}(F).$$

现在我们把满足下述条件的映射 f 的集合记为 Φ, 对于每个代数数域 F, 映射 f 指定一个定义在 $\mathcal{T}(F)$ 上的正值函数 f_F, 它具有以下性质:

(Φ1) 对于某个 K, $T \in \mathcal{T}(K/F)$, 且 $X(T)$ 是 $G(K/F)$ 投射时, 有 $f_F(T) = 1$,

(Φ2) $f_F(T \times T') = f_F(T) f_F(T')$,

(Φ3) $f_{F_0} \circ \mathrm{R}_{F/F_0} = f_F$.

如果 T 定义在 F 上, 则对 $f \in \Phi$, 我们认为 $f(T)$ 取值 $f_F(T)$. 对于模 $M \in \mathcal{M}(F)$ 以及 $f \in \Phi$, 我们令 ${}^t f(M) = f(T)$, 其中 $M = X(T)$, $T \in \mathcal{T}(F)$. 根据典范对偶性, 这个定义是有意义的. 本节的目的是证明 $\tau(T)$, $h(T)$, $i(T)$ 均属于 Φ.

4.2.2 玉河数的函子性质

考虑 $\tau(T)$. 对 $\Gamma = \{c_v\}$, 令

$$\gamma(T, K/F) = \frac{\int_{T(\mathcal{A})/T(F)} b(\psi(x)) \mathrm{d}\omega_{\mathcal{A},\Gamma}}{\int_{(\mathbb{R}_+^\times)^r} b(t) \mathrm{d}t}.$$

从 (4.9), (4.10), 我们得到

$$\tau_F(T) = \frac{\gamma(T, K/F)}{\rho(\chi_T, K/F)}. \tag{4.11}$$

从 L 函数的定义立即可得

$$\rho(\chi_T + \chi_{T'}, K/F) = \rho(\chi_T, K/F) \rho(\chi_{T'}, K/F).$$

我们也有 $X(T \times T') = X(T) + X(T')$, $X_K(T \times T') = X_K(T) + X_K(T')$. 再考虑到乘积上的测度 $\omega_{\mathbb{A},\Gamma}$ 是这样的测度的乘积, 可得

$$\gamma(T \times T', K(F)) = \gamma(T, K/F) \gamma(T', K/F).$$

从 (4.11) 就可得到 (Φ2): $\tau(T \times T') = \tau(T) \tau(T')$.

记 $G_0 = \mathrm{Gal}(K/F_0)$, $T_0 = R_{F/F_0}(T)$. 回忆起 2.2 节末尾的 $X(T_0) = \mathrm{Ind}_G^{G_0} X(T)$. 这意味着 $\chi_{T_0} = \mathrm{Ind}_G^{G_0} \chi_T$. 现在

$$\rho(\chi_{T_0}, K/F_0) = \rho(\chi_T, K/F)$$

可从

$$L(s, \chi_{T_0}, K/F_0) = \rho(\chi_T, K/F) \tag{4.12}$$

以及出现在 χ_{T_0} 及 χ_T 内的主特征标的个数相同 (可从 Frobenius 互反性得出) 这些事实得到. 等式 (4.12) 也蕴含 T_0 的典范校正因子 $\Gamma_0 = \{c_{v_0}\}$ 与 T 的因子 $\Gamma = \{c_v\}$ 通过关系式 $c_{v_0} = \prod_{v|v_0} c_v$ 相互联系. 设 $\{\sigma_i\}$ 是 F 到 $\overline{F_0}$ 的同构. 定义

$$\omega_0 = \wedge_{\sigma_i}(\tilde{\rho}^{\sigma_i})^*\omega^{\sigma_i},$$

其中 $\tilde{\rho}: T_0 \to T$ 是命题 2.2.6 给出的同态.

按照 [401], Ch.1, 1.3 节, 存在典范同构

$$T_0((F_0)_{v_0}) \cong \prod_{v|v_0} T(F_v), \tag{4.13}$$

$$T_0(\mathbb{A}_0) \cong T(\mathbb{A}), \tag{4.14}$$

(这里 $\mathbb{A}_0 = \mathbb{A}_{F_0}$, $\mathbb{A} = \mathbb{A}_F$). 此外, (4.13) 以及极大紧性蕴含

$$T_0(O_{(F_0)_{v_0}}) \cong \prod_{v|v_0} T(O_{F_v}). \tag{4.15}$$

从 (4.14) 可得

$$T_0^1(\mathbb{A}_0) \cong T^1(\mathbb{A}), \tag{4.16}$$

由命题 2.2.6 可得

$$X_{F_0}(T_0) \cong X_F(T). \tag{4.17}$$

我们也知道典范同构 (4.14) 关于 $\omega_{\mathbb{A},\Gamma}$ 与 $(\omega_0)_{\mathbb{A}_0,\Gamma_0}$ 是保测度的 (参见 [401], Ch.2, Th.2.3.2). 注意到 (4.17) 也蕴含典范同构

$$T_0(\mathbb{A}_0)/T_0^1(\mathbb{A}_0) \cong T(\mathbb{A})/T^1(\mathbb{A})$$

关于相应的测度 $\mathrm{d}t_{T_0}$, $\mathrm{d}t_T$ 是保测度的. 所以必须有

$$\gamma(R_{F/F_0}(T), K/F_0) = \gamma(T, K/F).$$

因此

$$\tau_{F_0}(R_{F/F_0}(T)) = \tau_F(T)$$

(对于可分的 F/F_0). 这就是 (Φ3).

为证 (Φ1), 取一个 $T \in \mathcal{T}(K/F)$ 使得 T 是 $G(K/F)$ 投射的. 令 $G = G(K/F)$. 用 $\mathcal{P}$ (相应地, $\mathcal{F}$) 记所有有限生成的 $\mathbb{Z}[G]$ 投射 (相应地, $\mathbb{Z}[G]$ 自由) 模的集合, 用 $\mathcal{C}(\mathbb{Z}[G])$ 记投射类群 (参见 [312] §6). 假设 $M, M' \in \mathcal{P}$ 在同一个投射类. 根据定义, 存在 $F, F' \in \mathcal{F}$ 使得 $M + F \cong M' + F'$. 与 F, F' 对应的环面是某些 $R_{K/F}(\mathbb{G}_m)$ 的乘积. 由于 $\tau(R_{K/F}(\mathbb{G}_m)) = 1$, 立即可得 ${}^t\tau(M) = {}^t(M')$. 所以 ${}^t\tau$ 是一个类函数. 此外, 容易看出, ${}^t\tau$ 给出了从 $\mathcal{C}(\mathbb{Z}[G])$ 到正实数乘法群 $\mathbb{R}_+^\times$ 内的同态. 由于 $\mathcal{C}(\mathbb{Z}[G])$ 是有限群 (参见 [365] Prop. 9.1), 因此对所有的 $M \in \mathcal{P}$ 有 ${}^t\tau(M) = 1$, 即 $\tau(T) = 1$. 这样我们验证了 $\tau \in \Phi$.

4.2.3 $h(T)$ 和 $i(T)$ 的函子性质

显然 $h_F(T)$ 满足条件 ($\Phi1$) 和 ($\Phi2$). ($\Phi3$) 则可从 “半局部理论” 得到.

为了验证 $i \in \Phi$, 首先假设 $T \in \mathcal{T}(K/F)$ 以及 $X(T)$ 是 $G(K/F)$ 投射的. 则 $T(K) = \mathrm{Hom}(X(T), K^\times)$ 是弱 $G(K/F)$ 投射的, 这样就得到了 ($\Phi1$). ($\Phi2$) 是显然的. 最后选 K 使得 $T \in \mathcal{T}(K/F)$ 且 K/F_0 是 Galois 扩张. 令 $G_0 = \mathbb{Z}[G(K/F_0)]$, $G = \mathbb{Z}[G(K/F)]$. 则有自然同构:

$$\begin{aligned} H^1(G(K/F_0), R_{F/F_0}(T)(K)) &= H^1(G(K/F_0), \mathrm{Hom}(\mathrm{Ind}_{F_0}^F(X(T), K^\times))) \\ &= H^1(G(K/F_0), \mathrm{Hom}(G_0 \otimes_G X(T), K^\times)) \\ &\cong H^1(G(K/F_0), \mathrm{Hom}_\Gamma(G_0, \mathrm{Hom}(X(T), K^\times))) \\ &\cong H^1(G(K/F), \mathrm{Hom}(X(T), K^\times)) \\ &= H^1(G(K/F), T(K)). \end{aligned}$$

类似地可有

$$H^1(G(K/F_0), R_{F/F_0}(T)(\mathbb{A}_K)) \cong H^1(G(K/F), T(\mathbb{A}_K)).$$

立即可得 ($\Phi3$).

4.3 正合列的不变量

4.3.1 环面正合列的 h 不变量

我们要把不变量 τ, h, i 扩展到环面的正合序列. 设

$$0 \longrightarrow T' \stackrel{\iota}{\longrightarrow} T \stackrel{\pi}{\longrightarrow} T'' \longrightarrow 0 \tag{4.18}$$

是定义在代数数域 F 上的环面的正合列, 记为 E. 对于映射 $f \in \Phi$ (见 4.2.1 节), 我们定义函数 $f(E)$ 为一个交错积:

$$f(E) = \frac{f(T')f(T'')}{f(T)}.$$

4.3.2 环面正合列的玉河数

让我们考察 $\tau(E)$. 先证明一个引理.

引理 4.3.1 $\tau(T(\mathbb{A}_F))$ 在 $T''(\mathbb{A}_F)$ 内是开的.

证明　我们必须对几乎所有的 v 证明 $\pi(T(O_v))=T''(O_v)$. 这可从以下论断推导出来：当有限位 v 关于 K/F 不分歧时，$\pi:T(O_v)\to T''(O_v)$ 是满的. 这里的 K 是 T,T',T'' 在 F 上的公共 Galois 分裂域. 以 w 记 K 在 v 上的位，且令 $G_v=\mathrm{Gal}(K_w/F_v)$. 已给的 G_v 模序列引出了一个正合列：

$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}(X(T'),U_w)\longrightarrow \mathrm{Hom}(X(T),U_w)\longrightarrow \mathrm{Hom}(X(T''),U_w)\longrightarrow 0,$$

这里 U_w 表示 K_w 的单位群. 过渡到上同调，可得正合列

$$\begin{aligned}0\longrightarrow \mathrm{Hom}_{G_v}(X(T'),U_w)&\longrightarrow \mathrm{Hom}_{G_v}(X(T),U_w)\\ &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{G_v}(X(T''),U_w)\longrightarrow H^1(G_v,\mathrm{Hom}(X(T'),U_w))\longrightarrow\cdots\end{aligned}$$

回忆起 $\mathrm{Hom}_{G_v}(X(T),U_w)=T(O_v)$. 由于 U_w 的上同调是平凡的，从 Nakayama 的结果可知 $\mathrm{Hom}(X(T'),U_w)$ 也是具有平凡上同调 (参见第一章 1.1.4 节). 特别，$H^1(G_v,\mathrm{Hom}(X(T'),U_w))=0$ 以及 $\pi:T(O_v)\to T''(O_v)$ 是满的.

现在回到 (4.18)，根据定理 3.5.13，有以下两个有限性性质：

(A1) $[T''(\mathbb{A}):\pi(T(\mathbb{A}))T''(F)]$ 有限，

(A2) $[\pi T(\mathbb{A})\cap T''(F):\pi T(F)]$ 有限.

设 T, T', T'' 是 $\mathcal{T}(K/F)$ 内的环面，$G=G(K/F)$. 分别取 $X_F(T)$, $X_F(T')$, $X_F(T'')$ 的基 $(\xi_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$，$(\xi'_i)_{r''+1\leqslant i\leqslant r}$，$(\xi''_i)_{1\leqslant i\leqslant r''}$，使得 $\xi_i={}^t\pi(\xi''_i)$, $1\leqslant i\leqslant r''$. 则有

$${}^t\iota(\xi_i)=\sum_{j=r''+1}^{r}c_{ij}\xi'_j,\qquad r''+1\leqslant i\leqslant r,$$

以及

$$[\mathrm{Coker}\,{}^t\iota^G]=\pm\det(c_{ij}).$$

从 (4.10) 可得

$$\tau(E)=\frac{\int_{T'(\mathbb{A})/T'(F)}b'(\psi'(x'))\mathrm{d}T'_{\mathbb{A}}\int_{(\mathbb{R}_+^\times)^r}b(t)\mathrm{d}t\int_{T''(\mathbb{A})/T''(F)}b''(\psi''(x''))\mathrm{d}T''_{\mathbb{A}}}{\int_{(\mathbb{R}_+^\times)^r}b'(t')\mathrm{d}t'\int_{T(\mathbb{A})/T(F)}b(\psi(x))\mathrm{d}T_{\mathbb{A}}\int_{(\mathbb{R}_+^\times)^{r''}}b''(t'')\mathrm{d}t''}.\tag{4.19}$$

引入函数

$$P^{(s)}(t)=P^{(s)}(t_1,\cdots,t_s)=\prod_{i=1}^{s}2t_i\mathrm{e}^{-\pi t_i^2}.$$

根据众所周知的公式

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-a^2x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2a},\qquad (a>0),\tag{4.20}$$

我们有

$$\int_{\mathbb{R}_+^\times} P^{(s)}(t)\mathrm{d}t = 1.$$

令 $b(t) = P^{(r)}(t)$, $b'(t') = P^{(r')}(t')$, 以及 $b''(t'') = P^{(r'')}(t'')$. 则 (4.19) 式成为

$$\tau(E) = \frac{\int_{T'(\mathbb{A})/T'(F)} b'(\psi'(x'))\mathrm{d}T'_{\mathbb{A}} \int_{T''(\mathbb{A})/T''(F)} b''(\psi''(x''))\mathrm{d}T''_{\mathbb{A}}}{\int_{T(\mathbb{A})/T(F)} b(\psi(x))\mathrm{d}T_{\mathbb{A}}}.$$

由于 $\pi(T(\mathbb{A}))$ 在 $T''(\mathbb{A})$ 内开 (引理 4.3.1), $\mathrm{d}T''(\mathbb{A})$ 诱导了 $\pi(T(\mathbb{A}))$ 上的一个 Haar 测度, 记为 $\mathrm{d}\pi(T_{\mathbb{A}})$. 从正合列

$$0 \longrightarrow T'(\mathbb{A})/T'(F) \xrightarrow{\tilde{\iota}} T(\mathbb{A})/T(F) \xrightarrow{\tilde{\pi}} (T''(\mathbb{A})/T''(F)) \longrightarrow 0 \quad (4.21)$$

可以看出, $\mathrm{d}T'_{\mathbb{A}}$, $\mathrm{d}T_{\mathbb{A}'}$, $\mathrm{d}\pi(T_{\mathbb{A}})$ 拓扑上彼此匹配.

请注意 (4.10) 里出现的符号具有以下性质: $\mathrm{d}_T = \mathrm{d}_{T'} + \mathrm{d}_{T''}$, $\chi_T = \chi_{T'} + \chi_{T''}$, $\rho(\chi_T) = \rho(\chi_{T'})\rho(\chi_{T''})$, 以及对所有有限的 v 有 $L_v(1,\chi_T) = L_v(1,\chi_{T'})L_v(1,\chi_{T''})$. 我们有

$$\begin{aligned} I &= \int_{T(\mathbb{A})/T(F)} b(\psi(x))\mathrm{d}T_{\mathbb{A}} \\ &= \int_{\pi(T(\mathbb{A}))/\pi(T(F))} \mathrm{d}\pi(T_{\mathbb{A}}) \int_{T'(\mathbb{A})/T'(F)} b(\psi(x\iota(x')))\mathrm{d}T'_{\mathbb{A}}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

由于我们选取的基满足 $\xi_i = {}^t\pi(\xi''_i)$, $1 \leqslant i \leqslant r''$, 我们有

$$\begin{aligned} \psi(\iota(x')) &= (1, \cdots, \|\xi_{r''+1}(\iota(x'))\|, \cdots, \|\xi_r(\iota(x'))\|) \\ &= (1, \cdots, i, \cdots, \prod_j \|\xi'_j(x')\|^{c_{ij}}, \cdots). \end{aligned}$$

所以若令

$$a(t') = b(\psi(x)(1, \cdots, 1, \cdots, \prod_j {t'_j}^{c_{ij}}, \cdots)),$$

就有

$$\begin{aligned} \int_{T'(\mathbb{A})/T'(F)} b(\psi(x_1(x')))\mathrm{d}T'_{\mathbb{A}} &= \int_{T'(\mathbb{A})/T'(F)} (\psi'(x'))\mathrm{d}T'_{\mathbb{A}} \\ &= \tau(T') \int_{(\mathbb{R}_+^\times)^{r'}} a(t')\mathrm{d}t' \\ &= \int_{T'(\mathbb{A})/T'(F)} b'(\psi'(x'))\mathrm{d}T'_{\mathbb{A}} \int_{(\mathbb{R}_+^\times)^{r'}} a(t')\mathrm{d}t'. \end{aligned} \quad (4.23)$$

设 $u_i = \prod_j {t'_j}^{c_{ij}}$, $r''+1 \leqslant i \leqslant r$, 以及 $t_i = \|\xi_i(x)\|$, $1 \leqslant i \leqslant r''$. 则我们有

$$\begin{aligned}(t') &= P^{(r)}(t_1, \cdots, t_{r''}, \cdots, t_i \prod_j {t'_j}^{c_{ij}}, \cdots) \\ &= \prod_{i=1}^{r''} 2t_i \mathrm{e}^{-\pi t_i^2} \prod_{i=r''+1}^{r} 2t_i u_i \mathrm{e}^{-\pi t_i^2 u_i^2} \\ &= P^{(r'')}(t_1, \cdots, t_{r''}) P^{(r')}(t_{r''+1}u_{r''+1}, \cdots, t_r u_r).\end{aligned}$$

从 (4.20) 式可得

$$\int_{(\mathbb{R}_+^\times)^{r'}} a(t')\mathrm{d}t' = \frac{P^{(r'')}(t_1, \cdots, t_{r''})}{[\mathrm{Coker}^{t_1 G}]}. \tag{4.24}$$

从 (4.22), (4.23), (4.24) 可得

$$I = \frac{\int_{T'(\mathbb{A})/T'(F)} b'(\psi'(x'))\mathrm{d}T'_{\mathbb{A}}}{[\mathrm{Coker}\,{}^t\iota^G]} \int_{\pi(T(\mathbb{A}))/\pi(T(F))} b''(\psi''(\pi(x)))\mathrm{d}\pi(T_{\mathbb{A}}),$$

所以

$$\tau(E) = [\mathrm{Coker}\,{}^t\iota^G] \frac{\int_{T''(\mathbb{A})/T''(F)} b''(\psi''(x''))\mathrm{d}T''_{\mathbb{A}}}{\int_{\pi(T(\mathbb{A}))/\pi(T(F))} b''(\psi''(\pi(x)))\mathrm{d}\pi(T_{\mathbb{A}})}.$$

根据假设 (A1), (A2), 可以得到

$$\begin{aligned}&\int_{\pi(T(\mathbb{A}))/\pi(T(F))} b''(\psi''(\pi(x)))\mathrm{d}\pi(T_{\mathbb{A}}) \\ &\qquad = \frac{[\pi(T(\mathbb{A})) \cap T''(F) : \pi(T(F))]}{[T''(\mathbb{A}) : \pi(T(\mathbb{A}))T''(F)]} \int_{T''(\mathbb{A})/T''(F)} b''(\psi''(x''))\mathrm{d}T''_{\mathbb{A}}\end{aligned}$$

以及

$$\tau(E) = [\mathrm{Coker}\,{}^t\iota^G] \frac{[T''(\mathbb{A}) : \pi(T(\mathbb{A}))T''(F)]}{[\pi(T(\mathbb{A})) \cap T''(F) : \pi(T(F))]}.$$

回想起 $\mu : T''(F)/\pi(T(F)) \to T''(\mathbb{A})/\pi(T(\mathbb{A}))$ 以及 $q(\mu) = [\mathrm{Coker}\,\mu][\mathrm{Ker}\,\mu]^{-1}$. 我们最终得到

$$\tau(E) = [\mathrm{Coker}\,{}^t\iota^G] q(\mu). \tag{4.25}$$

4.3.3 环面正合列的 i 不变量

利用 $i(E)$ 的定义, 定理 3.5.13 可以表示成

$$q(\mu) = \frac{[\mathrm{Ker}(H^1(C_K(T')) \longrightarrow H^1(C_K(T)))]}{i(E)}. \tag{4.26}$$

把由以下正合列

$$0 \longrightarrow X(T'') \xrightarrow{t_\pi} X(T) \xrightarrow{t_\iota} X(T') \longrightarrow 0, \tag{4.27}$$

诱导的映射称为 ξ, η:

$$H^1(\hat{T}'') \xrightarrow{\xi} H^1(\hat{T}) \xrightarrow{\eta} H^1(\hat{T}').$$

则有

$$[\mathrm{Coker}\, {}^t\iota^G] = [\mathrm{Ker}\, \xi]. \tag{4.28}$$

另一方面, 由 Nakayama 对偶性, 可见

$$\mathrm{Ker}(H^1(C_K(T')) \longrightarrow H^1(C_K(T))) \cong \mathrm{Coker}\, \eta. \tag{4.29}$$

综合 (4.26), (4.28), (4.29), 注意到 $\Im\xi = \mathrm{Ker}\, \eta$, 可得

$$\begin{aligned}[\mathrm{Coker}\, {}^t\iota^G] q(\mu) &= \frac{1}{i(E)} [\mathrm{Ker}\, \xi][\mathrm{Coker}\, \eta] \\ &= \frac{1}{i(E)} \frac{[\mathrm{Ker}\, \xi]}{[\mathrm{Coker}\, \xi]} \frac{[\mathrm{Coker}\, \eta]}{[\mathrm{Ker}\, \eta]} [\mathrm{Coker}\, \xi][\mathrm{Ker}\, \eta] \\ &= \frac{1}{i(E)} \frac{q(\eta)}{q(\xi)} [\mathrm{Coker}\, \xi][\mathrm{Ker}\, \eta] \\ &= \frac{1}{i(E)} \frac{h(T'')}{h(T)} \frac{h(T')}{h(T)} \frac{h(T)}{[\Im\xi]} [\mathrm{Ker}\, \eta] \\ &= \frac{h(E)}{i(E)}.\end{aligned}$$

上述结果再加上 (4.25), 就能得出以下定理.

定理 4.3.2　设

$$0 \longrightarrow T' \longrightarrow T \longrightarrow T'' \longrightarrow 0 \tag{4.30}$$

是定义在代数数域上的环面的正合列. 则

$$\tau(E) = \frac{h(E)}{i(E)}.$$

4.3.4　环面范畴的 Grothendieck 群

设 $\mathcal{T}(K/F)$ 是定义在代数数域 F 上, 且在有限 Galois 扩张 K/F 内分裂的环面的范畴. 用 $\mathcal{K}$ 记 $\mathcal{T}(K/F)$ 的 Grothendieck 群. $\mathcal{K}$ 是用生成元与关系式描述的. 生成元就是符号 $\{T\}$, 这里的 T 是 $\mathcal{T}(K/F)$ 中的每个环面. 对于每个正合列

$$0 \longrightarrow T' \longrightarrow T \longrightarrow T'' \longrightarrow 0,$$

有一个关系式

$$\{T\} = \{T'\} + \{T''\}.$$

4.3.5　定理 4.1.1 的证明

对 $T \in \mathcal{T}(K/F)$, 令

$$\alpha(T) = \frac{\tau(T)i(T)}{h(T)}.$$

则定理 4.3.2 意味着 α 诱导了从 $\mathcal{K}$ 到正实数乘法群 $\mathbb{R}_+^\times$ 内的一个同态. 我们仍把这个同态记为 α, 并且通过典范对偶, 把 $\mathcal{K}$ 等同于 $\mathcal{M}(K/F)$ 的 Grothendieck 群, 这里的 $\mathcal{M}(K/F)$ 是有限生成 $\mathbb{Z}$ 自由 $\mathbb{Z}[G(K/F)]$ 模. 把这样的模与 $\mathbb{Q}$ 作张量积诱导了同态 $\theta : \mathcal{K} \to \mathcal{K}^{\mathbb{Q}}$, 这里的 $\mathcal{K}^{\mathbb{Q}}$ 是 $G(K/F)$ 的 $\mathbb{Q}$ 表示的 Grothendieck 群. 根据 [366] Th.3.8, θ 的核是有限的. 由于 $\mathbb{R}_+^\times$ 是无扭的, 所以在 $\operatorname{Ker}\theta$ 上 α 是恒同映射. 如果 T 和 T' 是同源的, 则 $\mathbb{Q} \otimes X(T) \cong \mathbb{Q} \otimes X(T')$ (参见命题 2.3.3), 因此 $[T] - [T'] \in \operatorname{Ker}\theta$, 从而 $\alpha(T) = \alpha(T')$. 再由定理 2.3.5 以及性质 (Φ2), 我们得到

$$\alpha(T)^m \prod_\lambda \alpha(R_{F_\lambda/F}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}))^{m_\lambda} = \prod_\mu \alpha(R_{F_\mu/F}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}))^{m_\mu}.$$

这里由 (Φ1), (Φ3), 我们有 $\alpha(R_{F_\nu/F}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}})) = 1$. 因此 $\alpha(T)^m = 1$, $\alpha(T) = 1$. 这样我们就证明了定理 4.1.1.

第五章　Langlands 的环面定理

对于整体域 F 上的简约群 G 的一个不可约容许自守表示 π, [229] 建立一个 L 函数. 这些函数的定义用到了 G 的 L 群 ${}^LG/F$ 的概念, 也需要 ${}^LG/F$ 的一个有限维表示 r. 表示 π 是 F 的位上的张量积 $\pi=\otimes_v\pi_v$, 其中 π_v 是 $G(F_v)$ 的不可约容许表示. 经限制后, r 定义了 ${}^LG/F$ 的一个表示 r_v. 这样, L 函数就是局部因子的 Euler 积 $\prod_v L(s,\pi_v,r_v)$. 人们希望对于 π_v 能典范地关联 F_v 到 ${}^LG/F$ 内的修正 Weil 群的表示 φ_v (参见：[50] Chap. III, [230] p.209). 然后就能得到

$$L(s,\pi_v,r_v)=L(s,\tau_v\circ\varphi_v),$$

这里的右边是 Weil 群的 L 函数的局部因子.

本章将研究上述问题在 G 是代数环面时的情形. 这里将给出 Langlands[228] 的证明. 本章可以说是了解 Langlands 纲领的交换情形, 也可以说是这个观点的第一试点. 对了解一般情形所引起的问题是有帮助的.

5.1　Weil 群与 L 群

5.1.1　Weil 群

若 K 是代数数域 (一个整体域), C_K 是 K 的理想类群. 如果 K 是一个代数数域 (一个局部域) 的完备化, C_K 就是 K 的乘法群.

如果 F 是一个局部域或整体域, K/F 是 Galois 群为 $G_{K/F}$ 的 Galois 扩张, 则 (相对) **Weil 群** (Weil group) $W_{K/F}$ 是 $G_{K/F}$ 通过 C_K 的一个扩张

$$0\longrightarrow C_K\xrightarrow{i}W_{K/F}\xrightarrow{j}G_{K/F}\longrightarrow 0,\tag{5.1}$$

使得其因子集的类是基本类 $\alpha\in H^2(G_{K/F},C_K)$.

假设 F 与 F' 是整体或局部域, K 是 F 的 Galois 扩张, K' 是 F' 的 Galois 扩张, φ 是 K 到 K' 内的同构, 它把 F 映到 F' 内. 如果 F 和 F' 同为整体或局部域, 则还要求 F' 在 F 的像上可分; 如果 F 是整体域而 F' 是局部域, 则要求 F' 在 F 的像的闭包上可分. 在这些条件下, 对于 φ 可以关联一个同态

$$\varphi_W:W_{K'/F'}\longrightarrow W_{K/F},$$

从而对离散 $G_{K/F}$ 模 A, 可以关联连续上同调群上的映射

$$\varphi_W^*:H^1_{\mathrm{ct}}(W_{K/F},A)\longrightarrow H^1_{\mathrm{ct}}(W_{K'/F'},A).\tag{5.2}$$

5.1.2 环面的 L 群

设 F 是局部或整体域, T 是定义在 F 上的代数环面且在以 $G_{K/F}$ 为 Galois 群的 Galois 扩张上分裂, $X(T)$ 是 T 的 (代数) 特征标的 $G_{K/F}$ 模. 令 $X_*(T) = \mathrm{Hom}(X(T),\mathbb{Z})$. 我们首先对 T 关联 $\mathbb{C}$ 上一个代数环面 ${}^LT^0$ 使得 $X({}^LT^0) = X_*(T)$. $G_{K/F}$ 自然地作用在 $X_*(T)$ 上, 且 ${}^LT^0(\mathbb{C}) = \mathrm{Hom}(X_*(T),\mathbb{C}^\times)$. T 的 L 群 (L-group) 被定义成半直积

$$
{}^LT = {}^LT^0 \rtimes G_{K/F}.
$$

有典范投影 $\nu : {}^LT \to G_{K/F}$ 以及正合序列

$$
1 \longrightarrow {}^LT^0 \longrightarrow {}^LT \xrightarrow{\nu} G_{K/F} \longrightarrow 1. \tag{5.3}
$$

5.1.3 从 Weil 群到 L 群的同态等价类

我们要考虑 $G_{K/F}$ 上的连续同态 $\varphi : W_{K/F} \to {}^LT$, 使得下图可交换

$$
\begin{array}{ccc}
W_{K/F} & \xrightarrow{\varphi} & {}^LT \\
 & {\scriptstyle j}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \nu} & \\
 & G_{K/F} &
\end{array}
$$

对于两个连续同态 φ 和 φ', 如果存在一个 $t \in {}^LT^0(\mathbb{C})$ 使得 $\varphi'(w) = t^{-1}\varphi(w)t$, 则称它们同构. 我们把这样的同态的等价类集合记为 $\Phi(T)$.

如果我们记 $\varphi(w) = (a(w), j(w))$, 其中 $a(w) \in {}^LT^0$, 则 $w \mapsto a(w)$ 是 $W_{K/F}$ (通过 j 作用在 ${}^LT^0$ 上) 到 ${}^LT^0$ 内的连续 1 上闭链. 我们有

$$
t^{-1} \cdot (t' \rtimes \sigma) \cdot t = t^{-1} \cdot t' \cdot {}^{\sigma}t \rtimes \sigma \qquad (t, t' \in {}^LT^0). \tag{5.4}
$$

因此若 $\varphi'(w) = (a'(w), j(w))$, 则 φ 与 φ' 等价当且仅当 a 与 a' 上同调. 所以

$$
\Phi(T) \cong H^1_{\mathrm{ct}}(W_{K/F}, {}^LT^0).
$$

5.1.4 不分歧的同态等价类

若 F 是一个局部域, 如果元素 $[\varphi] \in \Phi(T)$ 使得 φ 限制在惯性群上为平凡, 则称 $[\varphi]$ 是不分歧的. 我们把 $\Phi(T)$ 内的**不分歧元** (unramified element) 的集合记为 $\Phi_{\mathrm{unr}}(T)$.

如果我们进一步假设 K/F 不分歧, 则 $G_{K/F}$ 由 Frobenius 自同构 σ_0 生成. 不分歧的 φ 被 $\varphi(1 \times \sigma_0) = t \times \sigma_0$ 完全确定, 其中 $t \in {}^LT^0$ 被 ${}^LT^0$ 确定到共轭. 因此在这种情形里有

$$
\Phi_{\mathrm{unr}}(T) = ({}^LT^0 \rtimes \sigma)/\, \mathrm{Int}\, {}^LT^0, \tag{5.5}
$$

其中 $\mathrm{Int}\, {}^LT^0$ 表示关于 ${}^LT^0$ 的共轭的群.

5.2　表示以及局部 L 函数

5.2.1　环面的表示

如果 F 是一个局部域, $T(F)$ 是局部紧 Abel 群. 从 Schur 引理 (参见 [9] 第四章 §1) 立即可得: $T(F)$ 在 Hilbert 空间里的 (拓扑) 不可约表示是一个特征标, 即连续同态 $T(F) \to \mathbb{C}^\times$.

在 2.2 节 我们已经证明, $T(F)$ 作为 $G_{K/F}$ 模等同于 $\mathrm{Hom}_{G_{K/F}}(X(T), K^\times)$. 另一方面, 如果 K 是整体域, 则从正合列

$$1 \longrightarrow K^\times \longrightarrow J_K \longrightarrow C_K \longrightarrow 1$$

可得正合列

$$1 \longrightarrow T(F) \longrightarrow T(\mathbb{A}_F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{G_{K/F}}(X(T), C_K) \longrightarrow H^1(G_{K/F}, T(K)).$$

因此 $C_F(T) = T(\mathbb{A}_F)/T(F)$ 可被看作 $\mathrm{Hom}_{G_{K/F}}(X(T), C_K)$ 的子群 (见 3.3 节). 为了研究 $T(F)$ (F 局部域) 的表示或 $T(\mathbb{A}_F)/T(F)$ (F 整体域) 的表示, 我们要研究以下的群:

$$\Pi(T) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_{G_{K/F}}(X(T), C_K), \mathbb{C}^\times).$$

5.2.2　Langlands 的环面定理

Langlands[228] 的第一个定理是

定理 5.2.1　*存在典范同构*

$$\Phi(T) \cong \Pi(T). \tag{5.6}$$

对这个定理稍微改进后得

定理 5.2.2　(1) *若 F 是局部域, 则 $H^1_{\mathrm{ct}}(W_{K/F}, {}^L T^0)$ 典范地同构于 $T(F)$ 的特征标群.*

(2) *若 F 是整体域, 则有从 $H^1_{\mathrm{ct}}(W_{K/F}, {}^L T^0)$ 到 $T(\mathbb{A}_F)/T(F)$ 的特征标群上的典范同态, 其核为有限, 且由以下的类 α 组成: 当 K' 是 K 关于某个赋值的完备化时, 有 $\varphi^*_W(\alpha) = 0$, 其中 F' 是 F 在 K' 内的闭包, $\varphi : K/F \to K'/F'$ 是嵌入.*

我们将在 5.3 节给出此定理的证明.

5.2.3 不分歧的同态等价类与特征标

首先明确一下本小节使用的符号：T 是定义在非阿局部域 F 上的环面，且在以 $G_{K/F}$ 为 Galois 群的不分歧扩张 K/F 上分裂. 以 σ_0 记生成 $G_{K/F}$ 的 Frobenius 自同构.

如果 $T(F)$ 的一个特征标在 $T(O_F)=\mathrm{Hom}_{G_{K/F}}(X(T),U_K)$ 上平凡，则被称为不分歧的. $T(F)$ 的**不分歧特征标** (unramified character) 的集合记为 $\Pi_{\mathrm{unr}}(T)$.

序列

$$0\longrightarrow U_K\longrightarrow C_K\xrightarrow{\nu}\mathbb{Z}\longrightarrow 0 \tag{5.7}$$

其中 $\nu(a)=1$ 当且仅当 a 生成 O_K 的素理想 P_K，作为 $G_{K/F}$ 模的序列分裂而且导出以下正合列

$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}_{G_{K/F}}(X(T),U_K)\longrightarrow \mathrm{Hom}_{G_{K/F}}(X(T),C_K)\\ \longrightarrow \mathrm{Hom}_{G_{K/F}}(X(T),\mathbb{Z})\longrightarrow 0.$$

我们立即可得

引理 5.2.3 $\mathrm{Hom}_{G_{K/F}}(X(T),C_K)=T(F)$ 的特征标如果在 $\mathrm{Hom}_{G_{K/F}}(X(T),U_K)=T(O_F)$ 上平凡，则它是 $\mathrm{Hom}_{G_{K/F}}(X(T),\mathbb{Z})=X_*(T)^{G_{K/F}}$ 的特征标，且被包含在 $\mathrm{Hom}(X(T),\mathbb{Z})=X_*(T)$ 内.

利用上述记号，我们叙述定理 5.2.2(1) 的推论.

推论 5.2.4 (1) $\Pi(T)$ 的一个元素 χ 不分歧当且仅当根据定理 5.2.2(i) 与它关联的 $H^1_{\mathrm{ct}}(W_{K/F},{}^LT^0)$ 的元素 $[f]$ 是以下的提升的像:

$$H^1_{\mathrm{ct}}(\mathbb{Z},{}^LT^0)\longrightarrow H^1_{\mathrm{ct}}(W_{K/F},{}^LT^0),$$

此提升由下面的正合列诱导

$$0\longrightarrow U_K\longrightarrow W_{K/F}\xrightarrow{\mu}\mathbb{Z}\longrightarrow 0, \tag{5.8}$$

其中 μ 满足以下条件: $\mu(w)=1$ 蕴含 $j(w)=\sigma_0$.

(2) 此外，若 χ 平凡地扩张为 $X_*(T)$ 的一个特征标，且 $\mu(w_0)=1$，则对 $\lambda\in{}^LT^0(\mathbb{C})$ 有

$$f(w_0)(\lambda)=\chi(\lambda). \tag{5.9}$$

同构 $\Phi(T) \xrightarrow{\sim} \Pi(T)$ 诱导了不分歧元素集合 $\Phi_{\text{unr}}(T)$ 与 $\Pi_{\text{unr}}(T)$ 间的双射. 首先, 根据引理 5.2.3 有

$$\Pi_{\text{unr}}(T) = \text{Hom}(X_*(T)^{G_{K/F}}, \mathbb{C}^\times). \tag{5.10}$$

然后设 T_d 是 T 的极大子环面, 它在 F 上分裂. 群 $X_*(T)$ 可被等同于 $G_{K/F}$ 在 $X_*(T)$ 内的固定点集 $X_*(T)^{G_{K/F}}$. $X_*(T_d)$ 在 $X_*(T) = X^*({}^LT^0)$ 内的包含诱导一个满态射 ${}^LT^0 \to {}^L(T_d)^0$, 记为 ν.

映射 $A: t \mapsto t^{-1} \cdot {}^{\sigma_0}t$ 是 ${}^LT^0$ 的自同态, 它在 1 的微分 $\mathrm{d}A$ 是 $(\mathrm{d}\sigma_0 - \mathrm{id})$. 设

$$U = (\text{Ker}\, A)^0, \qquad V = \text{Im}\, A.$$

则 U 的每个点都在 σ_0 下保持不变, U (相应地, V) 的李代数是 $\mathrm{d}A$ 的核 (相应地, 像). 由于 $\mathrm{d}A$ 是半单的, 它们互相横截, 所以

$${}^LT^0 = U \cdot V, \quad \text{且 } U \cap V \text{ 有限.}$$

此外,

$$V = \text{Ker}\, \nu, \qquad \nu(U) = {}^L(T_d)^0.$$

设 $\nu' : {}^LT^0 \rtimes \sigma_0 \to {}^L(T_d)^0$ 定义为 $\nu'(t \times \sigma_0) = \nu(t)$ $(t \in {}^LT^0)$. 则对 $a \in {}^LT^0$,

$$s^{-1}(t \times \sigma_0) = s^{-1} \cdot t \cdot {}^{\sigma_0}s \times \sigma_0 = s^{-1} \cdot {}^{\sigma_0}s \cdot t \times \sigma_0.$$

所以 ν' 诱导映射

$$\overline{\nu} : ({}^LT^0 \rtimes \sigma_0)/\,\text{Int}\,{}^LT^0 \longrightarrow \text{Hom}(X_*(T)^{G_{K/F}}, \mathbb{C}\times). \tag{5.11}$$

显然 $\overline{\nu}$ 是满的. 设 $t, t' \in {}^LT^0$, 假设 $\nu'(t \rtimes \sigma_0) = \nu'(t' \rtimes \sigma_0)$. 则我们有 $\nu(t) = \nu(t')$, 因此 $t't^{-1} \in V$. 如果我们记 $t't^{-1} = s^{-1} \cdot {}^{\sigma_0}s$ 对某个 $s \in {}^LT^0$, 则我们可得 $t' \rtimes \sigma_0 = s^{-1}(t \rtimes \sigma_0)s$. 所以 $\overline{\nu}$ 是双射. 再考虑到 (5.10), (5.5), 我们得到从 $\Phi_{\text{unr}}(T)$ 到 $\Pi_{\text{unr}}(T)$ 上的典范同构.

5.2.4 L 群的有理表示的局部 L 函数

我们保持 5.2.3 节的记号. 设 $\tilde{\omega}$ 是素理想 P_K 的生成元.

假设 $\chi \in \Pi_{\text{unr}}(T)$. 则 χ 可被看成 $\text{Hom}_{G_{K/F}}(X(T), \mathbb{Z})$ 的一个特征标. 我们把这个特征标平凡地扩张为 $X_*(T)$ 的一个特征标, 这样就定义了 $t_\chi \in {}^LT^0(\mathbb{C}) = \text{Hom}(X_*(T), \mathbb{C}^\times)$.

设 r 是复代数群 ${}^LT$ 的有理表示. 则我们可用下式定义一个局部 L 函数 $L(s,\chi,r)$ $(s\in\mathbb{C})$

$$L(s,\chi,r)=\frac{1}{\det(I-r(t_\chi\times\sigma_0)|\widetilde{\omega}|^s)}. \tag{5.12}$$

另一方面, 按照定理 5.2.2(i) 的推论, χ 确定了一个元素 $[f]\in H^1_{\text{ct}}(W_{K/F},{}^LT^0)$, 所以是 $\Phi(T):\varphi(w)=f(w)\times j(w)$ 的一个元素 φ. 因此 $r\circ\varphi$ 是 $W_{K/F}$ 的一个表示. 与这个表示关联的 L 函数定义为

$$L(s,r\circ\varphi)=\frac{1}{\det(I-r\circ\varphi(w_0)|\widetilde{\omega}|^s)}. \tag{5.13}$$

从定理 5.2.2(i) 的推论的 (ii) 立即可得

$$L(s,\chi,r)=L(s,r\circ\varphi). \tag{5.14}$$

5.3　定理 5.2.2 的证明

证明分成 3 步. 首先证明有一个 G 同构

$$H_1(C_K,X_*(T))^{G_{K/F}}\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{G_{K/F}}(X(T),C_K). \tag{5.15}$$

第二步证明从 $W_{K/F}$ 转换到 C_K 导致一个同构

$$\mathrm{Res}:H_1(W_{K/F},X_*(T))\xrightarrow{\sim}H_1(C_K,X_*(T))^{G_{K/F}}. \tag{5.16}$$

最后证明与赋值映射 $(t,\lambda)\mapsto\lambda(t)$ $(t\in{}^LT^0,\ \lambda\in X_*(T))$ 相关联的配对

$$H^1_{\text{ct}}(W_{K/F},{}^LT^0)\times H_1(W_{K/F},X_*(T))\longrightarrow\mathbb{C}^\times$$

导出一个同构:

$$H^1_{\text{ct}}(W_{K/F},{}^LT^0)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}(H_1(W_{K/F},X_*(T)),\mathbb{C}^\times). \tag{5.17}$$

为简化本小节使用的符号, 我们将用 C,W,G 作为 $C_K,W_{K/F},G_{K/F}$ 的简写. 因此我们有正合列

$$1\longrightarrow C\xrightarrow{i}W\xrightarrow{j}G\longrightarrow 1,$$

且我们可选取 W 内 C 的右陪集的代表 $\{w_\sigma\mid\sigma\in G\}$. 对给定的 $\sigma,\tau\in G$, 存在元素 $c_{\sigma,\tau}\in C$ 使得

$$w_\sigma w_\tau=c_{\sigma,\tau}w_{\sigma\tau},$$

而且基本类 $\alpha\in H^2(G,C)$ 是 2 上闭链的类 $c_{\sigma,\tau}$.

5.3.1 证明的第一步

从上积

$$\langle\ ,\ \rangle : X(T) \times X_*(T) \longrightarrow \mathbb{Z}, \qquad \langle \lambda, \hat{\lambda} \rangle = \hat{\lambda}(\lambda)$$

得出一个双线性映射

$$H^0(C, X(T)) \times H_1(C, X_*(T)) \longrightarrow H_1(C, \mathbb{Z}),$$

它与 G 在这 3 个群上的作用相交换. 由于 $H^0(C, X(T))$ 以及 $H_1(C, \mathbb{Z})$ 作为 G 模分别同构于 $X(T)$ 与 C. 我们有 G 同构

$$H_1(C, X_*(T)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X(T), C), \tag{5.18}$$

根据命题 1.3.7, 此同构把取值在 $X_*(T)$ 内的 1 闭链的类 y 映到以下同态的类

$$\lambda \longrightarrow \prod_{c \in C} c^{\langle \lambda, y(c) \rangle}. \tag{5.19}$$

由于 $X(T)$ 是某些个 $\mathbb{Z}$ 的直和, 这个映射是同构. 这样就证得 (5.15).

5.3.2 证明的第二步

由定义

$$H_1(C, X_*(T))^G / N_G(H_1(C, X_*(T))) = \hat{H}^0(G, H_1(C, X_*(T))).$$

利用同构 (5.18), 我们得到一个正合列

$$0 \to N_G(H_1(C, X_*(T))) \to H_1(C, X_*(T))^G \to \hat{H}^0(G, \mathrm{Hom}(X(T), C)) \to 0. \tag{5.20}$$

由第一章 1.3.3 节, 我们有正合列

$$0 \longrightarrow Z \longrightarrow H_1(C, X_*(T)) \longrightarrow H_1(W, X_*(T)) \longrightarrow H_1(G, X_*(T)) \longrightarrow 0, \tag{5.21}$$

其中 Z 是 $N_G : H_1(C, X_*(T)) \to H_1(C, X_*(T))$ 的核.

有一个明显的同构

$$X_*(T) \otimes C \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(X(T), C), \tag{5.22}$$

它把 $\hat{\lambda} \otimes c$ 映为同态 $\lambda \mapsto c^{\langle \lambda, \hat{\lambda} \rangle}$. 相关于这个配对, 我们有上积

$$H_1(G, X_*(T)) \times \hat{H}^2(G, C) \longrightarrow \hat{H}^0(G, \mathrm{Hom}(X(T), C)).$$

根据 Tate-Nakayama 定理, 与基本类 $\alpha \in \hat{H}^2(G,C)$ 的上积给出一个同构

$$E : H_1(G, X_*(T)) \xrightarrow{\sim} \hat{H}^0(G, \mathrm{Hom}(X(T), C)). \tag{5.23}$$

按照命题 1.3.7, 这个映射把 G 在 $X_*(T)$ 内的一个 1 闭链 z 映到同态的类

$$\lambda \longmapsto \prod_{\sigma,\tau} c_{\tau,\sigma}^{\langle \lambda, \tau z(\sigma)\rangle}. \tag{5.24}$$

如果我们把 (5.20), (5.21), (5.23) 的结果合在一起, 可以得到一个图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
0 \to Z \to H_1(C, X_*(T)) & \longrightarrow & H_1(W, X_*(T)) & \longrightarrow & H_1(G, X_*(T)) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow N_G & & \downarrow \mathrm{Res} & & \downarrow E & & \\
N_G(H_1(C, X_*(T))) & \longrightarrow & H_1(C, X_*(T))^G & \longrightarrow & \hat{H}^0(G, \mathrm{Hom}(X(T), C)) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & & & \downarrow & & \\
0 & & & & 0 & &
\end{array} \tag{5.25}$$

根据第一章命题 1.2.3, 左边的方块是交换的.

从 W 在 $X_*(T)$ 内的 1 闭链 $x : w \mapsto x(w)$ 着手, 对于 $\tau \in G$, $w \in W$, 存在 C 的唯一元素 $c_\tau(w)$ 以及唯一的 $\sigma \in G$, 使得 $w_\tau w = c_\tau(w) w_\sigma$. 则 x 在限制映射下的像是 1 闭链的类

$$y : c \longmapsto \sum_{c_\tau(w)=c} w_\tau x(w).$$

由 (5.19), 这个闭链在 $\hat{H}^0(G, \mathrm{Hom}(X(T), C))$ 里的像是以下同态的类

$$\lambda \longmapsto \prod_{\tau,w} c_\tau(w)^{\langle \lambda, w_\tau x(w)\rangle}. \tag{5.26}$$

如果 $w = cw_\tau$, $c \in C$, 则 $c_\tau(w) = w_\tau c w_\tau^{-1} c_{\tau,\sigma}$. 因此这个乘积等于

$$\left\{ \prod_{\sigma,\tau,c} (w_\tau c w_\tau^{-1})^{\langle \lambda, w_\tau x(cw_\sigma)\rangle} \right\} \left\{ \prod_{\sigma,\tau,c} c_{\tau,\sigma}^{\langle \lambda, w_\tau x(cw_\sigma)\rangle} \right\}.$$

第一个乘积是一个范数. 这意味着如果

$$z(\sigma) = \sum_c x(cw_\sigma),$$

则同态 (5.26) 上同调于

$$\lambda \longmapsto \prod_{\sigma,\tau} c_{\tau,\sigma}^{\langle\lambda,\tau z(\sigma)\rangle}. \tag{5.27}$$

但 z 是 x 在以下同态下的像

$$H_1(W,X_*(T)) \longrightarrow H_1(G,X_*(T)),$$

而且由 (5.24), $E(z)$ 是 (5.27) 的类. 所以我们已经证明 (5.25) 的右边方块是交换的.

把蛇引理应用于交换图 (5.25) 立即可得 (5.16) 是一个同构.

5.3.3 证明的第三步

由 (5.15) 和 (5.16) 可得 $H_1(W,X_*(T))$ 同构于 $\mathrm{Hom}_G(X(T),C)$. 这个同构可以用来把 $H_1(W,X_*(T))$ 转换成拓扑群.

因为 $\mathbb{C}^\times$ 是单射, 根据第一章命题 1.3.8, 我们得到同构

$$\Phi: H^1(W,{}^LT^0) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(H_1(W,X_*(T)),\mathbb{C}^\times).$$

为证 (5.17), 我们只需验证 $\Phi([f])$ 连续当且仅当 f 是连续上闭链.

若 U 是由 C 中范数为 1 的元素构成, 我们有正合列

$$1 \longrightarrow U \longrightarrow C \longrightarrow M \longrightarrow 1$$

M 是 $\mathbb{Z}$ 或 $\mathbb{R}$, G 平凡地作用其上. 此序列作为 Abel 群的序列是分裂的, 且

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(X(T),U) \xrightarrow{\lambda} \mathrm{Hom}(X(T),C) \xrightarrow{\mu} \mathrm{Hom}(X(T),M) \longrightarrow 0$$

正合. 存在一个明显的映射

$$\begin{aligned}N_G(\mathrm{Hom}(X(T),C)) \cap \mathrm{Hom}(X(T),U)/N_G(\mathrm{Hom}(X(T),U))\\ \longrightarrow \hat{H}^{-1}(G,\mathrm{Hom}(X(T),M))/\mu\hat{H}^{-1}(G,\mathrm{Hom}(X(T),C)).\end{aligned}$$

如果 $z=N_Gx$ 属于 $\mathrm{Hom}(X(T),U)$, y 是 x 在 $\mathrm{Hom}(X(T),M)$ 内的像, 则 $N_Gy=0$. 我们把 z 映到 y 在右边群内的像. 此像与 x 无关, 且若 x 取在 $\mathrm{Hom}(X(T),U)$ 内时, 它是 0. 如果像是 0, 我们可以选 x 使得 $y=\sum_\sigma \sigma^{-1}v_\sigma - v_\sigma$. 如果 $\mathrm{Hom}(X(T),C)$ 内的 u_σ 映到 v_σ, 则 $x' = x - \sum \sigma^{-1}u_\sigma - u_\sigma$ 落在 $\mathrm{Hom}(X(T),U)$ 内, 且 $N_Gx' = N_Gx$. 因此映射是单射. 由于右边的群是有限的, 所以是左边的群. 由于 $\mathrm{Hom}(X(T),U)$ 是紧的, $N_G(\mathrm{Hom}(X(T),U))$

以及 $N_G(\mathrm{Hom}(X(T),C)) \cap \mathrm{Hom}(X(T),U)$ 在 $\mathrm{Hom}(X(T),U)$ 内闭. 由于 $\mathrm{Hom}_G(X(T),U)$ 是 $\mathrm{Hom}_G(X(T),C)$ 的开子群, 除非 K 是阿基米德的或是整体域, 而且

$$N_G(\mathrm{Hom}(X(T),C))\cap\mathrm{Hom}_G(X(T),U) = N_G(\mathrm{Hom}(X(T),C))\cap\mathrm{Hom}(X(T),U)$$

是闭的, $N_G(\mathrm{Hom}(X(T),C))$ 是在 $\mathrm{Hom}_G(X(T),C)$ 内闭. 由于它是有限指数的, 它也是开的. 在阿基米德的情形 (或整体域的情形, 例如取 $\mathbb{R}^+ \to J_Q \to J_K$ 的像), 以下序列

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow C \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

作为 G 模序列是分裂的, 且

$$\mathrm{Hom}_G(X(T),C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(X(T),U) \times \mathrm{Hom}_G(X(T),M).$$

此外,

$$N_G(\mathrm{Hom}(X(T),M)) = \mathrm{Hom}_G(X(T),M),$$

所以在这个情形 $N_G(\mathrm{Hom}(X(T),C))$ 在 $\mathrm{Hom}_G(X(T),C)$ 内闭.

结果是: $\mathrm{Hom}_G(X(T),C)$ 的一个同态 φ, 或同样地, $H_1(C,X_*(T))^G$ 到 $\mathbb{C}^\times$ 内的同态是连续的当且仅当 $\varphi \circ N_G$ 是连续的. 当然, $H^1(W,{}^LT^0)$ 的元素是连续的当且仅当它在 C 的限制是连续的. 由于在下图中

$$\begin{array}{ccc} H^1(W,{}^LT^0) & \longleftrightarrow & \mathrm{Hom}(H_1(W,X_*(T)),C) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(C,{}^LT^0) & \longleftrightarrow & \mathrm{Hom}(H_1(C,X_*(T)),C) \end{array}$$

右边的竖直箭头是相伴于余限制的, 为使此图交换, 只需验证 $H^1(C,{}^LT^0)$ 内的 $[f]$ 连续当且仅当 $\mathrm{Hom}(H_1(C,X_*(T)),\mathbb{C}^\times)$ 或 $\mathrm{Hom}(X_*(T)\otimes C,\mathbb{C}^\times)$ 是连续的. 由于这个同态把 $\hat{\lambda}\otimes a$ 映到 $\langle\hat{\lambda},f(a)\rangle$, 这是显然的.

我们沿用 5.3 节的符号.

定理 5.2.2 的 (1) 就是定理 5.2.1 的局部情形.

然后我们考虑推论. 根据 μ 的定义, 我们知道 $\mu(w)=1$ 当且仅当 w 在 C 内的转换生成素理想 P_K. 由于范数映射

$$N_G : \mathrm{Hom}(X(T),U_K) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(X(T),U_K)$$

是满的 (第三章命题 3.2.6), 我们看到, 在同构

$$H_1(W,X_*(T)) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_G(X(T),C)$$

下，$H^1(U_K, X_*(T))$ 在 $H_1(W, X_*(T))$ 内的像对应于 $\mathrm{Hom}_G(X(T), U_K)$. 于是与 $H^1_{\mathrm{ct}}(W, {}^LT^0)$ 的元素相关联的特征标是不分歧的当且仅当此元素是下面的提升的像

$$H^1_{\mathrm{ct}}(\mathbb{Z}, {}^LT^0) \longrightarrow H^1_{\mathrm{ct}}(W, {}^LT^0). \tag{5.28}$$

$\mathbb{Z}$ 在 ${}^LT^0$ 上的作用是由 W 的作用确定的. 这就证明了推论的 (1).

如果 $\hat{\lambda}$ 是 $X_*(T)$ 的不变元, $w \in W$, 则存在 w 在 $X_*(T)$ 内的 1 闭链 x, 使得 $x(w) = \hat{\lambda}$, 且当 $u \neq w$ 时有 $x(u) = 0$. x 的类在 $\mathrm{Hom}(X(T), C)$ 内的像是同态

$$\lambda \longmapsto \prod_{\tau} c_\tau(w)^{\langle \lambda, \hat{\lambda} \rangle}. \tag{5.29}$$

注意 $\prod_\tau c_{\tau,w}$ 只是 w 到 C 内的转换. 回忆起正合列

$$0 \longrightarrow U_K \longrightarrow C \stackrel{\nu}{\longrightarrow} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

其中 $\nu(x) = 1$ 当且仅当 c 生成素理想 P_K. 考虑到对 μ 有类似的性质, 当我们把 ν 作用于同态 (5.29) 时, 就能得到 $\mathrm{Hom}(X(T), \mathbb{Z})$ 内的同态

$$\lambda \longmapsto \langle \lambda, \mu(w)\hat{\lambda} \rangle. \tag{5.30}$$

若 χ 是不分歧的, 则与 χ 关联的, W 的在 ${}^LT^0$ 内取值的 1 上闭链 f 是提升映射 (5.28) 的像, 所以对应于 f 的同态 (5.30) 由一个 $\hat{\lambda} \in X_*(T)^G$ 及一个使 $\mu(w) = 1$ 的 $w \in W$ 给出. 此外,

$$f(w)(\hat{\lambda}) = \chi(\hat{\lambda}).$$

我们最后证明定理 5.2.2 的第二部分. 图

$$\begin{array}{ccccc} T(\mathbb{A}_K) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(X(T), C) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow N_G & & \downarrow N_G & & \\ T(\mathbb{A}_F) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_G(X(T), C) & & \end{array}$$

是交换的而且上面的行是正合的. 因此 $T(\mathbb{A}_F)/T(F)$ 包含 $N_G(\mathrm{Hom}(X(T), C))$, 而且是 $\mathrm{Hom}_G(X(T), C)$ 里的指数有限的闭子群.

如果 K' 是 K 关于某个赋值的完备化, F' 是 F 在 K' 内的闭包, 则存在映射 $T(F') \to T(\mathbb{A}_F)$, 从而得映射 $T(F') \to \mathrm{Hom}_G(X(T), C_K)$. $\mathrm{Hom}_G(X(T), C_K)$ 的特征标在 $T(\mathbb{A}_F)/T(F)$ 上平凡当且仅当对所有可能的 K', 它在 $T(F')$ 上的像是平凡的:

$$T(F') = \mathrm{hom}_{G'}(X(T), C_{K'}), \qquad G' = \mathrm{Gal}(K'/F'),$$

且若 $E = K \cap F'$, 自然映射 $C_{K'} \to C_K$ 给出了映射

$$\mathrm{Hom}_G(X(T), C_{K'}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(K/E)}(X(T), C_K).$$

若 $\mathrm{Gal}(K/F)$ 是不交并 $\bigcup_{i=1}^r \sigma_i \,\mathrm{Gal}(K/E)$, 把它与从 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(K/E)}(X(T), C_K)$ 到 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(K/F)}(X(T), C_K)$ 内的映射 $\sum_{i=1}^r \sigma_i$ 复合, 可得从 $T(F')$ 到 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(K/F)}(X(T), C_K)$ 内的映射.

另一方面, 如果 φ 是嵌入 $K/F \to K'/F'$, 则映射 $\varphi_W : W_{K'/F'} \to W_{K/F}$ 确定了映射

$$H^1_{\mathrm{ct}}(W_{K/F'}, {}^LT^0) \longrightarrow H^1_{\mathrm{ct}}(W_{K'/F'}, {}^LT^0),$$

$$H^1_{\mathrm{ct}}(W_{K'/F'}, X_*(T)) \longrightarrow H^1_{\mathrm{ct}}(W_{K/F}, X_*(T)),$$

它们互相伴随. 我们只需验证下图可交换:

$$\begin{array}{ccc} H_1(W_{K'/F'}, X_*(T)) & \longrightarrow & H_1(W_{K/F'}, X_*(T)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_{G'}(X(T), C_{K'}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_G(X(T), C_K) \end{array}$$

设 x' 是 $W_{K'/F'}$ 上取值在 $X_*(T)$ 内的 1 闭链, 设 x 是 $W_{K/F}$ 上 1 闭链, 它把 w 映到 $\sum_{w' \to w} x'(w')$. 限制于 $C_{K'}$ 把 x' 的类映到 y' 的类, 其中

$$y'(c') = \sum_{c_\tau(w') = c'} w_{\tau'} x'(w').$$

限制于 C_K 把 x 的类映到 y 的类, 其中

$$y(c) = \sum_{c_\tau(w) = c} w_\tau x(w).$$

y' 的类对应于同态

$$\lambda \longmapsto \prod_{\tau'} \prod_{w'} c_{\tau'}(w')^{\langle \lambda, w_{\tau'} x'(w') \rangle},$$

而 y 的类对应于同态

$$\lambda \longmapsto \prod_{\tau} \prod_{w} c_\tau(w)^{\langle \lambda, w_\tau x(w) \rangle}.$$

内积只需取在 $W_{K/E}$ 上.

如果 $\sigma - \sigma_i \tau$, $\tau \in \mathrm{Gal}(K/E)$, 我们取 $w_\sigma = w_{\sigma_i} w_\tau$. 则若 w 属于 $W_{K/E}$, 就有

$$w_{\sigma_i} w_\tau w = w_{\sigma_i} c_\tau(w) w_{\sigma_i}^{-1} w_{\sigma_i} w_\rho$$

对某个 $\rho \in \mathrm{Gal}(K/E)$. 因此与 y 对应的同态把 λ 映到

$$\sum_{i=1}^{r} \sigma_i(\varphi(\sigma_i^{-1}\lambda)),$$

如果 φ 是从 $X(T)$ 到 C_K 内的同态

$$\lambda \longmapsto \prod_{\tau \in \mathrm{Gal}(K/E)} \prod_{w \in W_{K/E}} c_\tau(w)^{\langle \lambda, w_\tau x(w) \rangle},$$

φ_W 是单射, 我们可利用它把 $W_{K'/F'}$ 等同于 $W_{K/E}$ 的子群. 我们也可把 $\mathrm{Gal}(K/E)$ 等同于 $\mathrm{Gal}(K'/F')$. 若 $\tau' \leftrightarrow \tau$, 我们取 $w_{\tau'} \leftrightarrow w_\tau$. 若 $w' \leftrightarrow w$,

$$c_{\tau'}(w') \longleftrightarrow c_\tau(w),$$

且上面的乘积可被写成

$$\prod_{\tau'} \prod_{w'} c_{\tau'}(w')^{\langle \lambda, w_{\tau'} x'(w') \rangle},$$

使得 φ 是对应于 y' 的同态. 因此图可交换, 定理 5.2.2 得证.

5.4 Taniyama 群的构造

人们希望 Shimura 簇 (特别是与 motive 关联) 的 Hasse-Weil ζ 函数能够 “表示” 成与自守表示关联的 L 函数的乘积, 从而作为与 ‘Weil’ 群的表示关联的 L 函数的乘积. 这种对 ζ 函数的研究提出了关于 Shimura 簇的共轭的问题. 在形成这个问题的过程中, Langlands[230] 引入了 Taniyama 群的概念. 这个问题已被 Borovoi-Kazhdan-Milne-K. Y. Shih 解决 (见 [253]).

5.4.1 Serre 群

我们首先定义 Serre 群 $\mathcal{S}$.

设 $\overline{\mathbb{Q}}$ 是 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{C}$ 内的代数闭包, 设 $\iota \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 是复数共轭. **Serre 群** $\mathcal{S}$ 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的环面. 只需构造 $\mathcal{S}$ 的有理特征标的模 $X(\mathcal{S})$. 我们从 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 上的局部常数整值函数的模 M 着手, 这里的 Galois 群通过右平移作用其上. 我们令

$$X(\mathcal{S}) = \{\lambda \in M \mid (\sigma - 1)(\iota + 1)\lambda = (\iota + 1)(\sigma - 1)\lambda = 0, \ \forall \sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})\}.$$

5.4.2 Taniyama 群

Taniyama 群 $\mathcal{T}$ 被定义为 Serre 群 $\mathcal{S}$ 通过 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的代数群扩张. 也就是正合列

$$1 \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow 1 \tag{5.31}$$

这个扩张在 $\mathbb{Q}$ 上不分裂, 但它在每个 l 进域 $\mathbb{Q}_l$ 上可有典范分裂 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathcal{T}(\mathbb{Q}_l)$, 这可被用来给出 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathcal{T}(\mathbb{A}_f)$.

我们不想直接与 $\mathcal{S}$ 打交道, 而是选取 $\mathbb{Q}$ 的一个有限 Galois 扩张 L. 设 $\mathcal{S}^L$ 是 $\mathcal{S}$ 的商群, 它的有理特征标的格由 $X(\mathcal{S})$ 内所有在 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/L)$ 下不变的函数构成, 且定义扩张

$$1 \longrightarrow \mathcal{S}^L \longrightarrow \mathcal{T}^L \longrightarrow \mathrm{Gal}(L^{\mathrm{ab}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow 1 \tag{5.32}$$

以后再提升到 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, 然后取极限.

为了弄清该如何构造, 我们先假设扩张已被定义, 而且存在 $\mathcal{T}^L \to \mathrm{Gal}(L^{\mathrm{ab}}/\mathbb{Q})$ 的截面 $\tau \to a(\tau)$ 其中 $a(\tau) \in \mathcal{T}^L(L^{\mathrm{ab}})$. 给定 $\tau_1, \tau_2 \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, 存在元素 $d_{\tau_1,\tau_2} \in \mathcal{S}^L(L)$, 使得

$$a(\tau_1)a(\tau_2) = d_{\tau_1,\tau_2}a(\tau_1\tau_2). \tag{5.33}$$

$\mathcal{T}^L$ 内的共轭导出 $\mathrm{Gal}(L^{\mathrm{ab}}/\mathbb{Q})$ 在 $\mathcal{S}^L$ 上的代数作用, 我们记为 ${}^{\tau}d$ 或 $\tau(d)$, 其中 $d \in \mathcal{S}^L(L)$, $\tau \in \mathrm{Gal}(L^{\mathrm{ab}}/\mathbb{Q})$, 且

$$\tau_d = a(\tau)da(\tau)^{-1}.$$

则 d_{τ_1,τ_2} 满足以下方程

$${}^{\tau_1}d_{\tau_2,\tau_3}d^{-1}_{\tau_1\tau_2,\tau_3}d_{\tau_1,\tau_2\tau_3}d^{-1}_{\tau_1,\tau_2} = 1. \tag{5.34}$$

注意 Galois 群的元素起着两种不同的角色. 首先, 它们是 $\mathcal{T}^L$ 的商群的元素; 其次, 它们是 L^{ab} 的自同构, 因此作用于 $\mathcal{T}^L(L^{\mathrm{ab}})$ 上, 因为 $\mathcal{T}^L$ 定义在 $\mathbb{Q}$ 上. 在第一种角色里它们被记为 τ, 必要时会加一个下标, 在第二种角色里记为 ρ 或 σ. 当 $\mathrm{Gal}(L^{\mathrm{ab}}/\mathbb{Q})$ 以第二种角色作用时, 我们有

$$\rho(a(\tau)) = c_\rho(\tau)a(\tau),$$

其中 $c_\rho(\tau) \in \mathcal{S}^L(L)$. 当然有

$$c_{\rho\sigma}(a(\tau)) = \rho(c_\sigma(\tau))c_\rho(\tau). \tag{5.35}$$

对 (5.33) 式的两边用 ρ 作用, 可以得到把 Galois 群的两种角色联系起来的等式

$$d_{\tau_1,\tau_2}c_\rho(\tau_1)^{\tau_1}(c_\rho(\tau_2)) = \rho(d_{\tau_1,\tau_2})c_\rho(\tau_1\tau_2). \tag{5.36}$$

然后我们考虑分裂性需要什么条件. 分裂的 $\mathrm{Gal}(L^{\mathrm{ab}}/\mathbb{Q}) \to \mathcal{T}(\mathbb{A}_f)$ 具有形式 $\tau \mapsto b(\tau)a(\tau)$, 其中 $b(\tau) \in \mathcal{S}^L(\mathbb{A}_{L,f})$. 为了使它分裂, 必须有

$$b(\tau_1\tau_2)a(\tau_1\tau_2) = b(\tau_1)a(\tau_1)b(\tau_2)a(\tau_2).$$

由此我们得到

$$b(\tau_1)^{\tau_1}(b(\tau_2))d_{\tau_1,\tau_2} = b(\tau_1\tau_2). \tag{5.37}$$

如果要使 $b(\tau)a(\tau)$ 落在 $\mathcal{T}^L(\mathbb{A}_f)$ 内, 必须要

$$b(\tau)a(\tau) = \rho(b(\tau)a(\tau)),$$

所以

$$\rho(b(\tau))c_\rho(\tau) = b(\tau). \tag{5.38}$$

如果我们有 $\{c_\rho(\tau)\}$ 与 $\{d_{\tau_1,\tau_2}\}$, 以及 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 作用在 $\mathcal{S}^L : (\tau, d) \mapsto {}^\tau d$ 使得 (5.34), (5.35) 与 (5.36) 被满足, 我们可以构造 $\mathbb{Q}$ 上的 $\mathcal{T}^L$, 以及截面 a. 满足 (5.37) 与 (5.38) 的任意一组 $\{b(\tau)\}$ 定义 $\mathbb{Q}_l$ 上的一个分裂.

我们的任务是构造 $\{b(\tau)\}$, $\{c(\tau)\}$ 与 $\{d_{\tau_1,\tau_2}\}$. 事实上, $\{b(\tau)\}$ 先被构造, $\{d_{\tau_1,\tau_2}\}$, $\{c(\tau)\}$ 将分别由 (5.37), (5.38) 定义. 然后等式 (5.34), (5.35) 与 (5.36) 将能很快得出.

5.4.3 典范余权

回想起 $X(\mathcal{S})$ 是 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 上函数的模, 而且 $X(\mathcal{S})$ 的 Galois 模结构给出了 $\mathcal{S}$ 作为 $\mathbb{Q}$ 上的群的结构, 它是用右平移定义的. (前面提到的 Galois 的第二种角色). 我们仍然可以自由地使用左平移以定义 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 在 $\mathcal{S}$ 上的代数作用, 而且正合列 (5.31) 的因子集将是 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 取值在 $\mathcal{S}$ 内的 1 上闭链, 它被看作关于这个代数作用的 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 模 (前面提到的 Galois 的第一种角色). 因此在余权的格 $X_*(\mathcal{S}) = \mathrm{Hom}(X(\mathcal{S}), \mathbb{Z})$ 上, 我们也有 Galois 群的两个作用. 用右平移定义的作用记为 $\nu \mapsto \sigma\nu$, 而用左平移定义的作用记为 $\nu \mapsto \nu\tau$, 或 $\nu \mapsto {}^\tau\nu$.

用 $\mathcal{R}$ 表示群 $\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\,\mathrm{GL}(1)$. 在 $\mathbb{C}$ 上有典范同构 $\mathrm{GL}(1) \times \mathrm{GL}(1) \cong \mathcal{R}$, 并且 $\mathcal{R}$ 的有理特征标的格典范同构于 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. 同态 $h : \mathcal{R} \to \mathcal{S}$ 对偶于同态 $X(\mathcal{S}) \to X(\mathcal{R})$, 它把 λ 映为 $(\lambda(1), \lambda(\iota))$, 且定义在 $\mathbb{R}$ 上. 把 h 限制在第一个因子可得 $\mathcal{S}$ 的一个余权 μ, 即典范余权. 如果 $\lambda \in X(\mathcal{S})$, 则 $\langle \lambda, \mu \rangle = \lambda(1)$.

由于 $\mathcal{S}^L$ 是 $\mathcal{S}$ 的商, μ 也定义了 $\mathcal{S}^L$ 的一个余权, 为方便起见, 仍记为 μ. 如果 ν 是 $\mathcal{S}^L$ 的任意一个余权, x 是 L 或 $\mathbb{A}_f$ 的一个可逆元, 则 x^ν 将是 $\mathcal{S}^L(L)$ 或 $\mathcal{S}^L(\mathbb{A}_f)$ 的一个元素, 且对所有的 $\lambda \in X(\mathcal{S}^L)$ 满足 $\lambda(x^\nu) = x^{\langle\lambda,\nu\rangle}$. 我们也有以下等式:

(1) $\langle\lambda, \sigma\mu\rangle = \lambda(\sigma^{-1})$,

(2) $\langle\lambda, {}^\tau\mu\rangle = \lambda(\tau)$,

(3) ${}^{\tau^{-1}}\mu = \tau\mu$,

(4) $\sigma(x^\mu) = \sigma(x)^{\sigma\mu}$,

(5) $\tau(x^\mu) = x^{{}^\tau\mu}$,

其中 $\tau, \sigma \in \mathrm{Gal}(L^{\mathrm{ab}}/\mathbb{Q})$. 知道这些公式是如何导出的也许是有益的. 首先我们看一下 $\mathrm{Gal}(L^{\mathrm{ab}}/\mathbb{Q})$ 是如何作用以使 $X(\mathcal{S}^L)$ 成为 Galois 模的. 对于 $\lambda \in X(\mathcal{S}^L)$, $\nu \in X_*(\mathcal{S}^L)$, $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$, 我们有

$$(\sigma\lambda)(w) = \lambda(w\sigma), \qquad w \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}),$$

$$(\sigma\nu)(\lambda) = \nu(\sigma^{-1}\lambda),$$

且若 x 是 L 或 $\mathbb{A}_f(L)$ 的可逆元, 则

$$(\sigma\nu)(x) = \sigma(\nu(\sigma^{-1}(x))).$$

从最后一个等式即可得到 (iv). 至于 (i), 我们有

$$\langle\lambda, \sigma\mu\rangle = (\sigma\mu)(\lambda) = \mu(\sigma^{-1}\lambda) = (\sigma^{-1}\lambda)(1) = \lambda(\sigma^{-1}).$$

然后我们观察 $\mathrm{Gal}(L^{\mathrm{ab}}/\mathbb{Q})$ 在 $X(\mathcal{S}^L)$ 上的 “代数” 作用. 我们有

$${}^\tau\lambda(w) = \lambda(\tau^{-1}w), \qquad w \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}),$$

$${}^\tau\nu(\lambda) = \nu({}^{\tau^{-1}}\lambda),$$

以及

$$\langle\lambda, {}^\tau\mu\rangle = ({}^\tau\mu)(\lambda) = \mu({}^{\tau^{-1}}\lambda) = ({}^{\tau^{-1}}\lambda)(1) = \lambda(\tau).$$

这就证明了 (ii). 等式 (i) 与 (ii) 合起来就可得到 (iii). 类似地我们有

$$\langle{}^{\tau^{-1}}\lambda, \mu\rangle = \lambda(\tau).$$

若 x 是 L 或 $\mathbb{A}_f(L)$ 的可逆元, 则

$$\lambda(x^{{}^\tau\mu}) = x^{\langle\lambda, {}^\tau\mu\rangle} = x^{\langle{}^{\tau^{-1}}\lambda, \mu\rangle} = \lambda(\tau(x^\mu)).$$

由此即得 (v).

5.4.4　Weil 群内的陪集代表元

取 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{C}$ 内的代数闭包 $\overline{\mathbb{Q}}$. 设 v 是 $\overline{\mathbb{Q}}$ 的一个赋值, 因此也是 $\mathbb{Q}$ 的赋值, 且设 $\mathbb{Q}_v$ 以及 $\overline{\mathbb{Q}}_v$ 是 $\mathbb{Q}$ 及 $\overline{\mathbb{Q}}$ 关于 v 的完备化. 若 F 是 $\mathbb{Q}$ 在 $\overline{\mathbb{Q}}$ 内的有限 Galois 扩张, 则有以下嵌入:

$$F_v^\times \hookrightarrow C_F, \tag{5.39}$$

$$\mathrm{Gal}(F_v/\mathbb{Q}_v) \hookrightarrow \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q}). \tag{5.40}$$

局部与整体 Weil 群 $W_{F_v/\mathbb{Q}_v}$ 与 $W_{F/\mathbb{Q}}$ 分别被定义为以下扩张:

$$1 \longrightarrow F_v^\times \longrightarrow W_{F_v/\mathbb{Q}_v} \longrightarrow \mathrm{Gal}(F_v/\mathbb{Q}_v) \longrightarrow 1$$

与

$$1 \longrightarrow C_F \longrightarrow W_{F/\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q}) \longrightarrow 1.$$

我们可以把 (5.39) 与 (5.40) 嵌入以下交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & F_v^\times & \longrightarrow & W_{F_v/\mathbb{Q}_v} & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(F_v/\mathbb{Q}_v) & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle I_F} & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & C_F & \longrightarrow & W_{F/\mathbb{Q}} & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q}) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

此外我们可以适当选择中间的箭头, 使得它们与域扩张相容, 并且在取极限时导出 $I : W_{\mathbb{Q}_v} \to W_{\mathbb{Q}}$. $W_{\mathbb{Q}_v}$ 在 $W_{\mathbb{Q}}$ 内的像将被固定, 而 I_F 则被改变为 $w \mapsto xI_F(w)x^{-1}$, 其中 $x \in C_F$, $x\sigma(x)^{-1} \in F_v^\times$ (对所有的 $\sigma \in \mathrm{Gal}(F_v/\mathbb{Q}_v)$).

现在设 v 是由 $\overline{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{C}$ 给出的赋值, 则 $\mathbb{Q}_v$ 将是 $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{Q}}_v$ 将是 $\mathbb{C}$. 自然映射 $F_\infty^\times \to C_F$ 是一个嵌入, 我们有时可把 F_∞ 看成 C_F 的子群.

对于 C_L 在 $W_{L/\mathbb{Q}}$ 内的陪集, 我们选择一个代表元集 w_σ, $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$, 使得下列条件被满足:

(C1) $w_1 = 1$;

(C2) 若 $\sigma \in \mathrm{Gal}(L_v/\mathbb{Q}_v)$, 则 $w_\sigma \in W_{L_v/\mathbb{Q}_v}$;

(C3) 若 $\rho \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$, 且 $\sigma \in \mathrm{Gal}(L_v/\mathbb{Q}_v)$, 则 $w_\rho w_\sigma = a_{\rho,\sigma} w_{\rho\sigma}$, 其中 $a_{\rho,\sigma} \in L_\infty^\times$.

为了叙述最后一个条件, 对于陪集 $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})/\mathrm{Gal}(L_v/\mathbb{Q}_v)$, 我们可以选代表元 η 的一个族 $\mathfrak{f}$, 且对 $\sigma \in \mathrm{Gal}(L_v/\mathbb{Q}_v)$, 令 $w_{\eta\sigma} = w_\eta w_\sigma$. 我们假设 $\mathfrak{f}$ 包含 1. 利用这个选择, 我们也有

(C4) 若 $\{a_{\rho,\sigma}\}$ 是由 $w_\rho w_\sigma = a_{\rho,\sigma} w_{\rho\sigma}$ 定义的上闭链, 则对 $\eta \in \mathfrak{f}$ 以及 $\sigma \in \mathrm{Gal}(L_v/\mathbb{Q}_v)$, 有 $a_{\eta,\sigma} = 1$.

5.4.5 $b_0(\tau)$ 的定义及性质

对于 $w \in W_{L/\mathbb{Q}}$, 设 $w_\sigma w = c_\sigma(w) w_{\sigma'}$, $c_\sigma(w) \in C_L$. 如果我们取一个元素 $\tau \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, 提升到 $W_{\mathbb{Q}}$, 然后投影到 $W_{L/\mathbb{Q}}$, 则能得到 $W_{L/\mathbb{Q}}$ 的一个元素 $w(\tau)$, 它在模去连通分支, 特别是模去 $L_\infty^\times$ 的条件下, 是唯一确定的. 如果 $w = w(\tau)$, 我们令

$$b_0(\tau) = \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})} c_\sigma(w)^{\sigma_\mu}.$$

如果它落在 $C_L \otimes X_*(\mathcal{S}^L)$ 内, 则因 w 的定义不确定, 它的定义也不确定. 但是我们能证明, 如果取模 $L_\infty^\times \otimes X_*(\mathcal{S}^L)$ 的话, 它是有合适定义的, 不仅如此, 而且在域 L 的扩张下有很好的行为.

w 的不确定性在目前并无大碍, 因为我们仅可以自由地把 w 替换成 uw, 其中 $u = \lim_n u_n$, u_n 在 $L_\infty^\times U$ 的像里, U 是 L 的单位群的子群, 由强同余关系所定义. 我们可以记 $w = w(\tau) = cw_\tau$ 对某个 $c \in C_L$. 显然有 $w_\sigma w = c_\sigma(w) w_{\sigma\tau}$, 其中 $c_\sigma(\tau) = {}^\sigma c a_{\sigma,\tau}$. 对于 $u \in L_\infty^\times U \subseteq C_L$, 有 $uw = (uc)w_\tau$ 以及 $w_\sigma(uw) = c_\sigma(uw) w_{\sigma\tau}$, 其中

$$c_\sigma(uw) = {}^\sigma u c_\sigma(w).$$

由命题 3.4.1, 对所有的 $v \in U$, 我们有

$$\prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})} \sigma(v)^{\sigma\mu} = 1.$$

所以

$$\prod_\sigma c_\sigma(uw)^{\sigma\tau} = \left(\prod_\sigma \sigma(u)^{\sigma\mu}\right)\left(\prod_\sigma c_\sigma(w)^{\sigma\mu}\right)$$

在模 $L_\infty^\times \otimes X_*(\mathcal{S}^L)$ 下同余于 $\prod_\sigma c_\sigma(w)^{\sigma\tau}$.

假定代表元 w_σ 被替换成 $c_\sigma w_\sigma$, 并且 $a_{\rho,\sigma}$ 被替换成

$$a'_{\rho,\sigma} = e_\rho({}^\rho e_\sigma) a_{\sigma,\rho} e_{\rho\sigma}^{-1}.$$

如果 $\sigma \in \mathrm{Gal}(L_v/\mathbb{Q}_v)$, 则 $e_\sigma \in L_v^\times$ 且 $\rho(e_\sigma) \in L_\infty^\times$. 由于 $a_{\rho,\sigma}$ 和 a' 必须同在 $L_\infty^\times$ 内, 当 $\sigma \in \mathrm{Gal}(L_v/\mathbb{Q}_v)$ 时, 我们推断 $e_\rho \equiv e_{\rho\sigma} \pmod{L_\infty^\times}$. 此外, $c_\sigma(w)$ 被替换成 $c'_\sigma(w) = e_\sigma e_{\sigma\tau}^{-1} c_\sigma(w)$, $b_0(\tau)$ 被替换成

$$b'_0(\tau) = \prod_\sigma c'_\sigma(w)^{\sigma\mu} = \left\{\prod_\sigma e_\sigma^{\sigma\mu} e_{\sigma\tau}^{-\sigma\mu}\right\} b_0(\tau).$$

其因子可被写成

$$\prod_{\sigma} e_{\sigma}^{\sigma(1-\tau^{-1})\mu} \equiv \prod_{\eta\in\mathfrak{f}} \prod_{\sigma\in\mathrm{Gal}(L_v/\mathbb{Q}_v)} e_{\eta}^{\eta\sigma(1-\tau^{-1})\mu} \pmod{L_\infty^\times}.$$

由于

$$\sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(L_v/\mathbb{Q}_v)} \sigma(1-\tau^{-1})\mu = (1+\iota)(1-\tau^{-1})\mu = 0,$$

这一改变对 $b_0(\tau)$ 没有影响. 由于这个理由, 我们用同一个符号表示 $\tau \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 在 $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ 内的像. 以后我们仍然如此.

如果我们改变 I, 则 w 将替换成 xwx^{-1}, 其中 $x \in C_L$, 并且对所有的 $\sigma \in \mathrm{Gal}(L_v/\mathbb{Q})$, 有 $x\sigma(x)^{-1} \in L_v^\times$. 则 $c_\sigma(xwx^{-1}) = \sigma(x)\sigma\tau(x^{-1})c_\sigma(w)$, 且

$$\prod_{\sigma} \sigma(x)^{-\sigma\mu}\sigma\tau(x)^{\sigma\mu} = \prod_{\sigma} \sigma(x)^{\sigma(\tau^{-1}-1)\mu}.$$

由于当 $\sigma \in \mathrm{Gal}(L_v/\mathbb{Q}_v)$ 时 $\sigma(x) \equiv x \pmod{L_\infty^\times}$, 与前相同的论证可得 $b_0(\tau)$ 不改变.

最后假定 $L \subseteq L'$. 则 $b_0'(\tau) \in C_L \otimes X_*(\mathcal{S}^{L'})$ 与 $b_0(\tau) \in C_L \otimes X_*(\mathcal{S}^L)$ 都有定义, 我们需要验证在从第一个群到第二个群的典范映射下, $b_0'(\tau)$ 被映到 $b_0(\tau)$. 对 $L_v = \mathbb{R}$ 或 $L_v = \mathbb{C}$ 这两种情形必须分别讨论. 首先假设 $L_v = \mathbb{C}$, 此时 $\mathrm{Gal}(L'/L) \cap \mathrm{Gal}(L_v'/\mathbb{Q}_v) = \{1\}$. 由于 $b_0(\tau)$ 和 $b_0'(\tau)$ 都与陪集代表元的选取无关, 我们可以选取对验证 $b_0(\tau)$ 是 $b_0'(\tau)$ 的像最有利的代表元. 设 $\mathbf{e}$ 是包含 1 的陪集 $\mathrm{Gal}(L'/L)\backslash \mathrm{Gal}(L'/\mathbb{Q})/ \mathrm{Gal}(L_v'/\mathbb{Q}_v)$ 的代表元集. $\mathrm{Gal}(L'/\mathbb{Q})$ 的每个元素 σ 可被唯一地写成乘积 $\sigma = \zeta\eta\rho$, $\zeta \in \mathrm{Gal}(L'/L)$, $\eta \in \mathbf{e}$, $\rho \in \mathrm{Gal}(L_v'/\mathbb{Q}_v)$. 我们可假设 $w_\sigma' = w_\rho' w_\eta' w_\rho'$, 其中 $w_1' = 1$ 以及 $w_\rho' \in W_{L_v'/\mathbb{Q}_v}$. 设 w' 是相对于 L' 的 $w(\tau)$, w 是相对于 L 的 $w(\tau)$. 则在典范映射 $\pi: W_{L'/\mathbb{Q}} \to W_{L/\mathbb{Q}}$ 下, 元素 w' 被映到 w. 若 $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$, 它被提升为形如 $\eta\sigma$ 的 $\mathrm{Gal}(L'/\mathbb{Q})$ 的唯一元素. 我们假定 w_σ 是 $w_\eta' w_\rho'$ 的像. 则若

$$w_\eta' w_\rho' w' = d_{\eta,rho}(w') w_{\eta'}' w_{\rho'}'$$

其中 $d_{\eta,\rho}(w') \in W_{L'/L}$, 那么 $c_\sigma(w) = \pi(d_{\eta,\rho}(w'))$. 另一方面, 如果 $\sigma_1 = \zeta\eta\rho$ 落在 $\mathrm{Gal}(L'/\mathbb{Q})$ 内, 则

$$w_\zeta' d_{\eta,\rho}(w') = c_{\sigma_1}(w') w_\zeta'.$$

所以根据 π 的定义,

$$c_\sigma(w) = \prod_{\sigma_1\to\sigma} c_{\sigma_1}(w').$$

立即可得 $b_0(\tau)$ 是 $b_0'(\tau)$ 的像.

如果 $L_v = \mathbb{R}$, 则 $X(\mathcal{S}^L) = \mathbb{Z}$, 且 Galois 群平凡地作用. 加入我们把 w_σ 换成 $e_\sigma w_\sigma$, $e_\sigma \in C_L$. 则 $c_\sigma(w)$ 被换成 $e_\sigma e_{\sigma\tau}^{-1}$. 由于

$$\prod_\sigma (e_\sigma e_{\sigma\tau}^{-1})^{\sigma\mu} = \prod_\sigma (e_\sigma e_{\sigma\tau}^{-1})^{\mu} = 1,$$

它对 $b_0(\tau)$ 没有影响, 且在定义 $b_0(\tau)$ 时, 不需假设族 $\{w_\sigma\}$ 服从约束条件 (C1), (C2), (C3). 如果我们要定义 $b_0'(\tau)$, 在选取陪集代表元 w_σ', $\sigma \in \mathrm{Gal}(L'/\mathbb{Q})$ 时仍需非常小心. 不过由于我们仅对 $b_0'(\tau)$ 在 $\mathcal{S}^L$ 内的像感兴趣, 我们仍可忽略 (C1), (C2) 和 (C3). 我们选择陪集 $\mathrm{Gal}(L'/L)\backslash \mathrm{Gal}(L'/\mathbb{Q})$ 代表元的集合 $\mathbf{e}$, 记 $\sigma = \rho\eta$, $\rho \in \mathrm{Gal}(L'/L)$, $\eta \in \mathbf{e}$, 且取 $w_\sigma' = w_\rho' w_\eta'$. 如果 $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ 是 η 的像, 则取 $w_\sigma = \pi(w_\eta')$. 现在可以采用与前面同样的论证.

5.4.6 用 $b_0(\tau)$ 构作 Taniyama 群

现在我们可以进入最后一步.

首先设 $\tilde{b}(\tau)$ 是 $b_0(\tau)$ 到 $J_L \otimes X_*(\mathcal{S}^L) = \mathcal{S}^L(\mathbb{A}_L)$ 的提升, 且设 $b(\tau)$ 被投影到 $\mathcal{S}^L(\mathbb{A}_{L,f})$ 上的 $\tilde{b}(\tau)$. 元素 $b(\tau)$ 在模 $\mathcal{S}^L(L)$ 之下是有定义的. 让我们取定一种选取法.

然后我们要验证

$$d_{\tau_1,\tau_2} = b(\tau_1)^{\tau_1}(b(\tau_2))b(\tau_1\tau_2)^{-1}$$

在 $\mathcal{S}^L(L)$ 内. 在验证这一点时, 我们可用任何方式选取提升 $\tilde{b}(\tau_1)$, $\tilde{b}(\tau_2)$ 以及 $\tilde{b}(\tau_1\tau_2)$. 再选取 $c_\sigma(w_1)$ 与 $c_\sigma(w_2)$ 到 J_L 的提升 $\tilde{c}_\sigma(w_1)$ 与 $\tilde{c}_\sigma(w_2)$. 且取

$$\tilde{b}(\tau_1) = \prod_\sigma \tilde{c}_\sigma(w_1)^{\sigma\mu}, \qquad \tilde{b}(\tau_2) = \prod_\sigma \tilde{c}_\sigma(w_2)^{\sigma\mu}.$$

由于 $c_\sigma(w_1w_2) = c_\sigma(w_1)c_{\sigma\tau_1}(w_2)$, 我们可取 $\tilde{c}_\sigma(w_1w_2)$ 为 $\tilde{c}_\sigma(w_1)\tilde{c}_{\sigma\tau_1}(w_2)$. 经过与 5.4.3 节 相同的计算, 可以看到

$${}^\tau(\sigma\mu) = \sigma({}^\tau\mu) = (\sigma\tau^{-1})(\mu).$$

所以

$${}^{\tau_1}(\tilde{b}(\tau_2)) = \prod_\sigma \tilde{c}_\sigma(w_2)^{\sigma\tau_1^{-1}\mu} = \prod_\sigma \tilde{c}_{\sigma\tau_1}(w_2)^{\sigma\mu}.$$

这蕴含元素 d_{τ_1,τ_2} 等于 1.

最后我们要验证元素

$$c_\rho(\tau) = \rho(b(\tau))^{-1}b(\tau)$$

在 $\mathcal{S}^L(L)$ 内. 为此, 只需证明对任意的 $w \in W_{L/\mathbb{Q}}$ 与 $\rho \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$, 以下元素

$$\left\{\prod_\sigma c_\sigma(w)^{\sigma\mu}\right\}\left\{\prod_\sigma \rho(c_\sigma(w))^{-\rho\sigma\mu}\right\} \tag{5.41}$$

在 $L_\infty^\times \otimes X_*(\mathcal{S}^L)$. 假定 $w = w_1 w_2$, w_1 投影到 $\tau_1 \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$. 则 $c_\sigma(w) = c_\sigma(w_1)c_{\sigma\tau_1}(w_2)$, 且 (5.41) 等价于

$$\left\{\prod_\sigma c_\sigma(w_1)^{\sigma\mu}\rho(c_\sigma(w_1))^{\rho\sigma\mu}\right\}\tau_1\left\{\prod_\sigma c_\sigma(w_2)^{\sigma\mu}\rho(c_\sigma(w_2))^{-\rho\sigma\mu}\right\}.$$

所以我们只需验证对 $w \in C_L$ 以及 $w = w_\tau$, (5.41) 在 $L_\infty^\times \otimes X_*(\mathcal{S}^L)$ 内. 若 $w \in C_L$, 则 $c_\sigma(w) = \sigma(w)$, 且 $\prod_\sigma \sigma(w)^{\sigma\mu} = \prod_\sigma \sigma(w)^{\rho\sigma\mu}$. 所以 (5.41) 等于 1. 若 $w = w_\tau$, 则 $c_\sigma(w) = a_{\sigma,\tau}$ 以及

$$\prod_\sigma a_{\sigma,\tau}^{\sigma\mu}\rho(a_{\sigma,\tau})^{-\rho\sigma\mu} = \prod_\sigma a_{\rho,\sigma}^{\rho\sigma(\tau^{-1}-1)\mu}. \tag{5.42}$$

从条件 (C3) 可得 $a_{\rho,\sigma} \equiv a_{\rho,\sigma\iota} \pmod{L_\infty^\times}$. 由于 $(1+\iota)(1-\tau^{-1})\mu = 0$, (5.42) 式的右边在 $L_\infty^\times \otimes X_*(\mathcal{S}^L)$ 内.

由于 $b(\tau)$ 表面上看依赖于 $\tau \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, 实际上只与 τ 在 $\mathrm{Gal}(L^{\mathrm{ab}}/\mathbb{Q})$ 里的像有关, 所以群 $\mathcal{T}^L$ 与 $\mathcal{T}$ 是完全确定的. 很容易看到, $b(\tau)$ 定义的不明确性对应于截口 $a(\tau)$ 选取中的不明确性.

参 考 文 献

[1] 曹锡华, 王建磐. 线性代数群表示导论. 北京: 科学出版社, 1987
[2] 冯克勤. 交换代数基础. 北京: 高等教育出版社, 1986
[3] 冯克勤. 代数数论. 北京: 科学出版社, 2000
[4] 龚昇. 典型群上的调和分析. 北京: 科学出版社, 1983
[5] 谷超豪. 齐性空间微分几何, 上海: 上海科学技术出版社, 1965
[6] 华罗庚. 数论导引. 北京: 科学出版社, 1957
[7] 华罗庚. 多复变函数论中的典型域的调和分析. 北京: 科学出版社, 1965
[8] 华罗庚, 万哲先. 典型群. 上海: 上海科学技术出版社, 1963
[9] 黎景辉, 冯绪宁. 拓扑群引论. 北京: 科学出版社, 1997
[10] 黎景辉, 蓝以中. 二阶矩阵群的表示与自守形式. 北京: 北京大学出版社, 1990
[11] 黎景辉, 赵春来. 模曲线导引. 北京: 北京大学出版社, 2002
[12] 李克正. 交换代数与同调代数. 北京: 科学出版社, 1999
[13] 李克正. 晶体上同调初步. 中科院研究生院讲义, 2002
[14] 李克正. 代数几何初步. 北京: 科学出版社, 2004
[15] 陆洪文. 模形式讲义. 北京: 北京大学出版社, 1999
[16] 陆启铿. 典型流形与典型域. 上海: 上海科学技术出版社, 1963
[17] 潘承彪. 模形式导引. 北京: 北京大学出版社, 2002
[18] 万哲先. 李代数. 北京: 科学出版社, 1964
[19] 许以超. 李群与 Hermite 对称空间. 北京: 科学出版社, 2001
[20] 严志达. 李群和微分几何. 北京: 人民教育出版社, 1960
[21] 严志达. 半单纯李群李代数表示论. 上海: 上海科技出版社, 1963
[22] 严志达, 许以超. Lie 群及其 Lie 代数. 北京: 高等教育出版社, 1985
[23] 周伯埙. 同调代数. 北京: 科学出版社, 1988
[24] A.A. 阿尔贝脱. 代数结构. 谢邦杰译. 北京: 科学出版社, 1963
[25] M.F. 阿蒂亚, I.G. 麦克唐纳. 交换代数导引. 冯绪宁, 刘木兰, 戴宗铎译. 北京: 科学出版社, 1982
[26] Ю.A. 德罗兹德, B.B. 基里钦柯. 有限维代数. 刘绍学, 张英伯译. 北京: 北京师范大学出版社, 1983
[27] R. 哈茨霍恩. 代数几何. 冯克勤, 刘木兰, 胥鸣伟译. 北京: 科学出版社, 1994
[28] J.E. 汉弗莱斯. 李代数及其表示理论导引. 陈志杰译. 上海: 上海科学技术出版社, 1981
[29] N. 贾柯勃逊. 李代数. 曹锡华译. 北京: 科学出版社, 1982
[30] (荷) 范德瓦尔登. 代数学. I. 丁石孙, 曾肯成, 郝鈵新译. 北京: 科学出版社, 1963; II. 曹锡华, 曾肯成, 郝鈵新译. 北京: 科学出版社, 1976
[31] Artin M. Algebraization of formal moduli I. In: Global Analysis, Papers in Honor of K. Kodaira. University of Tokyo Press. Princeton: Princeton University Press, 1969, 21–71
[32] Artin M. Algebraization of Formal Moduli II. Ann. of Math., 1970, 91: 88–135
[33] Artin M. Construction techniques for algebraic spaces. Actes Congres Int. Math., 1970, 1–497
[34] Artin M, Winters G. Degenerate fibres and stable reduction of curves. Topology, 1971, 10: 373–383

[35] Baily W L Jr, Borel A. Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains. Ann. Math., 1966, 84: 442–528
[36] Baker A, Wüstholz G. Logarithmic forms and group varieties. J. reine andew. Math., 1993, 442: 19–62
[37] Bashmakov M I. Cohomology of abelian varieties over a number field. Russian Math Survey, 1972, 27: 25–70
[38] Bernstein J, Gelbart S. An introduction to Langlands program. Boston: Birkhäuser, 2003
[39] Beilinson A A, Bernstein J, Deligne P. Faisceaux pervers. Astérisque, 1982, 100
[40] Berthelot P. Cohomologie Cristalline des Schémas de Caractéristique $p > 0$. Lect. Notes Math. 407. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1974
[41] Berthelot P. Géométrie rigide et cohomologie des variétés algégraiques de caractéristique p. Soc. Math. France, Mémoire, 1986, 23: 7–32
[42] Berthelot P, Breen L, Messing W. Théorie de Dieudonné cristalline II. Lect. Notes Math. 930. Berlin: Springer-Verlag, 1982
[43] Berthelot P, Ogus A. Notes on crystalline cohomology. Princeton: Princeton Univ. Press, 1978
[44] Bhargava M. Higher composition laws. Ann. Math., 2004, 159: 217–250, 865–886
[45] Bloch S, Kato K. L-functions and Tamagawa numbers of motives. In: Grothendieck Festschrift. I: 333–400. Boston: Birkhäuser, 1990
[46] Borel A. Groupes linéaires algébriques. Ann. Math., 1956, 64: 20–82
[47] Borel A. Some finiteness properties of adele groups over number fields. Publ. Math. IHES, 1963, 16: 5–30
[48] Borel A. Linear Algebraic groups. Benjamin, 1969
[49] Borel A. Introduction aux groupes arithmétiques. Publ. Inst. Math. de l'Univ. de Strasbourg. Paris: Hermann, 1969
[50] Borel A. Automorphic L-functions. Proc. Sym. Pure Math., 1979, 33:2, 27–61
[51] Borel A. Linear Algebraic Groups. Berlin: Springer-Verlag, 1991
[52] Borel A, Harish-Chandra. Arithmetic subgroups of algebraic groups. Bull. Amer. Math. Soc., 1961, 67: 579–583
[53] Borel A, Serre J.-P. Corners and arithmetic groups, Avec un appendice: Arrondissement des variétés à coins, par A. Douady et L. Hérault. Comment. Math. Helv., 1973, 48: 436–491
[54] Borel A, Tits J. Groupes réductifs. Publ. Math. IHES, 1965, 27: 55–150
[55] Borovoi M. The Brauer-Manin obstructions for homogeneous spaces with connected or abelian stabilizer. J. reine angew. Math., 1996, 473: 181–194
[56] Borovoi M. Abelian Galois cohomology of reductive groups. Mem. Amer. Math. Soc., 1998, 132:626, viii+50 pp
[57] Borovoi M, KunyavskiĭB. Formulas for the unramified Brauer group of a principal homogeneous space of a linear algebraic group. J. Algebra., 2000, 225: 804–821
[58] Borovoi M, Rudnick Z. Hardy-Littlewood varieties and semisimple groups. Inv. Math., 1995, 119: 37–66
[59] Bosch S, Lütkebohmert W, Raynaud M. Neron models. Berlin: Springer-Verlag, 1990
[60] Bourbaki N. Algèbre Commutative. Paris: Masson, 1961

[61] Braun H, Koecher M. Jordan Algebren. Berlin: Springer-Verlag, 1966
[62] Brauer R, Nesbitt C J. On the modular representations of groups of finite order, I. Toronto: Toronto Studies, 1937
[63] Breen L. Fonctions theêta et théorèm du cube. Lect. Notes Math., 980. Berlin: Springer-Verlag, 1983
[64] Breuil C. Groupes p-divisibles, Groupes finis et modules filtrés. Ann. Math., 2000, 152: 489–549
[65] Breuil C, Conrand B, Diamond F, Taylor R. On the modularity of elliptic curves over $\mathbb{Q}$: wild 3-adic exercises. J. Amer. Math. Soc., 2001, 14:4 843–939
[66] Bruhat F. Lectures on Lie groups and representations of locally compact groups. Tata Institute of Fundamental Research. Bombay, India, 1958
[67] Bruhat F, Tits J. Groupes reductifs sur un corps local. Publ. Math. IHES, 1972, 41: 5–252; 1984, 60: 5–184
[68] Bucur I, Deleanu A. Introduction to the theory of categories and functors. New York: Wiley, 1968
[69] Cartan E, Eilenberg S. Homological Algebra. Princeton: Princeton Univ. Press, 1956
[70] Carter R W. Simple Groups of Lie Type. John Wiley & Sons, 1972
[71] Carter R W. Finite Groups of Lie Type. John Wiley & Sons, 1985
[72] Cartier P. Isogenies and duality of abelain varieties. Ann. Math., 1960, 71: 315–351
[73] Cassels J U S. Arithmetic on curves of genus 1. J. reine angew. Math., 1959, 202: 52–99; 1960, 203: 174–208; 1962, 211: 95–112; 1964, 214: 65–70; 1964, 216: 150–158; 1965, 217: 180–189; Proc. London Math. Soc., 1962, 12: 259–296; J. London Math. Soc., 1963, 38: 244–248
[74] Cassels J U S. The dual exact sequence. J. reine angew. Math., 1964, 216: 150–158
[75] Cassels J U S. Diophantine equations with special reference to elliptic curves. J. Lond. Math. Soc., 1966, 41: 193–291
[76] Cassels J U S, Fröhlich A. Algebraic Number Theory. Washington D. C.: Thompson Book Co., 1967
[77] Chari V, Pressley A. A guide to quantum groups. Cambridge: Cambridge University Press, 1994
[78] Chen Z (陈志杰). A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces over an algebraically closed field of characteristic p, I. Acta Math. Sinica (N. S.), 1986, 2: 168–177; II. Chin. Ann. Math. Ser. A., 1988, 9: 10–22
[79] Chernousov V I. The Hasse principle for groups of type E_8. (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1989, 306:5 1059–1063. translation in Soviet Math. Dokl. 1989, 39:3 592–596
[80] Chernousov V I. The kernel of the Rost invariant, Serre's conjecture II and the Hasse principle for quasi-split groups ${}^{3,6}D_4, E_6, E_7$. Math. Ann., 2003, 326:2 297–330
[81] Chernousov V I, Merkurjev A. R-equivalence in spinor groups. J. Amer. Math. Soc., 2001, 14:3 509–534
[82] Chevalley C. Séminaire Groupes de Lie algébriques. Paris, 1956/58
[83] Clozel L. Nombres de Tamagawa des groupes semi-simples. Sém. Bourbaki, 1988, 702
[84] Coates J, Sujatha R. Galois Cohomology of Elliptic Curves. Providence: Amer. Math. Soc., 2000

[85] Colliot-Thélène J.-L, Sansuc J.-J. La R-équivalence sur les tores. Ann. Sci. école Norm. Sup., (4) 1977, 10:2 175–229

[86] Colliot-Thélène J.-L, Sansuc J.-J. Principal homogeneous spaces under flasque tori: applications. J. Algebra, 1987, 106:1 148–205

[87] Colmez P. Periodes des varietes abeliennes a multiplication complexe. Ann. Math., 1993,138: 625–683

[88] Conrad B. Finite group schemes over bases with low ramification. Compos. Math., 1999, 119: 239–320

[89] Conrad B. Grothendieck Duality and Base Change. Lect. Notes Math. 1750. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 2000

[90] de Jong A J. Finite locally free group schemes in characteristic p and Dieudonné modules. Inv. Math., 1993, 114:1 89–137

[91] de Jong A J. The moduli spaces of polarized abelian varieties. Math. Ann., 1993, 295:3 485–503

[92] de Jong A J. Crystalline Dieudonné module theory via formal and rigid geometry. Publ. Math. IHES, 1996, 82: 5–96

[93] de Jong A J. Barsotti-Tate groups and crystals. Proceedings ICM 1998 (Berlin), vol II, 259–265

[94] Deligne P. Variétés abéliennes ordinnaires sur un corps fini. Inv. Math., 1960, 8: 238–343

[95] Deligne P. Travaux de Griffiths. Lect. Notes Math., 180, 213–237. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1969

[96] Deligne P. Travaux de Shimura. Lect. Notes Math., 244, 123–165. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1971

[97] Deligne P. Variété de Shimura. In: Proc. Symposium Pure Math., Providence: Amer. Math. Soc. 1979, 33: 247–289

[98] Deligne P. Théorie de Hodge I. Actes Congress international math., 1970, tom I, 425–430; II, Publ. Math. IHES, 40(1971), 5–57; III. Publ. Math. IHES, 1974, 44: 5–78

[99] Deligne P, Milne J S, Ogus A, Shih K.-Y. Hodge cycles, motives, and Shimura varieties. Lect. Notes Math., 900. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1982

[100] Demazure M. Lectures on p-divisible groups. Lect. Notes Math., 302. Berlin: Springer-Verlag, 1972

[101] Demazure M, Gabriel P. Groupes algébriques 1. North Holland Pub. Co., 1960

[102] Deuring. Algebren. Berlin: Springer-Verlag, 1934

[103] Douady A. Cohomologie des groupes compacts totalement discontinus. Sém. Bourbaki, 1959/60, 189

[104] Drinfeld V G. Elliptic modules. Math USSR Sbornik, 1976, 23: 561–592

[105] Drinfeld V G. A proof of Langlands' global conjecture for GL(2) over a function field. Funkcional. Anal. i Priložen., 1977, 11:3 74–75

[106] Drinfeld V G. A proof of Petersson's conjecture for function fields. Uspehi Mat. Nauk, 1977, 32:2(194) 209–210

[107] Drinfeld V G. Two-dimensional l-adic representations of the fundamental group of a curve over a finite field and automorphic forms on GL(2). Amer. J. Math., 1983, 105:1 85–114

[108] Drinfeld V G. Coverings of p-adic symmetric sapces. Func. Ana. App., 1976, 10: 29–40
[109] Du J (杜杰), Rui H (芮和兵). Ariki-Koike algebras with semisimple bottoms. Math. Z., 2000, 234: 807–830
[110] Durdevich M, Makaruk H, Owczarek R. Generalized noiseless quantum codes utilizing quantum enveloping algebras. J. of Physics, A 2001, 34: 1423–1437
[111] Faltings G. Endlichkeitssatze für abelsche Varietaten über Zahlkorpern. Inv. Math., 1983, 73:3 349–366
[112] Faltings G. Arithmetic theory of Siegel modular forms. In: Number theory (New York, 1984–1985), 101–108. Lect. Notes Math., 1240. Berlin: Springer-Verlag, 1987
[113] Faltings G. Crystalline cohomology and p-adic Galois-representations. In: Algebraic analysis, geometry, and number theory (Baltimore, MD, 1988), 25–80. Baltimore: Johns Hopkins Univ. Press, 1989
[114] Faltings G. p-adic Hodge theory. J. Amer. Math. Soc., 1988, 1:1 255–299
[115] Faltings G. Moduli-stacks for bundles on semistable curves. Math. Ann., 1996, 304:3 489–515
[116] Faltings G, Chai C.-L. Degeneration of Abelian varieties. Berlin: Springer-Verlag, 1990
[117] Fogarty J. Invariant Theory. Benjamin, 1969
[118] Folland G B. A course in abstract harmonic analysis. Boca Raton: CRC Press, 1995
[119] Fontaine J.-M. Groupes p-divisibles sur les corps locaux. Astérisque, No. 47–48. Paris: Soc. Math. de France, 1977. i+262 pp
[120] Fontaine J.-M. Formes differentiells et modules of Tate des varietes abeliennes. Inv. Math., 1982, 65: 379–409
[121] Fontaine J.-M. Il n'y a pas de variété abélienne sur Z. Inv. Math., 1985, 81:3 515–538
[122] Fontaine J.-M. Périodes p-adiques. (Bures-sur-Yvette, 1988), Astérisque, 1994, 223
[123] Fontaine J.-M, Mazur B. Geometric Galois representations. In: Elliptic curves, modular forms, & Fermat's last theorem (Hong Kong, 1993), 41–78. Ser. Number Theory, I. Cambridge: Internat. Press, 1995
[124] Fossum R, Iversen B. On Picard groups of algebraic fibre space. J. Pure App. Alg., 1973, 3: 269–280
[125] Franke G, Manin Yu I, Tschinkel Yu. Rational points of bounded height on Fano varieties. Inv. Math., 1989, 95:421–435
[126] Fresnel J, van der Put M. Rigid analytic geometry and its applications. Boston: Birkhäuser, 2004
[127] Gaitsgory D, Braverman A. Geometric Eisenstein series. Inv. Math., 2002, 150:2 287–384
[128] Gaitsgory D, Frenkel E, Kazhdan D, Vilonen K. Geometric realization of Whittaker functions and the Langlands conjecture. J. Amer. Math. Soc., 1998, 11:2 451–484
[129] Gaitsgory D, Kazhdan D. Representations of algebraic groups over a 2-dimensional local field. Geom. Funct. Anal., 2004, 14:3 535–574
[130] Giraud J. Cohomologie non abélienne. Berlin: Springer-Verlag, 1971
[131] Goren E Z. Lectures on Hilbert Modular Varieties. CRM series, Providence: Amer. Math. Soc., 2002
[132] Goresky M, Harder G, MacPherson R, Nair A. Local intersection cohomology of Baily-Borel compactifications. Compos. Math., 2002, 134:3 243–268

[133] Greenberg R. Iwasawa theory for elliptic curves. Cetraro Lectures

[134] Griffiths P. Periods of integrals on algebraic manifolds, I. Amer. J. Math., 1968, 90: 568–626; II. Amer. J. Math., 1968, 90: 805–865; III. Publ. Math. IHES, 1970, 38: 125–180

[135] Griffiths P, Harris J. Principles of Algebraic Geometry. New York: John Wiley and Sons, 1978

[136] Grothendieck A. A general theory of fibre spaces with structure sheaf. University of Kansas, 1955

[137] Grothendieck A. Sur quelques points d'algebre homologique. Tôhoku Math J., 1957, 9: 119–221

[138] Grothendieck A. Techniques de construction en Géométrie analytique, IV: Formalisme général. Séminaire Cartan, n° 11(1960/61); V: Fibrés vectoriels. Séminaire Cartan, n° 12(1960/61)

[139] Grothendieck A. Groupes de Barsotti-Tate et cristaux de Dieudonné. Séminaire de Mathématiques Supérieures, No. 45 (été, 1970). Montréal: Les Presses de l'Université de Montréal, 1974. 155 pp

[140] Grothendieck A. Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, III, Préschemas quotients. Sḿ. Bourbaki, 6, Exp. No. 212, 99–118. Paris: Soc. Math. France, 1995

[141] Grothendieck A. Fondements de la Géométric Algébrique. Sém. Bourbaki, exp. n° 149(1956/57); 182(1958/59); 190(1959/60); 212(1960/61); 221(1960/61); 232(1961/62); 236(1961/62). New York: Benjamin, 1966

[142] Grothendieck A, Dieudonné J. Eléments de Géométrie Algébrique: Le Lengege des Schémas. Publ. Math. IHES, 1960, 4

[143] Grothendieck A, Dieudonné J. Eléments de Géométrie Algébrique: Etude Globale Élémentaire de Quelques Classes de Morphismes. Publ. Math. IHES, 1961, 8

[144] Grothendieck A, Dieudonné J. Eléments de Géométrie Algébrique: Etude Cohomologique des Faisceaux Cohérents. Publ. Math. IHES, 1961, 11; 1963, 17

[145] Grothendieck A, Dieudonné J. Eléments de Géométrie Algébrique: Etude Locale des Schémas et des Morphismes de Schémas. Publ. Math. IHES, 1964, 20; 1965, 24; 1966, 28; 1967, 32

[146] Grothendieck A, et al. Séminaire de Géométric Algébrique 1: Revêtments Etales et Groupe Fondamental. Lect. Notes Math., 224. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1971

[147] Grothendieck A, et al. Séminaire de Géométric Algébrique 3: Schémas en Groupes I, II, III. Lect. Notes Math., 151, 152, 153. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1970

[148] Grothendieck A, et al. Séminaire de Géométric Algébrique 4: Théorie des Topos et Cohomologie Etale. Lect. Notes Math., 269, 270, 305. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1972/73

[149] Grothendieck A, et al. Séminaire de Géométric Algébrique 5: Cohomologie l-adique et Fonctions L. Lect. Notes Math., 569, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1977

[150] Grothendieck A, et al. Séminaire de Géométric Algébrique 6: Théorie des Intersections

et Théorème de Riemann-Roch. Lect. Notes Math., 225, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1971

[151] Grothendieck A, et al. Séminaire de Géométric Algébrique 7: Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique. Lect. Notes Math., 288, 340, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1972/73

[152] Haberland K. Galois cohomology of algebraic number fields. Berlin: VEB Deutscher Verlag de Wissenschaften, 1978

[153] Haboush W J. Reductive groups are geometrically reductive. Ann. Math., (2) 1975, 102:1 67–83

[154] Haboush W J, Parshall B J. Algebraic groups and their generalizations: quantum and infinite-dimensional methods. Providence: Amer. Math. Soc., 1994

[155] Harder G. Über die Galoiskohomologie halbeinfacher Matrizengruppen, I. Math. Z., 1965, 90: 404–428

[156] Harder G. Über die Galoiskohomologie halbeinfacher Matrizengruppen, II. Math. Z., 1966, 92: 396–415

[157] Harder G. Halbeinfache Gruppenschemata über Dedekindringen. Inv. Math., 1967, 4: 165–191

[158] Harder G. Minkowskische Reduktionstheorie über Funktionenkörpern. Inv. Math., 1969, 7: 33–54

[159] Harder G. A Gauss-Bonnet formula for discrete arithmetically defined groups. Ann. Sci. école Norm. Sup., (4) 1971, 4: 409–455

[160] Harder G, Langlands R P, Rapoport M. Algebraische Zyklen auf Hilbert-Blumenthal-Flachen. J. reine angew. Math., 1986, 366: 53–120

[161] de la Harpe, P., Valette, A. La Propriété (T) de Kazhdan. Astérisque, 1989, 175

[162] Harris M, Taylor R. The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties, With an appendix by Vladimir G. Berkovich. Annals of Mathematics Studies, 151. Princeton: Princeton Univ. Press, 2001

[163] Hartshorne R. Residues and Duality. Lect. Notes Math., 20. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1966

[164] Helgason S. Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces. Boston: Academic Press, 1978

[165] Hida H. p-adic automorphic forms on Shimura varieties. Berlin: Springer-Verlag, 2004

[166] Hiroyuki Y. Absolute CM-periods. Providence: Amer. Math. Soc., 2003

[167] Hochschild G, Nakayama T. Cohomology in class field theory. Ann. of Math., 1952, 55: 348–366

[168] Howe E W. Principally polarized ordinary abelian varieties over finite fields. Trans. Amer. Math. Soc., 1995, 347:7 2301–2401

[169] Humphreys J E. Linear Algebraic Groups. Berlin: Springer-Verlag, 1975

[170] Humphreys J E. Ordinary and modular representations of Chevalley groups. Lect. Notes Math., 528. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1976

[171] Humphreys J E. Hilbert's fourteenth problem. Amer. Math. Monthly, 1978, 85:5 341–353

[172] Humphreys J E. Arithmetic groups. Lect. Notes Math., 789. Berlin: Springer-Verlag, 1980

[173] Humphreys J E. Reflection groups and Coxeter groups. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 29. Cambridge: Cambridge University Press, 1990

[174] Ichino A. Regularized Siegel-Weil formula. J. reine angew. Math., 2001, 539: 201–234

[175] Iyanaga S. The theory of numbers. Amsterdam: North Holland Publishing Co, 1975.

[176] Jacquet H, Lai K F (黎景辉). A relative trace formula. Compos. Math., 1985, 54:2 243–310

[177] Jacquet H, Lai K F (黎景辉), Rallis S. A trace formula for symmetric spaces. Duke Math. J., 1993, 70:2 305–372

[178] Jacquet H, Lapid E, Rogawski J. Periods of automorphic forms. J. Amer. Math. Soc., 1999, 12:1 173–240

[179] Jacobson N. Basic Algebra I, II. New York: W. H. Freeman, 1989

[180] Jacobson N. Exceptional Lie algebras. Marcel-Dekker

[181] Jacobson N. Jordan algebras. Coll. Pub. volume 39. Providence: Amer. Math. Soc., 1968

[182] Jantzen J C. Representations of algebraic groups. Boston: Academic Press, 1987

[183] Jantzen J C. Lectures on quantum groups. Providence: Amer. Math. Soc., 1996

[184] Kac V G. Infinite dimensional Lie algebras. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990

[185] Kaplansky I. Commutative Rings. Chicago: University of Chicago Press, 1970

[186] Kapranov M M. Eisenstein series and quantum affine algebras, Algebraic geometry. 7, J. Math. Sci., (New York) 1997, 84:5 1311–1360

[187] Kapranov M M. Analogies between the Langlands correspondence and topological quantum field theory. In: Functional analysis on the eve of the 21st century, Vol. 1 (New Brunswick, NJ, 1993), 119–151, Progr. Math., 131. Boston: Birkhäuser, 1995

[188] Kapranov M, Voevodsky V. Braided monoidal 2-categories and Manin-Schechtman higher braid groups. J. Pure Appl. Algebra, 1994, 92:3 241–267

[189] Katz N. Serre-Tate local moduli. Lect. Notes Math., 868, 138–202. Berlin: Springer-Verlag, 1981

[190] Katz N. p-adic properties of modular schemes and modular forms. Lect. Notes Math., 350, 69–190. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1973

[191] Katz N M, Mazur B. Arithmetic Moduli of Elliptic Curves. Princeton: Princeton Univ. Press, 1985

[192] Kempf G, Knudsen F, Mumford D, Saint-Donat B. Algebraic Spaces. Lect. Notes Math., 203, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1971

[193] Kempf G, Knudsen F, Mumford D, Saint-Donat B. Toroidal Embeddings I. Lect. Notes Math., 339, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1973

[194] Kiehl R, Freitag E. Etale cohomology and the Weil conjecture. New York: Springer-Verlag, 1988

[195] Kiehl R, Weissauer R. Weil conjectures, perverse sheaves, and l-adic Fourier transform. New York: Springer-Verlag, 2001

[196] Kimura T. Introduction to Prehomogeneous Vector Space. Providence: Amer. Math. Soc., 2003

[197] Kisin M, Lai K F (黎景辉). Overconvergent Hilbert Modular Forms. Amer. J. Math., 2005, 127

[198] Kitaev A Yu. Fault-tolerant quantum computation by anyons. arXiv:quant-

ph/9707021, 1997.

[199] Klimyk A, Schmudgen K. Quantum groups and their representations. Berlin: Springer-Verlag, 1997

[200] Kneser M. Starke Approximation in algebraischen Gruppen, I. J. reine angew. Math., 1965, 218: 190–203

[201] Kneser M. Galois-Kohomologie halbeinfacher algebraischer Gruppen über $\mathfrak{p}$-adischen Körpern, I. Math. Z., 1965, 88: 40–47

[202] Kneser M. Galois-Kohomologie halbeinfacher algebraischer Gruppen über $\mathfrak{p}$-adischen Körpern, II. Math. Z., 1965, 89: 250–272

[203] Kneser M. Lectures on Galois cohomology of classical groups, With an appendix by T. A. Springer-Verlag, Notes by P. Jothilingam. Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics, No. 47. Bombay: Tata Institute of Fundamental Research, 1969, ii+158 pp.

[204] Koecher M. An elementary approach to bounded symmetric domains. Rice Univ. Lect. Notes, 1969

[205] Koizumi S. On specialization of the Albanese and Picard varieties. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1960, 32: 371–382

[206] Kottwitz R E. Rational conjugacy classes in reductive groups. Duke Math. J., 1982, 49:4 785–806

[207] Kottwitz R E. Isocrystals with additional structure. Compos. Math., 1985, 56:2 201–220

[208] Kottwitz R E. Tamagawa numbers. Ann. Math., 1988, 127: 629–646

[209] Kottwitz R E. Shimura varieties and λ-adic representations. In: Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. I (Ann Arbor, MI, 1988), 161–209. Perspect. Math., 10. Boston: Academic Press, 1990

[210] Kottwitz R E. Points on some Shimura varieties over finite fields. J. Amer. Math. Soc., 1992, 5:2 373–444

[211] Kottwitz R E. On the λ-adic representations associated to some simple Shimura varieties. Inv. Math., 1992, 108:3 653–665

[212] Kottwitz R E. Points on some Shimura varieties over finite fields. J. Amer. Math. Soc., 1992, 5: 373–444

[213] Kottwitz R E. Isocrystals with additional structure, II. Compos. Math., 1997, 109:3 255–339

[214] Kottwitz R E, Shelstad D. Foundations of twisted endoscopy. Astérisque, 1999, 255

[215] Kudla S S, Rallis S. A regularized Siegel-Weil formula. Ann. Math., 1994, 140: 1–80

[216] Kudla S S, Rapoport M. Cycles on Siegel threefolds and derivatives of Eisenstein series. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., (4) 2000, 33:5 695–756

[217] Lafforgue L. Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands. Inv. Math., 2002, 147:1 1–241

[218] Lafforgue L. Chirurgie des grassmanniennes. CRM Monograph Series, 19. Providence: Amer. Math. Soc., 2003

[219] Lai K F (黎景辉). Tamagawa number of reductive algebraic groups. Compos. Math., 1980, 41:2 153–188

[220] Lai K F (黎景辉). Algebraic cycles on compact Shimura surface. Math. Z., 1985, 189:

593–602

[221] Lai K F (黎景辉). Lefschetz number and unitary groups. Bull. Aus. Math. Soc., 1991, 43: 193–209

[222] Lai K F (黎景辉), Voskuil H. p-adic automorphic functions for the unitary group in three variables. Algebra Colloq., 2000, 7:3 335–360

[223] Lai K F (黎景辉), Vostokov S V. Explicit pairing and class field theory of multidimensional complete fields. St. Petersburg Math. J., 2000, 11:4 611–624

[224] Lai K F (黎景辉), 杨杰明. Rational points in flag varieties over function fields. J. Numb. Th., 2002, 95: 142–147

[225] Lang S. Abelian varieties. New York: Wiley, 1959

[226] Lang S. Algebraic Number Theory. Addison-Wesley, 1970

[227] Lang S, Tate J. Principal homogeneous spaces over abelian varieties. Amer. J. Math., 1958, 80: 659–684

[228] Langlands R P. Representations of abelian algebraic groups. Pacific J. Math., 1997, Special Issue, 231–250

[229] Langlands R P. Problems in the theory of automorphic forms. Lect. Notes Math., 170, 18–86. Berlin: Springer-Verlag, 1970

[230] Langlands R P. Automorphic representations, Shimura varieties and motives. Proc. Sym. Pure Math., 1979, 33:2 205–246

[231] Langlands R P. Shimura varieties and the Selberg trace formula. Canadian J. Math., 1977, 29

[232] Langlands R P. On the zeta functions of some simple Shimura varieties. Canad. J. Math., 1969, 31: 1121–1216

[233] Langlands R P. Sur la mauvaise réduction d'une variété de Shimura. Astérisque, 1978, 65: 125–154

[234] Laumon G. Correspondance de Langlands géométrique pour les corps de fonctions. Duke Math. J., 1987, 54:2 309–359

[235] Laumon G. Faisceaux automorphes liés aux séries d'Eisenstein. In: Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. I (Ann Arbor, MI, 1988), 227–281, Perspect. Math., 10. Boston: Academic Press, 1990

[236] Laumon G. Travaux de Frenkel, Gaitsgory et Vilonen sur la correspondance de Drinfeld-Langlands. Sém. Bourbaki, Vol. 2001/2002. Astérisque, 2003, 290: Exp. No. 906, ix, 267–284

[237] Lazard, M. Commutative formal groups. Lect. Notes Math., 443. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1975

[238] Li K (李克正), Oort F. Moduli of Supersingular Abelian Varieties. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1998

[239] Lichtenbaum S. Values of zeta function at non-negative integers. Lect. Notes Math., 1068, 127–138. Berlin: Springer-Verlag, 1984

[240] Loos O. Bounded symmetric domains and Jordan Pairs. Univ. of California Irvine Lect. Notes, 1977

[241] Lubin J, Tate J. Formal moduli for one-parameter formal Lie groups. Bull. Soc. Math. France, 1966, 94: 49–59

[242] Lubotzley A. Discrete groups, expanding graphs and invariant measures. Boston:

Birkhäuser, 1994

[243] Lusztig G. Introduction to quantum groups. Boston: Birkhäuser, 1993

[244] Manin Yu I. Cubic Forms. Amsterdam: North Holland Pub. Co., 1974

[245] Manin Yu I. Theory of commutative formal groups over fields of finite characteristic. Uspehi Mat. Nauk, 1963, 18:6(114) 3–90

[246] Mars J G M. Les nombres de Tamagawa. Sém. Bourbaki, 1968/69, 351

[247] Matsumura H. Commutative Ring Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1986

[248] Mazur B, Messing W. Universal extensions and one dimensional crystalline cohomology. Lect. Notes Math., 370. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1974

[249] McCallum W. Tate duality. Math. Ann., 1990, 288: 553–558

[250] Messing W. The crystals associated to Barsotti-Tate groups: with applications to abelian schemes. Lect. Notes Math., 264. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1972, iii+190 pp

[251] Milne J S. Weil-Chatelet groups over local fields. Ann. Sci. école Norm. Sup., (4) 1970, 3: 273–284

[252] Milne J S. Etale Cohomology. Princeton: Princeton University Press, 1980

[253] Milne J S. The action of an automorphism of $\mathbb{C}$ on a Shimura variety and its special point. In: Arithemtic and Geometry, 239–265. Boston: Birkhäuser, 1983

[254] Milne J S. Arithmetic Duality Theorems. Boston: Academic Press, 1986

[255] Miyake K. Models of certain automorphic function feilds. Acta math., 1971, 126: 245–307

[256] Moret-Baily L. Pinceaux de varietes abeliennes. Astérisque, 1985, 129

[257] Morishita M, Watanabe T. On S-Hardy-Littlewood homogeneous spaces. Int. J. Math., 1998, 9: 723–757

[258] Mostow G D, Tamagawa T. On the compactness of arithmetically defined homogeneous spaces. Ann. of Math., (2) 1962, 76: 446–463

[259] Mumford D. Geometric Invariant Theory. Ergebnisse 34, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1965

[260] Mumford D. Lecture on Curves on an Algebraic surface. Annals of Math Studies 59, Princeton: Princeton University Press, 1966

[261] Mumford D. On the equations defining abelian varieties I, II, III. Inv. Math., 1966, 1: 287–354; 1967, 3: 71–135, 215–244

[262] Mumford D. Bi-extensions of formal groups. In: Algebraic Geometry, 307–322. Oxford: Oxford Univ. Press, 1969

[263] Mumford D. Varieties defined by quadratic equations. In: Questioni sulle varieta algebriche, corsi der C.I.M.E. Edizioni Cremonese, Roma, 1969

[264] Mumford D. Abelian Varieties. Tata Inst. Fund. Research Studies in Math vol. 5, Oxford: Oxford Univ. Press, 1970

[265] Mumford D. An analytic construction of degenerating abelian varieties over a complete local ring. Compos. Math., 1972, 24:3 239–272

[266] Mumford D. Curves and Their Jacobians. University of Michigan Press, 1976

[267] Mumford D. Tata Lectures on Theta, I. Progress in Math vol. 28. Boston: Birkhäuser, 1983

[268] Mumford D. The red book of varieties and schemes. Berlin: Springer-Verlag, 1988

[269] Mumford D. Smooth compactification of locally symmetric varieties. Massachusetts: Math. Sci. Press, 1975

[270] Murre J P. Representation of unramified functors, Applications (according to unpublished results of A. Grothendieck). Sém. Bourbaki, 9, Exp. No. 294, 242–261. Paris: Soc. Math. France, 1995

[271] Nagata M. Complete reducibility of rational representations of a matrix group. J. Math. Kyoto Univ., 1961, 1: 87–99

[272] Neeman A. Triangulated category. Princeton: Princeton Univ. Press, 2001

[273] Néron A. Model minimaux des variétés abéliennes. Publ. Math. IHES, 1964, 21

[274] Neukirch J, Schmidt A, Wingberg K. Cohomology of Number Fields. Berlin: Springer-Verlag, 2000

[275] Norman P, Oort F. Moduli of abelian varieties. Ann. Math., (2) 1980, 112:3 413–439

[276] Oesterlé J. Nombres de Tamagawa et groupes unipotents en caractéristique p. Inv. Math., 1984, 78:1 13–88

[277] Ogg A P. Cohomology of abelian varieties over function fields. Ann. Math., (2) 1962, 76: 185–212

[278] O'Meara O T. Introduction to quadratic forms. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag, 1963

[279] Ono T. On some arithmetic properties of linear algebraic groups. Ann. Math., 1959, 70: 266–290

[280] Ono T. Arithmetic of algebraic tori. Ann. Math., 1961, 74: 101–138

[281] Ono T. On the Tamagawa number of algebraic tori. Ann. Math., (2) 1963, 78: 47–73

[282] Ono T. On the relative theory of Tamagawa numbers. Ann. Math., (2) 1965, 82: 88–111

[283] Ono T. The Gauss-Bonnet theorem and the Tamagawa number. Bull. Amer. Math. Soc., 1965, 71: 345–348

[284] Ono T. On algebraic groups and discontinuous groups. Nagoya Math. J., 1966, 27: 279–322

[285] Ono T. On Tamagawa numbers, Proc. Sym. Pure Math., 1966, 9: 122–132

[286] Ono T. Appendix, to Weil, Adels and Algebraic Groups

[287] Oort F. Sur le schéma de Picard. Bull. Soc. Math France, 1962, 90: 1–14

[288] Oort F. Commutative group schemes. Lect. Notes Math., 15. Berlin: Springer-Verlag, 1966

[289] Oort F. Finite group schemes, local moduli for abelian varieties, and lifting problems. Compos. Math., 1971, 23: 265–296

[290] Oort F. Subvarieties of moduli space: Inv. Math., 1974, 24: 95–119

[291] Oort F. Good and stable reduction of abelian varieties. Manuscripta Math., 1974, 11: 171–197

[292] Oort F. Endomorphism algebras of abelian varieties. In: Algebraic geometry and commutative algebra, Vol. II, 469–502. Tokyo: Kinokuniya, 1988

[293] Oort F. CM-liftings of abelian varieties. J. Algebraic Geom., 1992, 1:1 131–146

[294] Oort F. A stratification of a moduli space of abelian varieties. In: Moduli of abelian varieties (Texel Island, 1999), 345–416, Progr. Math., 195. Basel: Birkhäuser, 2001

[295] Oort F. Newton polygons and formal groups: conjectures by Manin and Grothendieck. Ann. Math., (2) 2000, 152:1 183–206

[296] Oort F. Yoneda extensions in abelian categories. Math. Ann., 1964, 153: 227–235

[297] Oort F, Tate J. Group schemes of finite order. Ann. Sc Ecole Norm Sup., 1970, 3: 1–21

[298] Parshall B J. Cohomology of algebraic groups. In: The Arcata Conference on Representations of Finite Groups (Arcata, Calif., 1986), 233–248, Proc. Sympos. Pure Math., 47, Part 1. Providence: Amer. Math. Soc., 1987

[299] Parshall B, Wang J P (王建磐). Quantum linear groups. Mem. Amer. Math. Soc., 1991, 89:439, vi+157 pp

[300] Parshin A N. Bruhat Tits buildings over higher dimensional local fields. In: Invitation to higher local fields, (ed. I. Fesenko, M. Kurihara, Münster Conf. 1999)

[301] Platonov V, Rapinchuk A. Algebraic groups and number theory. New York: Academic Press, 1995

[302] Prasad G. Semisimple groups and arithmetic groups. Proc. International Congress of Math., 1990, 2: 821–832

[303] Raghunathan M S. Discrete subgroups of Lie groups. Berlin: Springer-Verlag, 1972

[304] Ramakrishna R. On a variation of Mazur's deformation functor. Compos. Math., 1993, 87: 269–286

[305] Rapoport M, Richartz M. On the classification and specialization and of F crystals with additional structures. Compos. Math., 1996, 103: 153–181

[306] Rapoport M, Zink Th. Period spaces for p-divisible groups. Annals of Mathematics Studies, 141. Princeton: Princeton Univ. Press, 1996

[307] Raynaud M. Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes. Lect. Notes Math., 119. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1970

[308] Raynaud M. Anneaux locaux hensélines. Lect. Notes Math., 169. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1970

[309] Raynaud M. Schémas en groupes de type $(p, \cdots, p)$. Bull. Soc. Math Frrance, 1974, 102: 241–280

[310] Reimann H, Zink T. Der Dieudonné modul einer polarisierten abelschen Mannigfaltigkeit vom CM-Typ. Ann. Math., (2) 1988, 128:3 461–482

[311] Reiner I. Maximal orders. Boston: Academic Press, 1975

[312] Rim D S. Modules over finite groups. Ann. Math., 1959, 69: 700–712

[313] Rosenlicht M. Some basic theorems on algebraic groups. Amer. J. Math., 1956, 78: 401–443

[314] Russo B. Structure of JB triples. In: Jordan algebras (Oberwolfach 1992), 209–280. Berlin: de Gruyter, 1994

[315] Saavedra N. Categories Tannakiennes, Lect. Notes Math., 265. Berlin: Springer-Verlag, 1972

[316] Sansuc J.-J. Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres. J. reine angew. Math., 1981, 327: 12–80

[317] Satake I. Classification theory of semi-simple groups. Marcel Dekker, 1971

[318] Satake I. On classification of semisimple algebraic groups. In: Class field theory, (Tokyo, 1998), 197–216, Adv. Stud. Pure Math., 30. Tokyo: Math. Soc. Japan, 2001

[319] Satake I. Algebraic structures of symmetric domains. Princeton: Princeton University

Press, 1980
[320] Sato M, Shintani T. On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces. Ann. Math., 1974, 100: 131–170
[321] Schubert H. Categories. Berlin: Springer-Verlag, 1972
[322] Seligman G B. Modular Lie Algebras. Berlin: Springer-Verlag, 1967
[323] Sen S. On automorphisms of local fields. Ann. Math., (2) 1969, 90: 33–46
[324] Sen S. Lie algebras of Galois groups arising from Hodge-Tate modules. Ann. Math., (2) 1973, 97: 160–170
[325] Sen S. Continuous cohomology and p-adic Galois representations. Inv. Math., 1980/81, 62:1 89–116
[326] Sen S. The analytic variation of p-adic Hodge structure. Ann. Math., (2) 1988, 127:3 647–661
[327] Sen S. An infinite-dimensional Hodge-Tate theory. Bull. Soc. Math. France, 1993, 121:1 13–34
[328] Sen S. Galois cohomology and Galois representations. Inv. Math., 1993, 112:3 639–656
[329] Serre J.-P. Espaces fibrés algébriques. Sém. Chevalley, 1958, 2:Exp.1, Paris
[330] Serre J.-P. Abelian l-adic representations and elliptic curves. New York: Benjamin, 1968
[331] Serre J.-P. Local class field theory. in Cassels-Fröhlich[76]
[332] Serre J.-P. Proprietes galoisiennes des points d'ordere fini des coubes elliptiques. Inv. Math., 1972, 15: 259–331
[333] Serre J.-P. Local Fields. Berlin: Springer-Verlag, 1979
[334] Serre J.-P. Algebraic Groups and Class Fields. Berlin: Springer-Verlag, 1997
[335] Serre J.-P. Formes modulaires et fonctiones zeta p-adiques. Lect. Notes Math., 350, 191–268. Berlin: Springer-Verlag, 1973
[336] Serre J.-P, Tate J. Good reduction of abelian varieties. Ann. Math., (2) 1968, 88: 492–517
[337] Shi J Y (时俭益). Kazhdan-Lusztig cells in certain affine Weyl groups. Lect. Notes Math., 1179. Berlin: Springer-Verlag, 1986
[338] Shih K Y. Existence of certain canonical models. Duke Math. J., 1978, 45: 63–66
[339] Shimura G. Abelian varieties with complex multiplication and modular function. Princeton: Princeton University Press, 1961, 1997
[340] Shimura G. On analytic families of polarized abelain varieties and automorphic functions. Ann. Math., 1963, 78: 149–192
[341] Shimura G. Moduli and fibre systems of abelian varieties. Ann. Math., 1966, 83: 294–338
[342] Shimura G. An exact mass formula for orthogonal groups. Duke Math. J., 1999, 97: 1–66
[343] Shimura G. The number of representations of an integer by a quadratic form. Duke Math. J., 1999, 100: 59–92
[344] Shimura G. Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions. Princeton: Princeton Univ. Press, 1971
[345] Shimura G. On canonical models of arithmetic quotients of bounded symmetric domains. Ann. of Math., 1970, 91: 144–222; 1970, 92: 528–549

[346] Siegel C L. Discontinuous groups. Ann. Math., 1943, 44: 674–689
[347] Silverman J H. The Arithmetic of Elliptic Curves. New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag, 1986
[348] Silverman J H. Advanced Topics in the Arithmetic of Elliptic Curves. New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag, 1994
[349] Slodowy P. Simple singularities and simple algebraic Groups. Lect. Notes Math., 815. Berlin: Springer-Verlag, 1980
[350] Spaltenstein N. Classes Unipotentes et Sous-groupes de Borel. Lect. Notes Math., 946. Berlin: Springer-Verlag, 1982
[351] Springer T A. Some arithmetical results on semi-simple Lie algebras. Publ. Math. IHES, 1966, 30: 115–141
[352] Springer T A. Trigonometric sums, Green functions of finite groups and representations of Weyl groups. Inv. Math., 1976, 36: 173–207
[353] Springer T A. Invariant theory. Lect. Notes Math., 585. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1977
[354] Springer T A. Linear Algebraic Groups. Boston: Birkhäuser, 1981
[355] Springer T A, Steinberg R. Conjugacy classes. Lect. Notes Math., 131. Berlin: Springer-Verlag
[356] Srinivas V. Algebraic K-theory. Boston: Birkhäuser, 1996
[357] Srinivasan B. Representations of finite Chevalley Groups. Lect. Notes Math., 764. Berlin: Springer-Verlag, 1979
[358] Steinberg R. Variations on a theme of Chevalley. Pacific J. Math., 1959, 9: 875–891
[359] Steinberg R. Regular elements of semisimple algebraic groups. Publ. Math. IHES, 1965, 25: 49–80
[360] Steinberg R. Lectures on Chevalley groups. New Haven: Yale University, 1968, iii+277 pp
[361] Steinberg R. Endomorphisms of linear algebraic groups. Mem. Amer. Math. Soc., 80. Providence: Amer. Math. Soc., 1968
[362] Steinberg R. Conjugacy classes in algebraic groups. Lect. Notes Math., 366. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1974
[363] Steinberg R. On the desingularization of the unipotent variety. Inv. Math., 1976, 36: 209–224
[364] Sugiura M. Conjugate classes of Cartan subalgebras in real semi-simple Lie algebras. J. Math. Soc. Japan, 1959, 11: 374–434; 1971, 23: 314–383
[365] Swan R G. Induced representations and projective modules. Ann. Math., 1960, 71: 552–578
[366] Swan R G. K-theory of finite groups and orders. Lect. Notes Math., 149. Berlin: Springer-Verlag, 1970
[367] Tate J T. The higher dimensional cohomology groups of class field theory. Ann. Math., 1952, 56: 294–297
[368] Tate J T. WC-groups over p-adic fields. Sém. Bourbaki, 10e année: 1957/1958. Exposé 156
[369] Tate J T. Principal homogeneous spaces for Abelian varieties. J. reine angew. Math., 1962, 209: 98–99

[370] Tate J T. Algebraic cycles and poles of zeta functions. In: 1965 Arithmetical Algebraic Geometry (Proc. Conf. Purdue Univ., 1963), 93–110. New York: Harper & Row

[371] Tate J T. Endomorphisms of abelian varieties over finite fields. Inv. Math., 1966, 2: 134–144

[372] Tate J T. The cohomology groups of tori in finite Galois extensions of number fields Nagoya Math. J., 1966, 27: 709–719

[373] Tate J T. p-divisible groups. In: 1967 Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966), 158–183. Berlin: Springer-Verlag

[374] Tate J T. Classes d'isogene des varieties abeliennes. Sém. Bourbaki, 352 (Springer Lect. Notes Math., 179)

[375] Tate J T. Conjectures on algebraic cycles in l-adic cohomology. In: Motives (Seattle, WA, 1991), 71–83, Proc. Sympos. Pure Math., 55, Part 1. Providence: Amer. Math. Soc., 1994

[376] Tate J T. Galois cohomology. In: Arithmetic algebraic geometry (Park City, UT, 1999), 465–479, IAS/Park City Math. Ser., 9. Providence: Amer. Math. Soc., 2001

[377] Tate J T. Number theoretic background. Proc Symp Pure Math., 1979, 33:2 3–26

[378] Tate J T. Global class field theory. In: Cassels-Fröhlich[76]

[379] Tate J T. Algebraic cycles and poles of zeta functions. In: Arithmetical Algebraic Geometry (Proc. Conf. Purdue Univ., 1963), 93–110. New York: Harper & Row, 1965

[380] Tate J T, Oort F. Group schemes of prime order. Ann. Sci. école Norm. Sup., (4) 1970, 3: 1–21

[381] Tits J. Classification of algebraic semi-simple groups. Proc Sym Pure Math AMS, 1966, 9: 33–62

[382] Tits J. Buildings of spherical type and finite BN-pairs. Lect. Notes Math., 386. Berlin: Springer-Verlag, 1974

[383] Tits J. Reductive groups over local fields. Proc Sym Pure Math. AMS, 1979, 33: 29–69

[384] Tong Y L, Wang S P. Period integrals in noncompact quotients of $SU(p,1)$. Duke Math. J., 1985, 52:3 649–688

[385] Verdier J.-L. Des catégories dérivées des catégories abéliennes. Astérisque, No.239, 1996

[386] Voevodsky V. Cycles, transfers and motivic homology theories. Princeton: Princeton Univ. Press, 2000

[387] Voskresenskii V E. Algebraic groups and their birational invariants. Providence: Amer. Math. Soc., 1998

[388] Waldschmidt M. Diophantine approximation on linear algebraic groups. Berlin: Springer-Verlag, 2000

[389] Wan C H (万哲先). On the automorphisms of symplectic group over a field of characteristic 2. Sci. Sinica, 1963, 12: 289–315

[390] Wan C H (万哲先). Introduction to Kac-Moody algebra. Singapore: World Scientific, 1991

[391] Waterhouse W C. Introduction to Affine Group Schemes. Berlin: Springer-Verlag, 1979

[392] Weibel C A. An introduction to homological algebra. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994

[393] Weil A. Foundation of algebraic geometry. New York, 1946
[394] Weil A. Variétés abéliennes et courbes algébriques. Paris: Hermann, 1948
[395] Weil A. On Picard varieties. Amer. J. Math., 1952, 74: 865–893
[396] Weil A. On algebraic groups of transformations. Amer. J. Math., 1955, 77: 355–391
[397] Weil A. On algebraic groups and homogeneous spaces. Amer. J. Math., 1955, 77: 493–512
[398] Weil A. The field of definition of a variety. Amer. J. Math., 1956, 78: 509–524
[399] Weil A. Algebras with involutions and the classical groups. J. Indian Math. Soc. (N.S.), 1960, 24: 589–623
[400] Weil A. Basic Number Theory. Berlin: Springer-Verlag, 1974
[401] Weil A. Adeles and Algebraic Groups. Progress in Mathematics, Zurich: Birkhäuser, 1982
[402] Weyl H. Fundamental domains for lattice groups in division algebras I, II. In: Gesammelte Abhandlungen von Herman Weyl. Berlin: Springer-Verlag, 1968
[403] Wiles A. Modular elliptic curves and Fermat's Last theorem. Ann. Math., 1995, 141: 443–551
[404] Xi N H (席南华). Representations of affine Hecke algebras. Lect. Notes Math., 1587. Berlin: pringer-Verlag, 1994
[405] Xu F (徐飞). Representation masses of spinor genera. Duke Math. J., 2001, 110: 279–307
[406] Ye J (叶家琛). Filtrations of principal indecomposable modules of Frobenius kernels of reductive groups. Math. Z., 1985, 189: 515–527
[407] Zarhin J G. Isogenies of abelian varieties over fields of finite characteristics. Math. USSR Sb., 1974, 24: 451–461
[408] Zarhin J G. A remark on endomorphisms of abelian varieties over function fields. Math. USSR Izv., 1974, 8: 477–480
[409] Zariski O, and Semuel P. Commutative Algebra, vol. I & II. New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag, 1958
[410] Zimmer R J. Ergodic theory and semisimple groups. Boston: Birkhäuser, 1984
[411] Zink T. Cartiertheorie kommutativer formaler Gruppen. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1984
[412] Zink T. The display of a formal p-divisible group, Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques, I. Astérisque, 2002, 278: 127–248

附录A 同调代数简介

在本附录里我们介绍用范畴理论来处理同调代数的方法. 这个方法来自 Grothendieck 文章“Sur quelques points d'algebre homologique”, 然后在他的学生 Verdier 的博士论文“Des catégories dérivées des catégories abéliennes”发展成导出范畴 (derived category). 这个理论被 Grothendick 用在平展上同调中, 以后的重要发展则是 Belinson, Bernstein 和 Deligne 的工作. 我们这里使用通常的范畴记号, 例如 $\mathfrak{C}$ 是范畴, $\mathfrak{C}$ 的对象族与态射集分别记为 $\mathrm{Obj}\,\mathfrak{C}$ 与 $\mathrm{Mor}\,\mathfrak{C}$. 一些初等的范畴论内容可参见 [11].

A.1 剖分范畴

A.1.1 三角形

一个范畴 $\mathfrak{C}$ 称为**加性范畴** (additive category), 如果 $\mathfrak{C}$ 满足以下条件:

(1) 对于任意的 $X, Y \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y)$ 有交换群结构 (其运算记为 $+$), 并且态射合成具有以下性质:

$$(g_1 + g_2)f = g_1 f + g_2 f,$$

$$g(f_1 + f_2) = gf_1 + gf_2.$$

(2) $\mathfrak{C}$ 内存在零对象 0, 即 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(0, 0)$ 是零群.

(3) 对于任意的 $X_1, X_2 \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{C}$, 存在 $Y \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{C}$ 及态射

$$X_1 \underset{i_1}{\overset{p_1}{\leftrightarrows}} Y \underset{i_2}{\overset{p_2}{\rightleftarrows}} X_2$$

使得

$$p_1 i_1 = \mathrm{id}_{X_1}, \quad p_2 i_2 = \mathrm{id}_{X_2}, \quad p_2 i_1 = p_1 i_2 = 0, \quad i_1 p_1 + i_2 p_2 = \mathrm{id}_Y,$$

即 Y 同时为 X_1 与 X_2 的积和余积.

我们说两个加性范畴 $\mathfrak{C}$ 和 $\mathfrak{C}'$ 之间的函子 $F: \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ 是**加性函子** (additive functor), 如果对于任意的 $X, Y \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{C}$, $F: \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}'}(FX, FY)$ 是群同态, 即有 $F(f + g) = Ff + Fg$ $(\forall f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y))$.

加性范畴 $\mathfrak{C}$ 的加性自同构 $T: \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ 称为**平移函子** (translation functor). 以 $X[n]$ 记 $T^n(X)$, $f[n]$ 记 $T^n(f)$. 我们称形如以下的 $\mathfrak{C}$ 内的态射序列:

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

为 $\mathfrak{C}$ 的一个**三角形** (triangle). 而两个三角形之间的态射是指交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow f[1] \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & X'[1] \end{array}$$

A.1.2 剖分范畴

剖分范畴 (triangulated category) 是指一个三元组 $(\mathfrak{C}, T, \Delta)$, 其中 $\mathfrak{C}$ 是加性范畴, $T: \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ 是平移函子, Δ 是 $\mathfrak{C}$ 内的一组三角形 (称为**特异三角形** (distinguished triangle)), 具有以下性质 **TR1** − **TR4**:

TR1 a) $X \xrightarrow{\mathrm{id}} X \to 0 \to X[1]$ 是特异三角形 ($\forall X \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{C}$).

b) 如果 $X \to Y \to Z \to X[1]$ 与 $X' \to Y' \to Z' \to X'[1]$ 同构, 且 $X \to Y \to Z \to X[1]$ 是特异三角形, 则 $X' \to Y' \to Z' \to X'[1]$ 也是特异三角形.

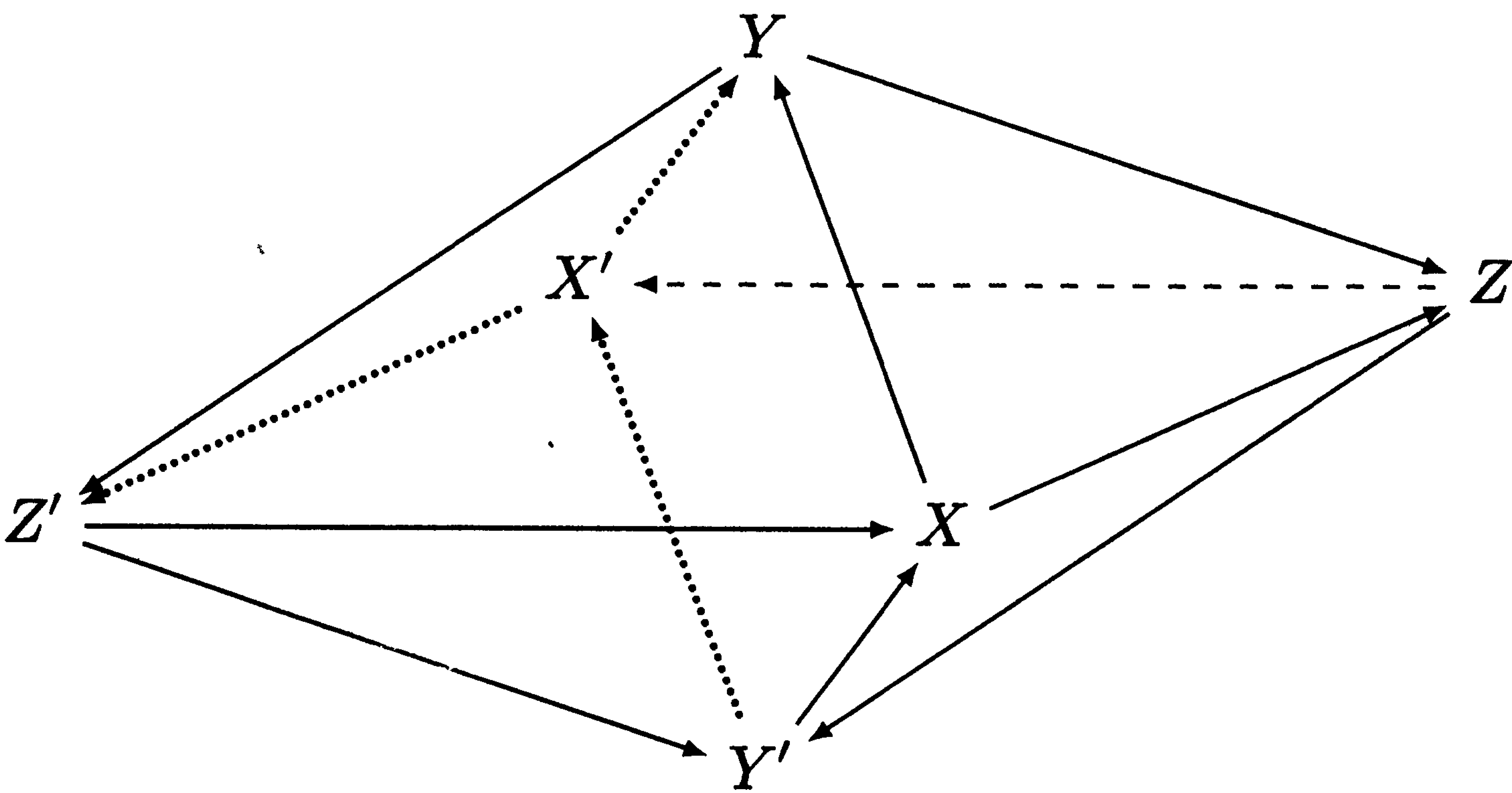
c) $\mathfrak{C}$ 内的任一态射 $X \xrightarrow{u} Y$ 均可扩充为特异三角形 $X \xrightarrow{u} Y \to Z \to X[1]$.

TR2 三角形 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ 为特异三角形当且仅当 $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1]$ 为特异三角形.

TR3 若有特异三角形 $X \xrightarrow{u} Y \to Z \to X[1]$ 和 $X' \xrightarrow{u'} Y' \to Z' \to X'[1]$, 又有态射 $X \xrightarrow{f} X'$, $Y \xrightarrow{g} Y'$ 满足 $u'f = gu$, 则存在态射 $Z \xrightarrow{h} Z'$, 使得下图为三角形态射:

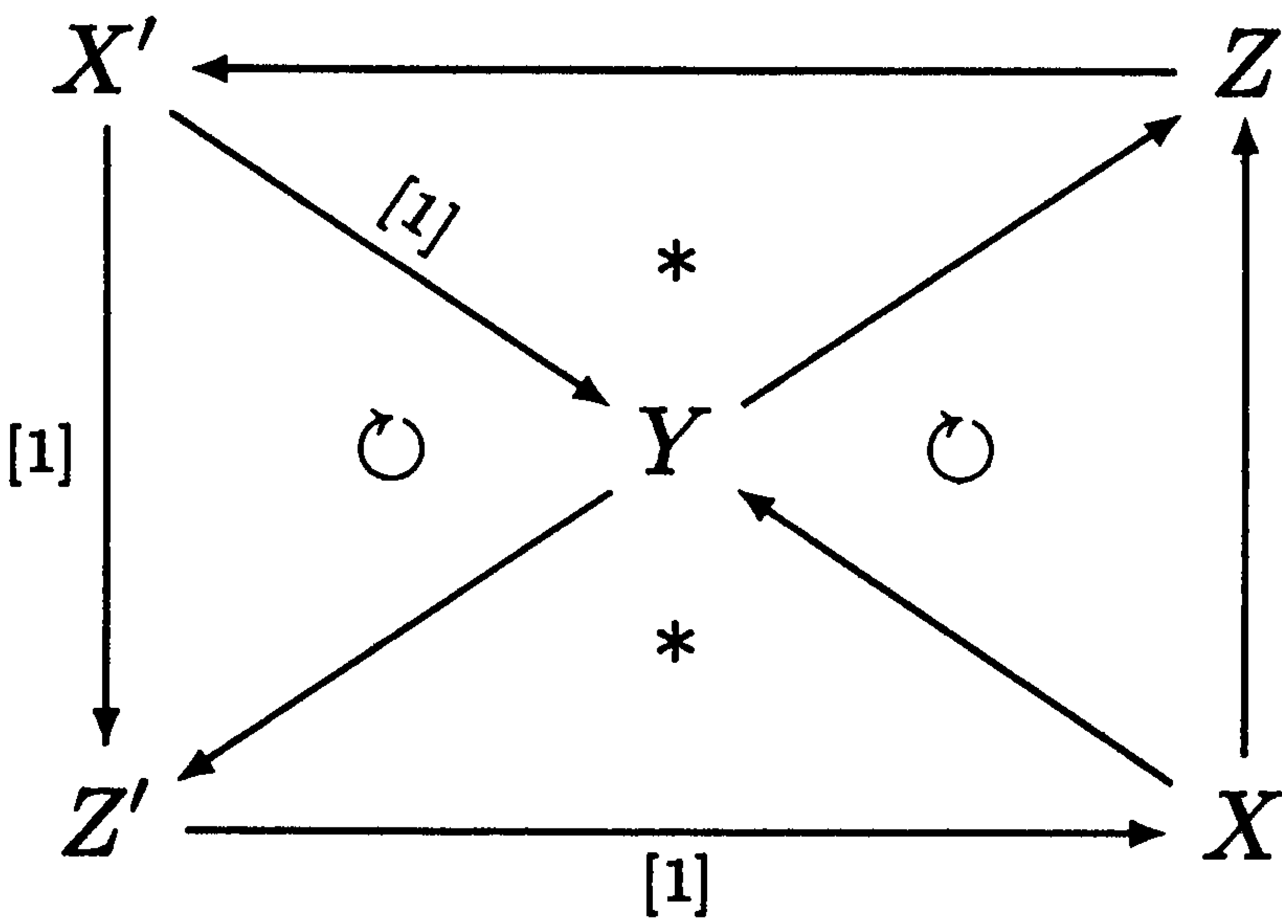
$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X[1] \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow f[1] \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & X'[1] \end{array}$$

为叙述 **TR3**, 我们引入八面体图. 设有图如下:

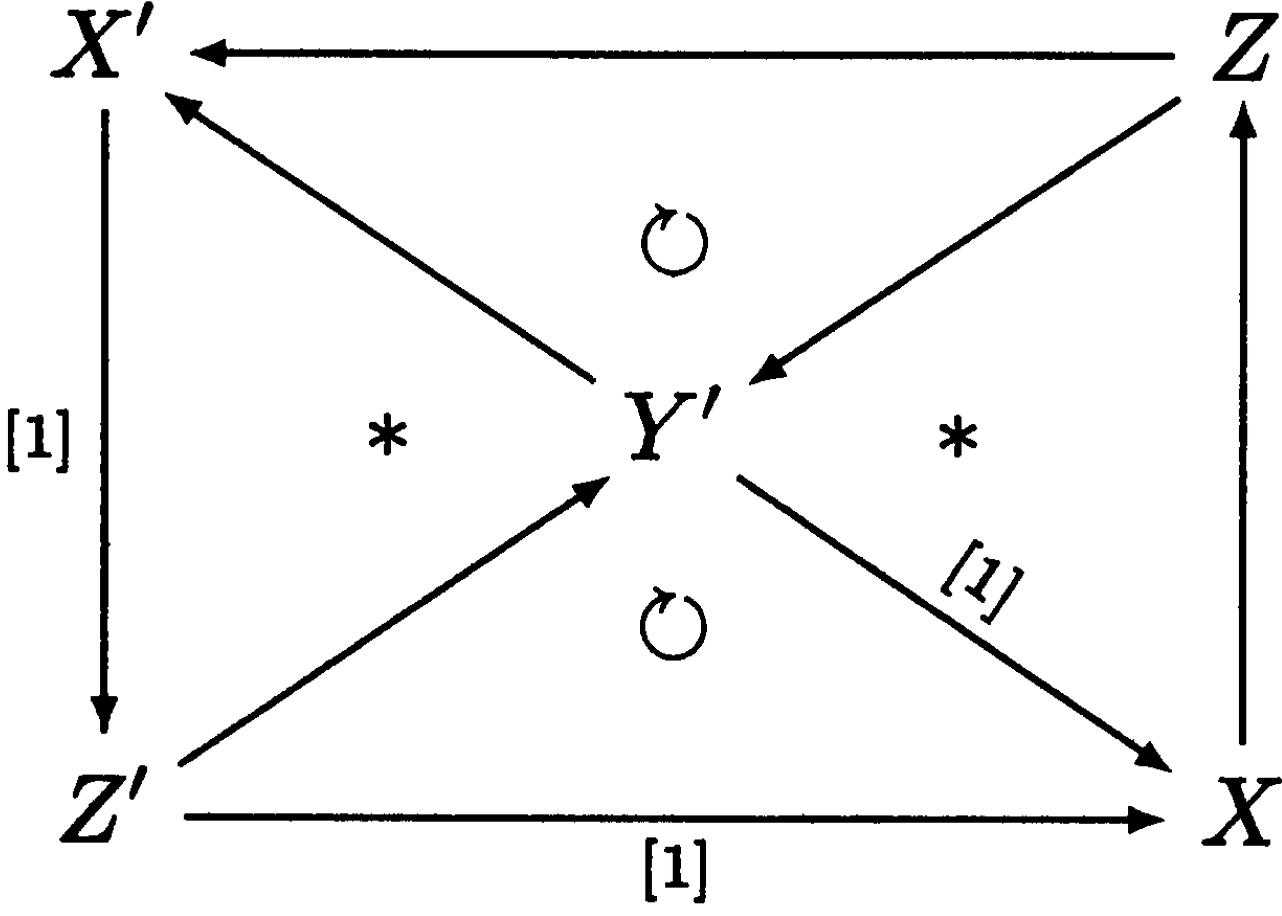


其上盖和下底如下面二图所示：

上盖：



下底：



图中 $X' \xrightarrow{[1]} Z'$ 是指 $X' \to Z'[1]$, 有 $*$ 号的三角形是特异三角形, 有 ↻ 的三角形是交换图. 又要求

$$Y \longrightarrow Z \longrightarrow Y' \quad \text{等于} \quad Y \longrightarrow Z' \longrightarrow Y'$$

及

$$Y' \longrightarrow X[1] \longrightarrow Y[1] \quad \text{等于} \quad Y' \longrightarrow X' \longrightarrow Y[1]$$

(即两对侧棱相等). 称这样的图为**八面体图** (octahedron diagram). 剖分范畴的最后一个条件是:

TR4 任意一个上盖可以扩张为一个八面体图.

A.1.3　截断函子

称范畴 $\mathfrak{C}$ 的子范畴 $\mathfrak{S}$ 为**全子范畴** (full subcategory), 如果对于任意的 $X, Y \in \operatorname{Obj}\mathfrak{S}$, 有 $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{S}}(X,Y) = \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,Y)$. 称 $\mathfrak{S}$ 为 $\mathfrak{C}$ 的**真子范畴** (proper subcategory), 如果 $\operatorname{Obj}\mathfrak{S} \subsetneqq \operatorname{Obj}\mathfrak{C}$.

设 $\mathfrak{C}$ 为剖分范畴. $\mathfrak{C}$ 的 t 结构是指满足以下条件的一对全真子范畴 $\{\mathfrak{C}^{\leqslant 0}, \mathfrak{C}^{\geqslant 0}\}$ (记 $\mathfrak{C}^{\leqslant 0}[-n]$ 为 $\mathfrak{C}^{\leqslant n}$, $\mathfrak{C}^{\geqslant 0}[-n]$ 为 $\mathfrak{C}^{\geqslant n}$):

(1) $\mathfrak{C}^{\leqslant 0} \subset \mathfrak{C}^{\leqslant 1}$, $\mathfrak{C}^{\geqslant 0} \subset \mathfrak{C}^{\geqslant 1}$.

(2) 若 $X \in \operatorname{Obj}\mathfrak{C}^{\leqslant 0}$, $Y \in \operatorname{Obj}\mathfrak{C}^{\geqslant 1}$, 则 $\operatorname{Hom}(X,Y) = \{0\}$.

(3) 若 $X \in \operatorname{Obj}\mathfrak{C}$, 则存在特异三角形 $A \to X \to B \to A[1]$, 其中 $A \in \operatorname{Obj}\mathfrak{C}^{\leqslant 0}$, $B \in \operatorname{Obj}\mathfrak{C}^{\geqslant 1}$.

此时我们亦称 $\mathfrak{C}$ 为 t **范畴** (t-category).

引理 A.1.1　*嵌入函子 $\mathfrak{C}^{\leqslant n} \to \mathfrak{C}$ 有右伴随函子 $\tau_{\leqslant n} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}^{\leqslant n}$, 同时嵌入函子 $\mathfrak{C}^{\geqslant n} \to \mathfrak{C}$ 有左伴随函子 $\tau_{\geqslant n} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}^{\geqslant n}$.*

称 $\tau_{\leqslant n}$, $\tau_{\geqslant n}$ 为**截断函子** (truncation functor).

证明　设有 $\mathfrak{C}$ 内的态射 $X \xrightarrow{f} Y$. 按剖分范畴的定义性质 (1) c), 取 X 的特异三角形 $A \to X \to B \to A[1]$. 取 Y 的特异三角形 $A' \to Y \to B' \to A'[1]$. 则有正合序列

$$\operatorname{Hom}(A, B'[-1]) \longrightarrow \operatorname{Hom}(A, A') \longrightarrow \operatorname{Hom}(A, Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}(A, B')$$

由 t 范畴的定义性质 (2) 知此序列左右两端的群均为零. 于是 $A \to X \xrightarrow{f} Y$ 决定唯一的态射 $A \to A'$ 使得下图交换:

$$\begin{array}{ccccccc}
A & \longrightarrow & X & \longrightarrow & B & \longrightarrow & A[1] \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} & & & & \\
A' & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & A'[1]
\end{array}$$

定义 $\tau_{\leqslant 0}X = A$, $\tau_{\geqslant 1}X = B$, $\tau_{\leqslant 0}(f)$ 为以上被唯一决定的态射 $A \to A'$. 由于

$$\operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}^{\leqslant 0}}(A, \tau_{\leqslant 0}Y) \cong \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, Y),$$

故 $\tau_{\leqslant 0}$ 为 $\mathfrak{C}^{\leqslant 0} \to \mathfrak{C}$ 的右伴随函子. 其余证明类似. □

A.1.4　上同调函子

称范畴 $\mathfrak{C}$ 的一个态射 l 为**单射** (monomorphism), 如果对于 $\mathfrak{C}$ 的任意两个态射 f 和 g, $lf = lg$ 蕴含 $f = g$. 称范畴 $\mathfrak{C}$ 的一个态射 r 为**满射** (epimorphism), 如果对于 $\mathfrak{C}$ 的任意两个态射 f 和 g, $fr = gr$ 蕴含 $f = g$.

称范畴 $\mathfrak{C}$ 的一个对象 0 为**零对象** (zero object), 如果对于 $\mathfrak{C}$ 的任意对象 X, 存在唯一的态射 $X \to 0$ 和唯一的态射 $0 \to X$. 对于任意的 $X, Y \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{C}$, 以 0_{XY} 记 $X \to 0 \to Y$.

设 $f: X \to Y$ 为 $\mathfrak{C}$ 内的态射. f 的**核** (kernel) 是指满足以下条件的态射 $K \xrightarrow{k} X$: (1) $fk = 0_{XY}k$, (2) 若有态射 $Z \xrightarrow{z} X$ 使得 $fz = 0_{XY}z$, 则存在唯一的态射 $Z \xrightarrow{w} K$ 使得 $z = kw$, 如图:

$$\begin{array}{ccccc} Z & & & & \\ {\scriptstyle w}\downarrow & \searrow^{z} & & & \\ K & \xrightarrow[k]{} & X & \overset{f}{\underset{0}{\rightrightarrows}} & Y \end{array}$$

我们以 $\mathrm{Ker}\,f$ 或 K 记 k. 读者可根据上下文理解.

态射 $f: X \to Y$ 的**余核** (cokernel) 是指满足以下条件的态射 $Y \xrightarrow{c} C$: (1) $cf = c\,0_{XY}$, (2) 若有态射 $Y \xrightarrow{v} V$ 使得 $vf = v0_{XY}$, 则存在唯一的态射 $C \xrightarrow{w} V$ 使得 $v = wc$, 如图:

$$\begin{array}{ccccc} X & \overset{f}{\underset{0}{\rightrightarrows}} & Y & \xrightarrow{z} & C \\ & & & \searrow_{v} & \downarrow{\scriptstyle w} \\ & & & & V \end{array}$$

我们以 $\mathrm{Coker}\,f$ 或 C 记 c.

我们称加性范畴 $\mathfrak{C}$ 为 **Abel 范畴** (abelian category), 如果 (1) $\mathfrak{C}$ 的任一态射均有核和余核, (2) $\mathfrak{C}$ 的任一单射必为 $\mathfrak{C}$ 某一态射的核, 且 $\mathfrak{C}$ 的任一满射必为 $\mathfrak{C}$ 某一态射的余核.

在 Abel 范畴 $\mathfrak{C}$ 内称态射序列 $X \to Y \to Z$ 为**正合序列** (exact sequence), 如果 (1) $gf = 0$, (2) (按核的定义) 由 (1) 所决定的分解 $f = (\mathrm{Ker}\,g)f'$ 中的 f' 为满射, 如图:

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & \searrow^{f} & & & \\ \bullet & \xrightarrow{\mathrm{Ker}\,g} & Y & \overset{g}{\underset{0}{\rightrightarrows}} & Z \end{array}$$

称序列

$$\cdots \longrightarrow A_{n-1} \xrightarrow{a_{n-1}} A_n \xrightarrow{a_n} A_{n+1} \xrightarrow{a_{n+1}} A_{n+2} \longrightarrow \cdots$$

为**正合的** (exact), 如果对于所有的 n, 序列 $A_{n-1} \xrightarrow{a_{n-1}} A_n \xrightarrow{a_n} A_{n+1}$ 都正合.

对于态射 $X \xrightarrow{f} Y$, 定义 $\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Coker}\, f) : Y' \to Y$. 则不难证明 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 为正合序列当且仅当 $\mathrm{Im} f$ 是一个 $\mathrm{Ker}\, g$.

设 $\mathfrak{C}$ 为剖分范畴, $\mathfrak{A}$ 为 Abel 范畴. 称加性函子 $H : \mathfrak{C} \to \mathfrak{A}$ 为**上同调函子** (cohomological functor), 如果对于 $\mathfrak{C}$ 的任一特异三角形 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$,

$$H(X) \xrightarrow{H(u)} H(Y) \xrightarrow{H(v)} H(Z)$$

为 $\mathfrak{A}$ 内的正合序列.

定理 A.1.2　设 $\mathfrak{C}$ 为 t 范畴. 则

(1)　$\mathfrak{C}^{\geqslant 0} \cap \mathfrak{C}^{\leqslant 0}$ 为 Abel 范畴.

(2)　$\tau_{\geqslant 0}\tau_{\leqslant 0} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}^{\geqslant 0} \cap \mathfrak{C}^{\leqslant 0}$ 为上同调函子.

注　我们以 $H^0(X)$ 记 $\tau_{\geqslant 0}\tau_{\leqslant 0}(X)$, 以 $H^i(X)$ 记 $H^0(X[i])$. 以上定理说明 t 结构是同调代数的先有结构, 即是说有了 t 范畴就可以开始讨论同调代数了.

A.2　分式范畴

A.2.1　范畴的局部化

设 $S \subset \mathrm{Mor}\mathfrak{C}$ 为范畴 $\mathfrak{C}$ 内的一组态射. 则存在范畴 $\mathfrak{C}[S^{-1}]$ 以及 (关于 S 的**局部化**) 函子 $Q : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}[S^{-1}]$, 使得

(1)　所有的 $Q(s)$ $(s \in S)$ 均为同构,

(2)　若有函子 $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ 使得所有的 $F(s)$ $(s \in S)$ 均为同构, 则有唯一的函子 $G : C[S^{-1}] \to \mathfrak{D}$ 使得 $F = G \circ Q$.

我们可以 "形式地" 对于每一个 $s \in S$ 引入一个新的符号 s^{-1}, 然后定义适当的等价关系用以构造 $\mathfrak{C}[S^{-1}]$. 详情从略.

但是在这样形式地得出来的 $\mathfrak{C}[S^{-1}]$ 中很难作计算. 为了克服这个困难, 我们像构造分式环时一样引进乘性系.

定义 A.2.1　设 $\mathfrak{C}$ 为范畴, $S \subset \mathrm{Mor}\mathfrak{C}$. 若 S 满足以下条件, 则称 S 为 $\mathfrak{C}$ 的一个**乘性系** (multiplicative system) 或**局部化系** (localizing system).

(1)　$\mathrm{id}_X \in S$ $(\forall X \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{C})$. 若 $s, t \in S$ 且 $s \circ t \in \mathrm{Mor}\mathfrak{C}$, 则 $s \circ t \in S$.

(2)　$\mathfrak{C}$ 内的态射图:

$$\begin{array}{ccc} & & Z \\ & & \downarrow s \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

(其中 $s \in S$) 必可扩张为内态射交换图:

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & Z \\ t\downarrow & & \downarrow s \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

其中 $t \in S$. 同样 $\mathfrak{C}$ 内的态射图:

$$\begin{array}{ccc} & & Z \\ & & \uparrow u \\ X & \xleftarrow[g]{} & Y \end{array}$$

(其中 $u \in S$) 必可扩张为内态射交换图:

$$\begin{array}{ccc} W & \longleftarrow & Z \\ v\uparrow & & \uparrow u \\ X & \xleftarrow[g]{} & Y \end{array}$$

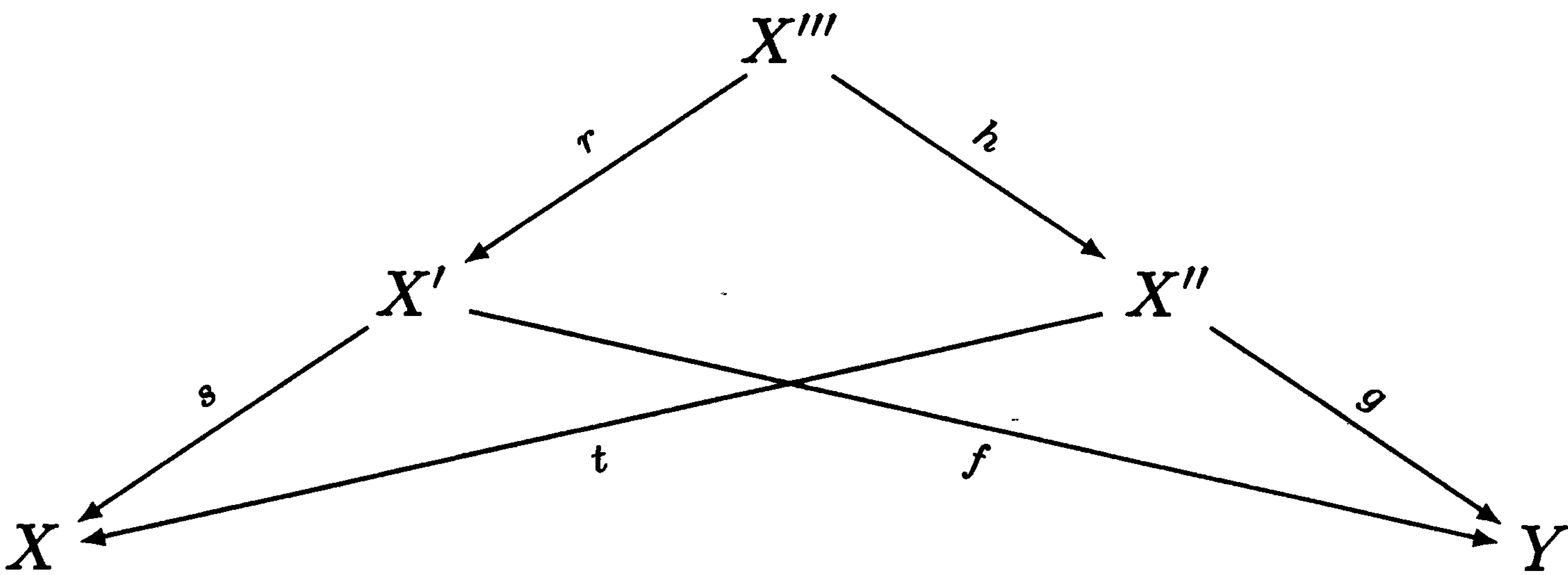
其中 $v \in S$.

(3) 设 $f, g: X \to Y$ 为 $\mathfrak{C}$ 内的态射. 则存在 $s \in S$ 使得 $sf = sg$ 当且仅当存在 $t \in S$ 使得 $ft = gt$.

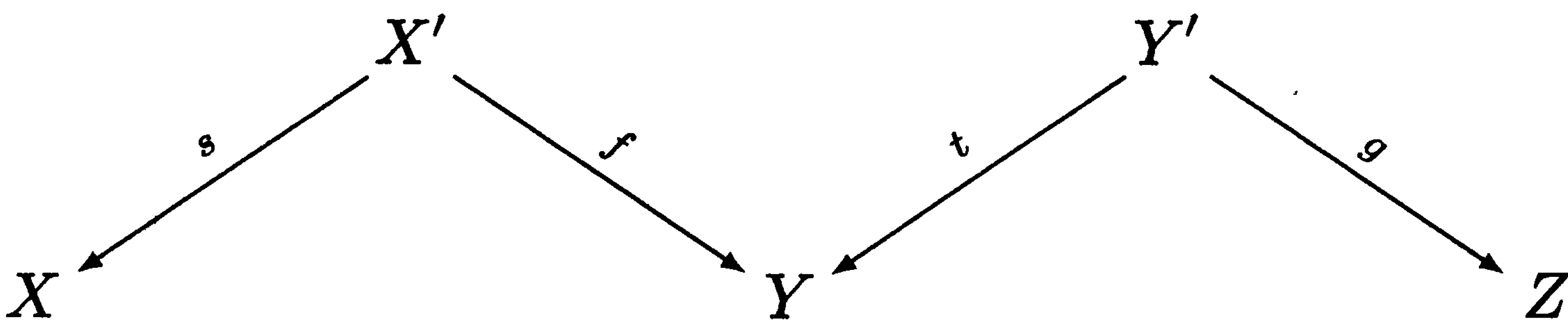
现在假定 S 为 $\mathfrak{C}$ 的乘性系. 固定 $X, Y \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{C}$. 以 (s, f) 记以下态射图:

$$\begin{array}{ccccc} & & X' & & \\ & \swarrow^{s} & & \searrow^{f} & \\ X & & & & Y \end{array}$$

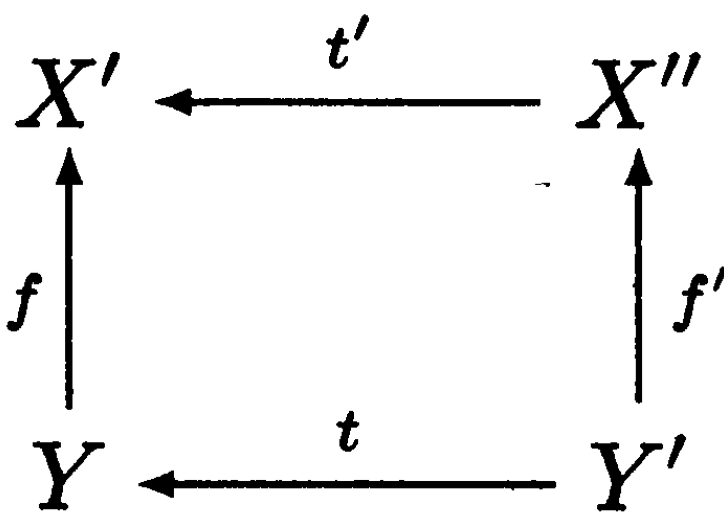
其中 $s \in S$, $f \in \mathrm{Mor}\mathfrak{C}$. 我们引入 "$\sim$" 关系如下: $(s, f) \sim (t, g)$ 当且仅当存在 (r, h) 使得下图交换:



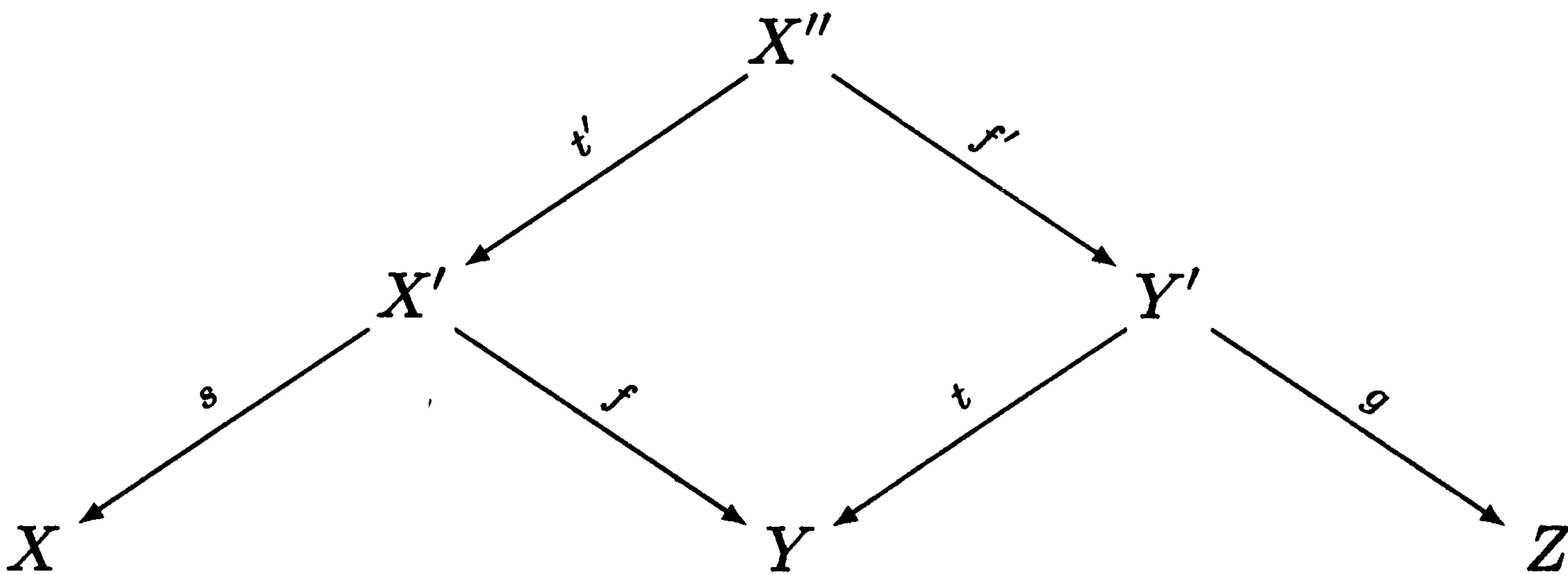
可以证明 $\sim$ 是等价关系. 我们以 $\langle s, f\rangle$ 或 $\langle X \stackrel{s}{\leftarrow} X' \stackrel{f}{\rightarrow} Y\rangle$ 记 (s, f) 的等价类. 设有态射:



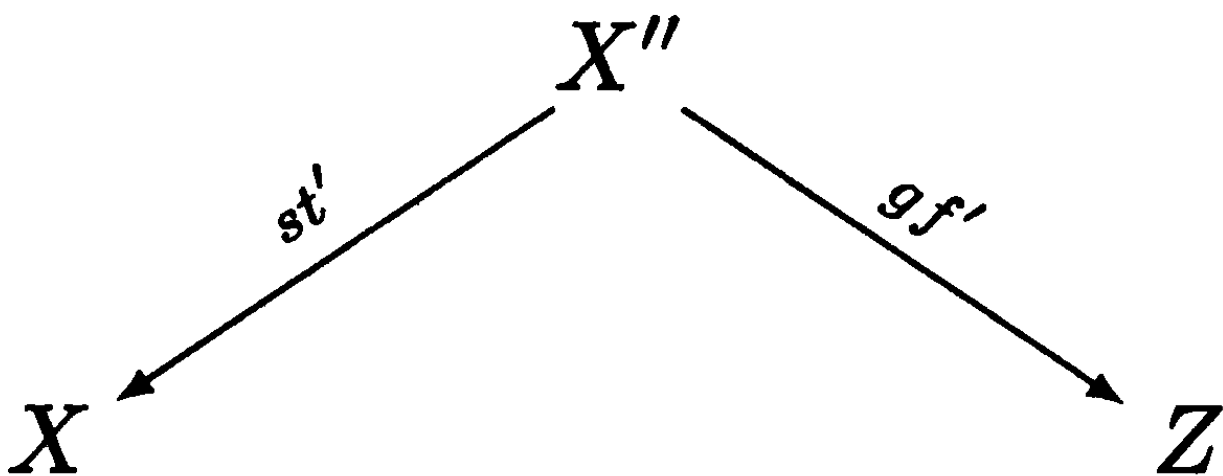
其中 $s, t \in S$. 按 S 的性质 (2), 有交换图:



即有



于是有



我们定义等价类的合成为

$$\langle t,g\rangle\circ\langle s,f\rangle=\langle st',gf'\rangle.$$

可以证明此定义与等价类的代表选取无关.

命题 A.2.1　设 S 为 $\mathfrak{C}$ 的乘性系. 则可取范畴 $\mathfrak{C}[S^{-1}]$ 的对象为 $\operatorname{Obj}\mathfrak{C}[S^{-1}]=\operatorname{Obj}\mathfrak{C}$. 对于 $X,Y\in\operatorname{Obj}\mathfrak{C}[S^{-1}]$, 取 $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}[S^{-1}]}(X,Y)$ 为所有等价类 $\langle X\xleftarrow{s}X'\xrightarrow{f}Y\rangle$ 组成的类. $\mathfrak{C}[S^{-1}]$ 中态射的合成如上定义. 局部化函子 $Q:\mathfrak{C}\to\mathfrak{C}[S^{-1}]$ 在态射上的作用为

$$Q(X\xrightarrow{f}Y)=\langle X\xleftarrow{\mathrm{id}}X\xrightarrow{f}Y\rangle.$$

A.2.2　剖分范畴的局部化

设 $(\mathfrak{C},T,\Delta)$ 是剖分范畴. 又设 S 为 $\mathfrak{C}$ 的乘性系. 如果 S 满足以下两个条件, 则说 S 与剖分**相容** (compatible).

(1)　$s\in S$ 当且仅当 $T(s)\in S$.

(2)　若 $X\xrightarrow{u}Y\to Z\to X[1]$ 和 $X'\xrightarrow{u'}Y'\to Z'\to X'[1]$ 为 Δ 内二元素 (特异三角形), 如果有 S 的元素 (态射) $X\xrightarrow{f}X'$ 和 $Y\xrightarrow{g}Y'$ 满足 $u'f=gu$, 则在 S 内存在 $Z\xrightarrow{h}Z'$ 使得下图交换:

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{u} & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X[1]\\
\downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \vdots{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle f[1]}\\
X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & X'[1]
\end{array}$$

这时, 对于 $X\in\operatorname{Obj}\mathfrak{C}[S^{-1}]=\operatorname{Obj}\mathfrak{C}$, $T(X)$ 已有定义. 对于 $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}[S^{-1}]}(X,Y)$ 的元素 $\langle X\xleftarrow{s}X'\xrightarrow{f}Y\rangle$ 可以定义 $T(\langle X\xleftarrow{s}X'\xrightarrow{f}Y\rangle)=\langle T(X)\xleftarrow{T(s)}T(X')\xrightarrow{T(f)}T(Y)\rangle$. 于是可以定义 $\mathfrak{C}[S^{-1}]$ 内的三角形. $Q:\mathfrak{C}\to\mathfrak{C}[S^{-1}]$ 为局部化函子. 以 $Q\Delta$ 记 Δ 在 Q 下的像. 我们定义 Δ_S 为 $\mathfrak{C}[S^{-1}]$ 内与 $Q\Delta$ 的任一元素同构的三角形所组成的类.

作为例子我们考虑 $\mathfrak{C}[S^{-1}]$ 的剖分范畴的性质 (1) c). 设 $\langle X\xleftarrow{s}X'\xrightarrow{f}Y\rangle$ 为 $\mathfrak{C}[S^{-1}]$ 内的态射. 根据剖分范畴的性质, 可以 f 把扩张为 $\mathfrak{C}$ 内的三角形:

$$X'\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{v}Z\xrightarrow{w}X'[1]$$

在 $\mathfrak{C}[S^{-1}]$ 内三角形态射:

$$\begin{array}{ccccccc}
X' & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1]\\
\downarrow{\scriptstyle s} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle s[1]}\\
X & \xrightarrow{\langle s,f\rangle} & Y' & \xrightarrow{Q(v)} & Z' & \xrightarrow{Q(w)} & X'[1]
\end{array}$$

为同构 (因为 s 在 $\mathfrak{C}[S^{-1}]$ 中可逆), 所以

$$X \xrightarrow{\langle s,f\rangle} Y' \xrightarrow{Q(v)} Z' \xrightarrow{Q(w)} X'[1]$$

为的 Δ_S 元素. 这就是说 $\mathfrak{C}[S^{-1}]$ 的任一态射可以扩张为 Δ_S 的元素.

命题 A.2.2 设剖分范畴 $(\mathfrak{C}, T, \Delta)$ 内有与剖分相容的乘性系 S, 则 $(\mathfrak{C}[S^{-1}], T, \Delta_S)$ 为剖分范畴.

A.3 复形范畴

A.3.1 复形

设 $\mathfrak{A}$ 为 Abel 范畴. $\mathfrak{A}$ 的一个 (上链) **复形** (complex) 是指 $\mathfrak{A}$ 的一组对象 $X^\bullet = (X^n)_{n\in\mathbb{Z}}$, 并且配备有态射 $\mathrm{d}_X^n : X^n \to X^{n+1}$ 使得 $\mathrm{d}_X^{n+1}\mathrm{d}_X^n = 0$ $(\forall\, n \in \mathbb{Z})$. 一个**复形态射** (complex morphism) $f: X^\bullet \to Y^\bullet$ 是 $\mathfrak{A}$ 内的一组态射 $f^n: X^n \to Y^n$, 满足条件 $f^{n+1}\mathrm{d}_X^n = \mathrm{d}_X^n f^n$. 我们称 n 为 X_n 或 d_n 的**次数** (degree).

我们定义复形范畴 $C(\mathfrak{A})$ 的对象为 $\mathfrak{A}$ 的复形, $C(\mathfrak{A})$ 的态射为 $\mathfrak{A}$ 的复形态射. 我们说复形 $X^\bullet$ **有下界** (bounded below), 如果存在负整数 n_0 使得 $X^n = 0$ $(\forall\, n \leqslant n_0)$. 以有下界的复形为对象的 $C(\mathfrak{A})$ 的全子范畴记为 $C^+(\mathfrak{A})$. 同样可以定义有上界的复形. 如果一个复形既有上界又有下界我们便称它为有界的. 以有上界的复形为对象的全子范畴记为 $C^-(\mathfrak{A})$. 以有界复形为对象的全子范畴记为 $C^b(\mathfrak{A})$.

A.3.2 同伦

设有 Abel 范畴 $\mathfrak{A}$ 的复形 $X^\bullet$, $Y^\bullet$ 以及 $\mathfrak{A}$ 的一组态射 $k = (k^n)$, 其中 $k^n: X^n \to Y^{n-1}$. 定义 $h^n \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(X^n, Y^n)$ 为

$$h^n = k^{n+1}\mathrm{d}_X^n + \mathrm{d}_Y^{n-1}k^n : \ X^n \longrightarrow Y^n.$$

则

$$(h^n) = h = k\mathrm{d} + \mathrm{d}k : \ X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$$

为复形态射. 我们称这样得到的 h 为同伦于零的, 记为 $h \sim 0$.

若 $h_1 \sim 0$, $h_2 \sim 0$, 则 $h_1 + h_2 \sim 0$. 若 $f \in \mathrm{Mor}C(\mathfrak{A})$, $h \sim 0$, $fh \in \mathrm{Mor}C(\mathfrak{A})$, 则 $fh \sim 0$. 同样, 若 $hf \in \mathrm{Mor}C(\mathfrak{A})$, 则 $hf \sim 0$. 这就是说同伦于零的复形态射的全体构成 $\mathrm{Mor}C(\mathfrak{A})$ 的 “理想” .

我们称 $f, g \in \mathrm{Mor}C(\mathfrak{A})$ 为同伦的, 如果 $f - g \sim 0$.

A.3.3 锥和柱

设 $\mathfrak{A}$ 为 Abel 范畴, $C(\mathfrak{A})$ 为 $\mathfrak{A}$ 的复形范畴. 定义**平移函子** (translation functor) $T: C(\mathfrak{A}) \to C(\mathfrak{A})$ 如下：设 $X^\bullet = (X^i, D_X^i)$ 为复形, 则令 $(TX)^i = X^{i+1}$, $\mathrm{d}_{TX}^i = -\mathrm{d}_X^i$. 设有态射 $f = (f^i): X^\bullet \to Y^\bullet$, 则令 $(Tf)^i = f^{i+1}$. 像前面一样, 令 $X[n]^i = X^{n+i}$, $\mathrm{d}_{X[n]} = (-1)^n \mathrm{d}_X$.

设 $f: X^\bullet \to Y^\bullet$ 为复形态射. f 的一个**锥** (cone) 是指如下定义的复形 $C(f)$:

$$C(f)^i := X[1]^i \oplus Y^i,$$

$$\mathrm{d}_{C(f)}^i(x^{i+1}, y^i) := (-\mathrm{d}_X x^{i+1}, f(x^{i+1}) + \mathrm{d}_Y y^i).$$

复形态射 f 的**柱** (cylinder) 是指如下定义的复形 $\mathrm{Cyl}(f)$:

$$\mathrm{Cyl}(f)^i := X^i \oplus X[1]^i \oplus Y^i,$$

$$\mathrm{d}_{\mathrm{Cyl}(f)}^i(x^i, x^{i+1}, y^i) := (\mathrm{d}_X x^i - x^{i+1}, -\mathrm{d}_X x^{i+1}, f(x^{i+1}) + \mathrm{d}_Y y^i).$$

引理 A.3.1 设 $f: X^\bullet \to Y^\bullet$ 为复形态射. 则有 $C(\mathfrak{A})$ 内的行正合交换图

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & 0 & \longrightarrow & Y^\bullet & \xrightarrow{\pi} & C(f) & \xrightarrow{\delta} & X[1]^\bullet & \longrightarrow & 0\\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \| & & & & \\
0 & \longrightarrow & X^\bullet & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathrm{Cyl}(f) & \xrightarrow{\pi} & C(f) & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & & & & & \\
 & & X^\bullet & \xrightarrow{f} & Y^\bullet & & & & & &
\end{array}$$

并且 $\beta\alpha = \mathrm{id}_{Y^\bullet}$, $\alpha\beta \sim \mathrm{id}_{\mathrm{Cyl}(f)}$.

证明 我们具体写出图中上面两行的态射, 则容易验证图的行正合及交换性. 第一行:

$$\begin{array}{ccc}
y^i & \xrightarrow{\pi} & (0, y^i)\\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{d}_Y} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{d}_{C(f)}}\\
\mathrm{d}_Y y^i & \xrightarrow{\pi} & (0, \mathrm{d}_Y y^i)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
(x^{i+1}, y^i) & \xrightarrow{\delta} & x^{i+1}\\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{d}_{C(f)}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{d}_{X[1]}}\\
(-\mathrm{d}_X x^{i+1}, f(x^{i+1}) + \mathrm{d}_Y y^i) & \xrightarrow{\delta} & -\mathrm{d}_X x^{i+1}
\end{array}$$

第二行:

$$\begin{array}{ccc}
x^i & \longrightarrow & (x^i, 0, 0)\\
\downarrow & & \downarrow\\
\mathrm{d}_X x^i & \longrightarrow & (\mathrm{d}_X x^i, 0, 0)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (x^i, x^{i+1}, y^i) & \xrightarrow{\quad\pi\quad} & (x^{i+1}, y^i) \\ \Big\downarrow {\scriptstyle \mathrm{d}_{C(f)}} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \mathrm{d}_{X[1]}} \\ (\mathrm{d}_X x^i - x^{i-1}, -\mathrm{d}_X x^{i+1}, f(x^{i+1}) + \mathrm{d}_Y y^i) & \xrightarrow{\pi} & (-\mathrm{d}_X x^{i+1}, f(x^{i+1}) + \mathrm{d}_Y y^i) \end{array}$$

设 h^i : $\mathrm{Cyl}(f)^i \to \mathrm{Cyl}(f)^{i-1}$ 为 $h(x^i, x^{i+1}, y^i) = (0, x^i, 0)$, 则 $\mathrm{d}h + h\mathrm{d} = \mathrm{id}_{\mathrm{Cyl}(f)} - \alpha\beta$. □

我们称以上引理所给出的

$$X^\bullet \xrightarrow{\overline{f}} \mathrm{Cyl}(f) \xrightarrow{\pi} C(f) \xrightarrow{\delta} X[1]^\bullet$$

为态射 $f: X^\bullet \to Y^\bullet$ 的柱锥三角形.

A.3.4 拟同构

设 $\mathfrak{A}$ 为 Abel 范畴, $C(\mathfrak{A})$ 为 $\mathfrak{A}$ 的复形范畴, $X^\bullet \in \mathrm{Obj}(C(\mathfrak{A}))$. 定义 $X^\bullet$ 的 n 次上同调为

$$H^n(X^\bullet) = \mathrm{Coker}(\mathrm{Im}(d_X^{n-1} \longrightarrow \mathrm{Ker}\,(d_X^n)).$$

显然 $H^n(X^\bullet) = H^0(X^\bullet[n])$. 易证 H^n : $C(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{A}$ 为加性函子. 并且, 如果 $f: X^\bullet \to Y^\bullet$ 同伦于零, 则 $H^n(f)$ 为零态射.

我们称 f : $X^\bullet \to Y^\bullet$ 为**拟同构** (quasi-isomorphism), 如果对于所有的 n, $H^n(f)$ 是同构.

在 $C(\mathfrak{A})$ 内所有拟同构所组成的类不一定是乘性系. 所以在下一小节我们引入 $K(\mathfrak{A})$.

A.3.5 $K(\mathfrak{A})$

设 $\mathfrak{A}$ 为 Abel 范畴. 对于 f : $X^\bullet \to Y^\bullet \in \mathrm{Mor}\, C(\mathfrak{A})$, 以 $[f]$ 记 f 的同伦类 (即 $[f] = \{g \in \mathrm{Mor}\, C(\mathfrak{A}) \mid g \sim f\}$). 我们定义范畴 $K(\mathfrak{A})$ 如下：$\mathrm{Obj}\, K(\mathfrak{A}) = \mathrm{Obj}\, C(\mathfrak{A})$. 对于 $X^\bullet, Y^\bullet \in \mathrm{Obj}\, C(\mathfrak{A})$, 定义

$$\mathrm{Hom}_{K(\mathfrak{A})}(X^\bullet, Y^\bullet) = \{[f] \mid f \in \mathrm{Hom}_{C(\mathfrak{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)\}.$$

从 $C^+(\mathfrak{A})$, $C^-(\mathfrak{A})$, $C^b(\mathfrak{A})$ 出发可以同样定义 $K^+(\mathfrak{A})$, $K^-(\mathfrak{A})$ 和 $K^b(\mathfrak{A})$.

如同在 $C(\mathfrak{A})$ 中一样我们同样定义 $K(\mathfrak{A})$ 上的平移函子 $T: K(\mathfrak{A}) \to K(\mathfrak{A})$.

我们说 $K(\mathfrak{A})$ 中的一个三角形是特异的, 如果它同构于某个态射 $[f]: X^\bullet \to Y^\bullet$ 的柱锥三角形. 这样得到的特异三角形所组成的类记为 Δ.

如果 $f, g \in \mathrm{Mor}\, C(\mathfrak{A})$ 是同伦的, 则 $H^n(f) = H^n(g)$. 因此可以定义 $H^n([f])$. 我们说 $[f]$ 是**拟同构** (quasi isomorphism), 如果对于所有的 n, $H^n([f])$ 是同构. $K(\mathfrak{A})$ 中全体拟同构所组成的类常记作 Qis.

定理 A.3.2　设 $\mathfrak{A}$ 为 Abel 范畴, 则

(1)　$(K(\mathfrak{A}), T, \Delta)$ (如上) 为剖分范畴.

(2)　Qis 为 $K(\mathfrak{A})$ 的乘性系, 并且与剖分相容.

以上定理对于 $K^+(\mathfrak{A})$, $K^-(\mathfrak{A})$ 和 $K^b(\mathfrak{A})$ 同样成立.

A.4　导出范畴

设 $\mathfrak{A}$ 为 Abel 范畴, Qis 为 $K(\mathfrak{A})$ 内的拟同构类. 按上面的定理我们可以对 $(K\mathfrak{A})$ 作关于 Qis 的局部化, 得出分式范畴 $K(\mathfrak{A})[\mathrm{Qis}^{-1}]$. 记此分式范畴为 $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$. 同样由 $K^*(\mathfrak{A})$ 可以得出 $\mathfrak{D}^*(\mathfrak{A})$, 其中 $*$ 分别为 $+, -, b$. 称 $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ 和 $\mathfrak{D}^*(\mathfrak{A})$ 为**导出范畴** (derived category).

在 $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ 内所有满足条件 $H^i(X^\bullet) = 0$ $(\forall\, i < n)$ 的复形 $X^\bullet$ 组成的 $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ 的全子范畴, 记为 $\mathfrak{D}^{\geqslant n}(\mathfrak{A})$. 若把条件改为 $H^i(X^\bullet) = 0$ $(\forall\, i > n)$, 则所得到的全子范畴记为 $\mathfrak{D}^{\leqslant n}(\mathfrak{A})$.

定理 A.4.1　设 $\mathfrak{A}$ 为 Abel 范畴. 则

(1)　存在范畴 $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ 及函子 $Q: C(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ 使得

a) 如果 $f \in \mathrm{Mor}\, C(\mathfrak{A})$ 为拟同构, 则 $Q(f)$ 为同构,

b) 若有函子 $F: C(A) \to \mathfrak{D}$ ($\mathfrak{D}$ 为某范畴) 满足: F 将拟同构映为同构, 则存在唯一的函子 $G: \mathfrak{D}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{D}$ 使得 $F = G \circ Q$.

(2)　$\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ 是剖分范畴.

(3)　$\{\mathfrak{D}^{\leqslant 0}(\mathfrak{A}), \mathfrak{D}^{\geqslant 0}(\mathfrak{A})\}$ 决定 $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ 的 t 结构.

(4)　函子

$$\mathfrak{A} \longrightarrow C(\mathfrak{A})$$

$$X \longmapsto \quad \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow X \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \quad (X \text{ 在 } 0 \text{ 次位置})$$

(此函子在 $\mathrm{Mor}(\mathfrak{A})$ 上的作用是自然定义的) 与 $Q: C(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ 的合成

$$\mathfrak{A} \longrightarrow C(\mathfrak{A}) \xrightarrow{Q} \mathfrak{D}(\mathfrak{A})$$

给出同构 $\mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{D}^{\leqslant 0}(\mathfrak{A}) \cap \mathfrak{D}^{\geqslant 0}(\mathfrak{A})$.

按照此定理, 如果 $X \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$, 我们就可以定义上同调 $H^i(X)$ 为 $\tau_{\geqslant 0}\tau_{\leqslant 0}(X[i])$ 了!

注　设有 Abel 范畴 $\mathfrak{A}$. 对于 $X \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{A}$, 经验地, 我们常常用 X 的分解 (例如内射分解) 来了解 X 的性质. 按照这个观点我们就 X 把看作它的所有分解. 这些分解是复形. 这时关于 X 的代数运算, 如 $\otimes$, Hom, 便要理解为相应的复形. 由

复形我们得出 (上) 同调 (群). 如果两个复形的同调是同构的, 我们应当把这两个复形视为同构的. 这就使得我们摹仿分式环的构作对复形态射拟同构类作局部化而得出导出范畴. 到达了这一步, 除非有需要具体计算同调, 我们的核心对象应当是导出范畴内的复形了. 这样同调代数应该生活在导出范畴之内. 同调代数的一个重要发现是: 两个绝不相同的 Abel 范畴的导出范畴却可能是等价的剖分范畴!

A.5 导出函子

A.5.1 正合函子

设 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 均为 Abel 范畴. 我们说函子 $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ 是**左正合的** (left exact), 如果 F 把任意的正合序列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 映为正合序列 $0 \to FA \to FB \to FC$. 同样, 我们说 F 是**右正合的** (right exact), 如果 F 把上面的正合序列映为正合序列 $FA \to FB \to FC \to 0$. 我们说 F 是**正合函子** (exact functor), 如果 F 同时是左, 右正合函子. 我们指出: Abel 范畴必为加性范畴, 正合函子必为加性函子.

A.5.2 δ 函子

设 $(\mathfrak{C}, T, \Delta)$ 和 $(\mathfrak{C}', T', \Delta')$ 均为剖分范畴. 我们称函子 $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ 为 **δ 函子** (δ-functor) (又有称为正合函子或剖分范畴函子), 如果

(1) F 是加性函子,

(2) $T'F = FT$,

(3) 如果 $X \to Y \to Z \to TX$ 属于 Δ, 则 $FX \to FY \to FZ \to FTX$ 属于 Δ' (此时我们亦说 F 保持特异三角形).

A.5.3 导出函子的用途

设 Abel 范畴 $\mathfrak{A}$ 的加性函子 $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ 可以扩展为函子 $KF : K(\mathfrak{A}) \to K(\mathfrak{B})$, 则 KF 为 δ 函子.

如果 F 又是正合函子, 则 F 把拟同构映为拟同构. 于是通过局部化就得到从 $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ 到 $\mathfrak{D}(\mathfrak{B})$ 的函子. 但如果 F 只是左或右正合的, 则 F 不一定把拟同构映为拟同构. 在这种情况下我们只能求一个从 $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ 到 $\mathfrak{D}(\mathfrak{B})$ 的函子, 使得它是 F 的最佳逼近. 这就是我们在下面要定义的导出函子.

A.5.4　导出函子

设 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 为 Abel 范畴, $F: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ 为加性左正合函子. F 的**右导出函子** (right derived functor) 是指满足以下泛性质的 (RF, ε_F), 其中 $RF: \mathfrak{D}^+(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{D}^+(\mathfrak{B})$ 为 δ 函子, $\varepsilon_F: Q_{\mathfrak{B}} \circ K^+(F) \to RF \circ Q_{\mathfrak{A}}$ 为函子态射:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & K^+(\mathfrak{B}) & & \\
 & \nearrow^{K^+(F)} & & \searrow^{Q_{\mathfrak{B}}} & \\
K^+(\mathfrak{A}) & & \Downarrow \varepsilon_F & & \mathfrak{D}^+(\mathfrak{B}) \\
 & \searrow_{Q_{\mathfrak{A}}} & & \nearrow_{RF} & \\
 & & \mathfrak{D}^+(\mathfrak{A}) & &
\end{array}
$$

我们所要求的泛性质是: 对于任一 δ 函子 $G: \mathfrak{D}^+(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{D}^+(\mathfrak{B})$ 和任一函子态射 $\varepsilon: Q_{\mathfrak{B}} \circ K^+(F) \to G \circ Q_{\mathfrak{A}}$, 存在唯一的函子态射 $\eta: RF \to G$ 使得下图交换:

$$
\begin{array}{ccc}
Q_{\mathfrak{B}} \circ K^+(F) & \xrightarrow{\varepsilon_F} & RF \circ Q_{\mathfrak{A}} \\
 & \searrow_{\varepsilon} & \vdots\ \eta \circ Q_{\mathfrak{A}} \\
 & & G \circ Q_{\mathfrak{A}}
\end{array}
$$

以上的泛性质可以叙述如下: 如果 $G: \mathfrak{D}^+(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{D}^+(\mathfrak{B})$ 是 δ 函子, 则 ε_F 决定双射

$$\mathrm{Hom}(RF, G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Q_{\mathfrak{B}} \circ K^+(F), G \circ Q_{\mathfrak{A}}).$$

同样, 加性右正合函子 F 的**左导出函子** (left derived functor) 是 δ 函子 $LF: \mathfrak{D}^-(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{D}^-(\mathfrak{B})$ 及函子态射 $\varepsilon_F: LF \circ Q_{\mathfrak{A}} \to Q_{\mathfrak{B}} \circ K^-(F)$ 使得下面的映射为双射:

$$\mathrm{Hom}(G, LF) \longrightarrow \mathrm{Hom}(G \circ Q_{\mathfrak{A}}, Q_{\mathfrak{B}} \circ K^-(F)).$$

以上的 $\mathfrak{B}$ 是 Abel 范畴, $\mathfrak{D}^+(\mathfrak{B})$ 是 t 范畴 (但一般不是 Abel 范畴). 于是有从 $\mathfrak{D}^+(\mathfrak{B})$ 到它的心 (法文: coeur) $\mathfrak{D}^+(\mathfrak{B})^{\leqslant 0} \cap \mathfrak{D}^+(\mathfrak{B})^{\geqslant 0}$ 的上同调函子 H^i.

另一方面, 我们可以把 $X \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{A}$ 看作复形

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow X \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots,$$

其中 X 在 0 位. 这样可以把 $\mathfrak{A}$ 看作 $\mathfrak{D}^+(\mathfrak{A})$ 的全子范畴.

如果加性左正合函子 $F: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ 有右导出函子 $RF: \mathfrak{D}^+(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{D}^+(\mathfrak{B})$, 则定义 $R^iF = H^i \circ RF$. 于是对于 $X \in \operatorname{Obj}\mathfrak{A}$, 就有 $R^iF(X)$:

$$\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{D}^+(\mathfrak{A}) \xrightarrow{RF} \mathfrak{D}^+(\mathfrak{B}) \xrightarrow{H^i} \mathfrak{D}^+(\mathfrak{B})^{\leqslant 0} \cap \mathfrak{D}^+(\mathfrak{B})^{\geqslant 0}.$$

这样我们便回到通常的同调代数的世界里了!

A.5.5 适应类

下面我们把内射分解稍加推广, 引入适应类的概念, 以帮助我们计算导出函子.

在 Abel 范畴中与零复形拟同构的复形被称为**零调的** (acyclic).

定义 A.5.1 设 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 为 Abel 范畴, $F: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ 为左正合函子. 我们称 $\mathfrak{R} \subseteq \operatorname{Obj}\mathfrak{A}$ 是一个 F **适应类** (F-adapted class), 如果

(1) $\mathfrak{R}$ 对于有限直和封闭.

(2) 对于任一 $X \in \operatorname{Obj}\mathfrak{A}$, 存在 $R \in \operatorname{Obj}\mathfrak{R}$ 和单态射 $X \to R$ (即 $0 \to X \to R$ 正合. 此时我们说 $\mathfrak{A}$ 有足够的 $\mathfrak{R}$ 对象).

(3) F 把 $K^+(\mathfrak{R})$ 的零调复形映为零调复形, 其中 $K^+(\mathfrak{R})$ 为 $K^+(\mathfrak{A})$ 的子范畴, 其对象形如 $X^\bullet = (X^n)$ $(X^n \in \mathfrak{R})$.

若 F 是右正合的, 则我们把条件 (2) 改为: 由满态射 $R \to X$ (即 $R \to X \to 0$ 正合), 同时把条件 (3) 中的 $K^+(\mathfrak{A})$ 改为 $K^-(\mathfrak{A})$.

定理 A.5.1 设左正合函子 $F: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ 有 F 适应类. 以 $S_{\mathfrak{R}}$ 记 $K^+(\mathfrak{R}) \cap \mathrm{Qis}$. 则

(1) $S_{\mathfrak{R}}$ 是 $K^+(\mathfrak{R})$ 的乘性系;

(2) $\operatorname{Obj} K^+(\mathfrak{A})$ 的任一元必与 $K^+(\mathfrak{R})$ 的某个元拟同构;

(3) 自然嵌入函子 $K^+(\mathfrak{R})[S_{\mathfrak{R}}^{-1}] \xrightarrow{\Psi} K^+(\mathfrak{A})[\mathrm{Qis}^{-1}] = \mathfrak{D}^+(\mathfrak{A})$ 是全忠实的. (这时又说 $K^+(\mathfrak{R})$ 是 $K^+(\mathfrak{A})$ 的**局部化子范畴** (localising subcategory).)

以上的 (2) 和 (3) 是说 Ψ 是范畴等价. 即是说存在函子 $\Phi: \mathfrak{D}^+(\mathfrak{A}) \to K^+(\mathfrak{R})[S_{\mathfrak{R}}^{-1}]$ 及函子同构 $\alpha: \mathrm{id}_{K^+(\mathfrak{R})[S_{\mathfrak{R}}^{-1}]} \to \Phi \circ \Psi$ 和 $\beta: \mathrm{id}_{\mathfrak{D}^+(\mathfrak{A})} \to \Psi \circ \Phi$.

(4) F 把 $K^+(\mathfrak{A})$ 的拟同构映为 $K^+(\mathfrak{B})$ 的拟同构. 于是 F 定义了函子 $\overline{F}: K^+(\mathfrak{R})[S_{\mathfrak{R}}^{-1}] \to \mathfrak{D}^+(\mathfrak{B})$ 如下: $(\overline{F}(X^\bullet))^i = F(X^i)$. 设 $RF = \overline{F} \circ \Phi$, 则 $RF: \mathfrak{D}^+(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{D}^+(\mathfrak{B})$ 为 δ 函子.

对于任一 $X \in \operatorname{Obj} K^+(\mathfrak{A}) = \operatorname{Obj}\mathfrak{D}^+(\mathfrak{A})$, 设 $Y = \Phi \circ Q_{\mathfrak{A}}(X) \in \operatorname{Obj} K^+(\mathfrak{R})[S_{\mathfrak{R}}^{-1}] = \operatorname{Obj} K^+(\mathfrak{R})$. 以函子同构 β 作用在 X 上, 得到 $D^+(\mathfrak{A})$ 内的同构:

$$\beta(X): X \longrightarrow \Psi\Phi(X).$$

我们把 $\Psi\Phi(X)$ 看作 Y, $\beta(X)$ 作为分式范畴 $D^+(\mathfrak{A})$ 内的态射是 $K^+(\mathfrak{A})$ 内的态射图

$$X \xleftarrow{s} X' \xrightarrow{f} Y,$$

其中 $s \in \mathrm{Qis}$. 于是便得到 $K^+(\mathfrak{B})$ 内的态射图

$$K^+(F)(X) \xleftarrow{K^+(F)(s)} K^+(F)(X') \xrightarrow{K^+(F)(s)} K^+(F)(Y),$$

其中 $K^+(F)(s) \in \mathrm{Qis}$. 这就给出了 $D^+(\mathfrak{B})$ 内的态射

$$\varepsilon_F(X) : Q_{\mathfrak{B}}K^+(F)(X) \to Q_{\mathfrak{B}}K^+(F)(Y)=\overline{F}Y=\overline{F}\Phi Q_{\mathfrak{A}}(X)=RF \circ Q_{\mathfrak{A}}(X).$$

(5) $\{\varepsilon_F(X) \mid X \in \mathrm{Obj}\, K^+(\mathfrak{A})\}$ 决定函子态射

$$\varepsilon_F : Q_{\mathfrak{B}} \circ K^+(F) \longrightarrow RF \circ Q_{\mathfrak{A}},$$

并且 (RF, ε_F) 为 F 的右导出函子.

A.5.6　导出函子的复合

设 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ 为 Abel 范畴, $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, $G : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ 为加性左正合函子. 设有 F 适应类 $\mathfrak{R}_F$ 和 G 适应类 $\mathfrak{R}_G$, 并假设 $F(\mathfrak{R}_F) \subseteq \mathfrak{R}_G$. 则右导出函子 RF, RG 和 $R(G \circ F)$ 存在, 并且自然函子态射 $R(G \circ F) \to RG \circ RF$ 为同构. 由这个同构便可推出一般的谱序列.

A.6　内射分解

常用的适应类是内射 (或投射) 对象. 我们只讨论内射情形.

A.6.1　内射分解

我们称 Abel 范畴 $\mathfrak{A}$ 的对象 I 为**内射对象** (injective object), 如果以下条件成立：对于 $\mathfrak{A}$ 内的任一单态射 $0 \to A \xrightarrow{f} B$ 及任一态射 $\alpha : A \to I$, 存在态射 $\beta : B \to I$ 使得 $\alpha = \beta \circ f$.

我们说 $\mathfrak{A}$ 有**足够内射对象** (enough injectives), 如果对于任一 $A \in \mathrm{Obj}\ \mathfrak{A}$, 存在内射对象 I 及单态射 $0 \to A \to I$.

设 $X \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{A}$. X 的一个**内射分解** (injective resolution) 是指一个复形 $I^\bullet \in C(\mathfrak{A})$ 满足条件：若 $i < 0$, 则 $I^i = 0$, 所有的 I^i 均为内射对象以及有态射 $X \to I^0$ 使得下面的序列正合：

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow I^0 \xrightarrow{d_I^0} I^1 \xrightarrow{d_I^1} I^2 \xrightarrow{d_I^2} \cdots$$

若 $\mathfrak{A}$ 有足够内射对象, 则 $\mathfrak{A}$ 的任一对象都有内射分解.

A.6.2 复形态射与同伦

(1) 设 $X, Y, \in \operatorname{Obj}\mathfrak{A}$. 若 $X \to I^\bullet$, $Y \to J^\bullet$ 为内射分解, $f : X \to Y$ 为态射, 则存在复形态射 $R^\bullet : I^\bullet \to J^\bullet$ 使得下图交换:

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & I^0 \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle R^0} \\ Y & \xrightarrow{\ t\ } & J^0 \end{array}$$

如果另有满足同样条件的复形态射 $R'^\bullet : I^\bullet \to J^\bullet$, 则 R 与 R' 同伦.

(2) 设 $f : Z^\bullet \to I^\bullet \in \operatorname{Mor} C(\mathfrak{A})$, $Z^\bullet$ 为零调, $I^\bullet \in C^+(\mathfrak{A})$, 所有的 I^i 均为内射, 则 f 同伦于零.

(3) 设 $s : I^\bullet \to Y^\bullet \in \operatorname{Mor} C(\mathfrak{A})$, 对于所有的 n, $H^n(s)$ 为同构, I^n 为内射, 则同伦类 $[s]$ 可逆.

A.6.3 内射对象子范畴

以 $\mathfrak{I}$ 记 Abel 范畴 $\mathfrak{A}$ 中所有内射对象所组成的子范畴. 像以前一样定义 $K^+(\mathfrak{I})$, 以 $S_\mathfrak{I}$ 记 $\operatorname{Mor} K^+(\mathfrak{I}) \cap \operatorname{Qis}$. 则

(1) $S_\mathfrak{I}$ 是乘性系, 并且 $S_\mathfrak{I}$ 的每个元素均为同构. 于是 $K^+(\mathfrak{I})[S_\mathfrak{I}^{-1}] = K^+(\mathfrak{I})$, 并且自然嵌入 $K^+(\mathfrak{I}) \to \mathfrak{D}^+(\mathfrak{A})$ 使得 $K^+(\mathfrak{I})$ 与 $\mathfrak{D}^+(\mathfrak{A})$ 的全子范畴等价.

(2) 如果进一步假设 $\mathfrak{A}$ 有足够内射对象, 则自然嵌入 $K^+(\mathfrak{I}) \to \mathfrak{D}^+(\mathfrak{A})$ 是范畴等价, 并且对于任一加性左正合函子 $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, $\mathfrak{I}$ 均为 F 适应类. 于是 F 的右导出函子存在, 并且可以如下计算: 对于 $X \in \operatorname{Obj}\mathfrak{A}$, 把 X 看作复形

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow X \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

其中 X 在 0 位, 取内射分解 $X \to I^\bullet$, 则 $RF(X) = FI^\bullet$.

A.7 $R\operatorname{Hom}^\bullet$ 函子

固定一个 Abel 范畴 $\mathfrak{A}$.

A.7.1 $\mathbf{Hom}^\bullet$

设 $X^\bullet$, $Y^\bullet$ 为 $\mathfrak{A}$ 的复形. 定义 Abel 群范畴 $\mathfrak{Ab}$ 的复形 $\operatorname{Hom}^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet)$ 如下:

$$\operatorname{Hom}^n(X^\bullet, Y^\bullet) = \prod_{i \in \mathbb{Z}} \operatorname{Hom}_\mathfrak{A}(X^i, Y^{i+n}),$$

以及

$$\mathrm{d}^n = \prod_{i\in\mathbb{Z}}(\mathrm{d}_X^{i-1} + (-1)^{n+1}\mathrm{d}_Y^{i+n}).$$

这样便有

$$H^n(\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet)) = \mathrm{Hom}_{K(\mathfrak{A})}(X^\bullet, T^nY^\bullet),$$

且有双 δ 函子

$$\mathrm{Hom}^\bullet:\ K(\mathfrak{A})^\circ \times K(\mathfrak{A}) \longrightarrow K(\mathfrak{Ab}).$$

引理 A.7.1 设 $X^\bullet \in \mathrm{Obj}\, K(\mathfrak{A})$, $Y^\bullet \in \mathrm{Obj}\, K^+(\mathfrak{A})$. 设 Y^i 为内射对象 $(\forall\, i)$. 如果 $Y^\bullet$ 或 $X^\bullet$ 为零调, 则 $\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet)$ 为零调.

A.7.2 $R\,\mathrm{Hom}^\bullet$

假设 $\mathfrak{A}$ 有足够内射对象. 设 $X^\bullet \in \mathrm{Obj}\, K(\mathfrak{A})$, 则左正合函子

$$\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, \bullet):\ K^+(\mathfrak{A}) \longrightarrow K(\mathfrak{Ab})$$

有右导出函子

$$R_{\mathrm{II}}\,\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, \bullet):\ \mathfrak{D}^+(\mathfrak{A}) \longrightarrow \mathfrak{D}(\mathfrak{Ab}).$$

从这个函子的构造过程可以看出：如果有态射 $X^\bullet \to X'^\bullet$, 则有态射

$$R_{\mathrm{II}}\,\mathrm{Hom}^\bullet(X'^\bullet, \bullet)(Y^\bullet) \longrightarrow R_{\mathrm{II}}\,\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, \bullet)(Y^\bullet).$$

当 $X^\bullet \to X'^\bullet$ 是拟同构时此态射是同构. 于是函子

$$\begin{aligned} F:\ K(\mathfrak{A})^\circ &\longrightarrow \mathfrak{D}(\mathfrak{Ab}) \\ X^\bullet &\longmapsto R_{\mathrm{II}}\,\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, \bullet)(Y^\bullet) \end{aligned}$$

透过 $K(\mathfrak{A})^\circ \to \mathfrak{D}(\mathfrak{A})^\circ$ 诱导出 (平凡) 右导出函子 $RF:\ \mathfrak{D}(\mathfrak{A})^\circ \to \mathfrak{D}(\mathfrak{Ab})$. 我们把这个 RF 记为

$$R_{\mathrm{I}}R_{\mathrm{II}}\,\mathrm{Hom}^\bullet:\ \mathfrak{D}(\mathfrak{A})^\circ \times \mathfrak{D}^+(\mathfrak{A}) \longrightarrow \mathfrak{D}(\mathfrak{Ab}).$$

又以 $R\,\mathrm{Hom}^\bullet$ 简记此函子.

定理 A.7.2 $H^i(R\,\mathrm{Hom}^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet)) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}(\mathfrak{A})}(X^\bullet, T^i(Y^\bullet))$.

A.7.3 投射情形

若假设 $\mathfrak{A}$ 有足够投射对象, 则如上一小节 (把箭头反向) 有函子

$$R_{\mathrm{II}}R_{\mathrm{I}}\,\mathrm{Hom}^\bullet:\ \mathfrak{D}^-(\mathfrak{A})^\circ\times\mathfrak{D}(\mathfrak{A})\longrightarrow\mathfrak{D}(\mathfrak{Ab}).$$

如果 $\mathfrak{A}$ 有足够内射对象和足够投射对象, 则两个函子 $R_{\mathrm{I}}R_{\mathrm{II}}\,\mathrm{Hom}^\bullet$ 和 $R_{\mathrm{II}}R_{\mathrm{I}}\,\mathrm{Hom}^\bullet$ 同时在 $\mathfrak{D}^-(\mathfrak{A})^\circ\times\mathfrak{D}^+(\mathfrak{A})$ 上有定义, 并且彼此自然同构.

A.7.4 Grothedieck 拓扑下的情形

现在设 $T=(\mathrm{Cat}\ T,\mathrm{Cov}\ T)$ 为 Grothedieck 拓扑. 于是可以定义交换层 $F:\ (\mathrm{Cat}\ T)^\circ\to\mathfrak{Ab}$. 拓扑 T 所决定的所有交换层组成 Abel 范畴 $\mathcal{A}_T$. 对于交换层 $F,G\in\mathrm{Obj}\,\mathcal{A}_T$, 有相应的交换层 $\mathscr{H}om(F,G)$ 和交换群 $\mathrm{Hom}(F,G)$.

因为 $\mathcal{A}_T$ 内有足够内射对象, 根据前面的讨论知有函子

$$R\,\mathrm{Hom}^\bullet:\ \mathfrak{D}(\mathcal{A}_T)^\circ\times\mathfrak{D}^+(\mathcal{A}_T)\longrightarrow\mathfrak{D}(\mathfrak{Ab}).$$

我们记 $H^i(R\,\mathrm{Hom}^\bullet(F^\bullet,G^\bullet))$ 为 $\mathrm{Ext}^i(F^\bullet,G^\bullet)$ (又称为 global hyperext).

如同定义 $\mathrm{Hom}^\bullet$ 一样可以定义 $\mathscr{H}om^\bullet$.

引理 A.7.3 *设 $F^\bullet$, $G^\bullet$ 为交换层复形, 其中 G^i 皆为内射层, 并且 $G^i=0$ $(\forall\, i\ll 0)$. 如果 $F^\bullet$ 或 $G^\bullet$ 为零调, 则 $\mathscr{H}om^\bullet(F^\bullet,G^\bullet)$ 为零调.*

如前面两节关于 Hom 的讨论一样, 可以证明存在函子

$$R_{\mathrm{I}}R_{\mathrm{II}}\mathscr{H}om^\bullet:\ \mathfrak{D}(\mathcal{A}_T)^\circ\times\mathfrak{D}^+(\mathcal{A}_T)\longrightarrow\mathfrak{D}(\mathfrak{Ab}).$$

此函子亦记为 $R\mathscr{H}om^\bullet$. 我们又记层 $H^i(\mathscr{H}om^\bullet(F^\bullet,G^\bullet))$ 为 $\mathscr{E}xt^i(F^\bullet,G^\bullet)$ (此交换层又称为 local hyperext). 若有交换层 F, G, 我们可以把 F 看作复形

$$\cdots\longrightarrow 0\longrightarrow F\longrightarrow 0\longrightarrow\cdots$$

(F 在零次位置), 则有交换层 $\mathscr{E}xt^i(F,G)$ (又称为 local ext).

本节参考资料: [68], [39], [163], [272], [321], [385], [386] 及 [392].

附录 B　Grothendieck 拓扑

B.1　拓扑与层

给定范畴 Cat T, 考虑集合 Cov T. 此集合的元素是一组在范畴 Cat T 内的态射 $\{U_i \to U\}_{i\in I}$. 考虑以下条件:

(1) 如果 φ 是 Cat T 内的同构, 则 $\{\varphi\} \in \mathrm{Cov}\, T$.

(2) 如果 $\{U_i \stackrel{\varphi_i}{\to} U\} \in \mathrm{Cov}\, T$ 及 $\{V_{ij} \stackrel{\varphi_{ij}}{\to} U_i\} \in \mathrm{Cov}\, T$, 则

$$\{V_{ij} \xrightarrow{\varphi_i\varphi_{ij}} U\} \in \mathrm{Cov}\, T.$$

(3) 如果 $\{U_i \to U\} \in \mathrm{Cov}\, T$, $V \to U$ 是 Cat T 内任一态射, 则纤维积 $U_i \times_U V$ 存在并且 $\{U_i \times_U V \stackrel{\mathrm{pr}_2}{\to} V\} \in \mathrm{Cov}\, T$.

当以上三个条件成立时, 我们说 (Cat T, Cov T) 是一个**位形** (site), 又说 Cov T 在 Cat T 上定义了 **Grothendieck 拓扑**, 这就如我们平常所说的拓扑空间 $(\mathscr{T},\tau)$ 一样, 其中 $\mathscr{T}$ 是一个集合, τ 是一组 $\mathscr{T}$ 的子集, 满足开集条件; 我们也说 τ 是 $\mathscr{T}$ 的一个**拓扑** (topology). (“topos” 来自希腊文, “situs” 来自拉丁文). (在 [147]$_{\mathrm{I}}$, Exp. IV, 4.2.5 中称这里定义的拓扑为 prétopologie)

以下我们有时候把 (Cat T, Cov T) 记为 $(\mathscr{C},\mathscr{T})$. 如果 $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}'$, 我们说拓扑 $(\mathscr{C},\mathscr{T})$ 比 $(\mathscr{C},\mathscr{T}')$ **弱** ($\mathscr{T}$ is weaker than $\mathscr{T}'$ 或 $\mathscr{T}$ is less fine than $\mathscr{T}'$).

当 $\{U_i \to U\} \in \mathrm{Cov}\, T$ 时我们称 $\{U_i\}$ 为 U 的一个**覆盖**.

设 $\mathscr{C}$ 为有纤维积之范畴. 我们称 $\mathscr{C}$ 内的一组态射 $\{U_i \to U\}$ 为**泛有效满射** (universal effective epimorphisms), 如果对任意 $Z \in \mathrm{Obj}\,\mathscr{C}$ 及任意 $\mathscr{C}$ 内态射 $U \to V$, 以下两图均为正合:

$$\mathrm{Hom}(U,Z) \longrightarrow \prod \mathrm{Hom}(U_i,Z) \rightrightarrows \prod \mathrm{Hom}(U_i \times_U U_j, Z),$$

$$\mathrm{Hom}(V,Z) \longrightarrow \prod \mathrm{Hom}(U_i \times_U V,Z) \rightrightarrows \prod \mathrm{Hom}(U_i \times_U V \times_U U_j, Z).$$

([147]$_{\mathrm{I}}$ IV, §1)

设 Cat $T_{\mathscr{C}} = \mathscr{C}$, Cov $T_{\mathscr{C}}$ 为 $\mathscr{C}$ 内所有的泛有效满射, 则 (Cat$T_{\mathscr{C}}$, Cov $T_{\mathscr{C}}$) 为 Grothendieck 拓扑. 常称此为 $\mathscr{C}$ 的标准拓扑 (canonical topology).

一个 Grothendieck 拓扑的态射 $f : T \to T'$ 是指一个满足下列条件的一个函子 $f : \mathrm{Cat}\ T \to \mathrm{Cat}\ T'$：

(1) 如果 $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\} \in \mathrm{Cov}\ T$, 则 $\{f(U_i) \xrightarrow{f(\varphi_i)} f(U)\} \in \mathrm{Cov}\ T'$.

(2) 如果 $\{U_i \to U\} \in \mathrm{Cov}\ T$ 和 $V \to U \in \mathrm{Cov}\ T$, 则自然态射

$$f(U_i \times_U V) \longrightarrow f(U_i) \times_{f(U)} f(V)$$

对所有的 i 均为同构.

设有 Grothendieck 拓扑 $T = (\mathrm{Cat}\ T, \mathrm{Cov}\ T)$. 又设范畴 $\mathscr{C}$ 内存在乘积. 所谓 T 上取值于 $\mathscr{C}$ 的**预层** (presheaf) 是指一个从 Cat T 到 $\mathscr{C}$ 的**反变函子** (contravariant functor). 如果以下条件成立, 则称预层 $\mathcal{F}$ 为**层** (sheaf)：若 $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\} \in \mathrm{Cov}\ T$, 则下图正合：

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\rho} \prod_i \mathcal{F}(U_i) \overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \times_U U_j)$$

(见 [11] §3.2). 当 $\mathscr{C}$ 为交换群范畴时, 我们称取值于 $\mathscr{C}$ 的层为交换层.

设有 T 上取值于 $\mathscr{C}$ 的预层 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$. 从 $\mathcal{F}$ 到 $\mathcal{G}$ 的态射 $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ 是指反变函子的态射 (自然变换)：即是说对 Cat T 的每个对象 U 给出 $\mathscr{C}$ 内的态射 $f_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$, 使得对 Cat T 内的任一态射 $i : U \to V$ 有以下交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{f_V} & \mathcal{G}(V) \\ {\scriptstyle \mathcal{F}(i)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{G}(i)} \\ \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{f_U} & \mathcal{G}(U) \end{array}$$

所有由 $\mathcal{F}$ 到 $\mathcal{G}$ 的态射所组成的集合记作 $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

给出交换预层 $\mathcal{F}$ 我们可以构造交换层 $\mathcal{F}^{++}$ (称为 $\mathcal{F}$ 的层化) 和态射 $i : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^{++}$, 满足这样的条件：任一从 $\mathcal{F}$ 到交换层 $\mathcal{G}$ 的态射必可唯一的分解为 $\mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{F}^{++} \to \mathcal{G}$ (参见：[11] §3.2).

设 $\mathscr{T}$ 为 Grothendieck 拓扑. 由 $\mathscr{T}$ 上所有的交换层所组成的范畴记为 $\mathfrak{Ab}_{\mathscr{T}}$.

定理 B.1.1　$\mathfrak{Ab}_{\mathscr{T}}$ 是 Abel 范畴, 并且

(1) $\mathfrak{Ab}_{\mathscr{T}}$ 有足够的内射对象,

(2) 设有 $\mathcal{F}_i \in \mathfrak{Ab}_{\mathscr{T}}, i \in I$, 则 $\mathfrak{Ab}_{\mathscr{T}}$ 内存在直积 $\prod \mathcal{F}_i$ (这条件称为 Ab3*)

(3) 设有 $\mathcal{F}_i \in \mathfrak{Ab}_{\mathscr{T}}, i \in I$, 则 $\mathfrak{Ab}_{\mathscr{T}}$ 内存在直和 $\bigoplus \mathcal{F}_i$. 设有 $\mathcal{F} \in \mathfrak{Ab}_{\mathscr{T}}$ 和有向集 $\{\mathcal{F}_i\}$, 其中 $\mathcal{F}_i$ 为 $\mathcal{F}$ 的子层, 则对 $\mathcal{F}$ 的任一子集 $\mathcal{G}$ 有

$$\left(\sup_{i\in I} \mathcal{F}_i\right) \cap \mathcal{G} = \sup_{i\in I}(\mathcal{F}_i \cap \mathcal{G})$$

(这条件称为 Ab5).

注　从 $\mathcal{F}_i$ 是 $\mathcal{F}$ 的子层及直和存在, 知可取直和所决定之态射 $\bigoplus_{i\in I}\mathcal{F}_i \to \mathcal{F}$ 的像为 $\sup_{i\in I}\mathcal{F}_i$.

证明　我们先来证明 $\mathfrak{Ab}_{\mathscr{T}}$ 为 Abel 范畴.

第一步. 设 $\mathcal{F},\mathcal{G}\in\mathfrak{Ab}_{\mathscr{T}}$, 则 $\mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ 为交换群, 其零元为这样的层: 对任一 $U\in\mathscr{T}$, $\Theta(U)=0$.

第二步. 设 $\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ 为 $\mathfrak{Ab}_{\mathscr{T}}$ 内的态射. 定义预层 $\mathcal{K}$ 如下: 对 $U\in\mathscr{T}$, 设 $\mathcal{K}(U)=\mathrm{Ker}(\mathcal{F}(U)\to\mathcal{G}(U))$. 我们断定 $\mathcal{K}$ 是层. 原因是这样: 设 $\{U_i\to U\}\in \mathrm{Cov}\,T$, 则有交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
 & & \mathcal{K}(U) & \longrightarrow & \prod\mathcal{K}(U_i) & \rightrightarrows & \prod\mathcal{K}(U_i\times_U U_j)\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \prod\mathcal{F}(U_i) & \rightrightarrows & \prod\mathcal{F}(U_i\times_U U_j)\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
0 & \longrightarrow & \mathcal{G}(U) & \longrightarrow & \prod\mathcal{G}(U_i) & \rightrightarrows & \prod\mathcal{G}(U_i\times_U U_j)
\end{array}$$

其中第二, 三行及所有的列为正合. 于是得知第一行亦是正合. 于是得证 $\mathcal{K}$ 为层. 由定义知有态射 $\mathcal{K}\to\mathcal{F}$. 余下证明 $\mathcal{K}\to\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ 的核. 首先由定义, $\mathcal{K}$ 为预层态射 $\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ 的核, 所以对任意预层 $\mathcal{X}$ 必得正合序列:

$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{K})\longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{F})\longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{G}),$$

于是必然对层 $\mathcal{X}$ 也是正合. 但是 Hom 的定义对预层和层是一样的 (即定义中并没有提及是预层或是层), 所以对任意层 $\mathcal{X}$ 以上序列仍然正合. 这就是说 $\mathcal{K}\to\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ 的核了.

第三步. 给出态射 $f:\mathcal{F}\to\mathcal{G}\in\mathfrak{Ab}_{\mathscr{T}}$, 交换群同态 $f_U:\mathcal{F}(U)\to\mathcal{G}(U)$ 的余核 (Coker f_U) 是 $\mathcal{C}(U)=\mathcal{G}(U)/f_U(\mathcal{F}(U))$ (正确是指同态 $\mathcal{G}(U)\to\mathcal{C}(U)$). 于是对任意层 $\mathcal{X}$ 有正合序列:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{X}) & \longleftarrow & \mathrm{Hom}(\mathcal{G},\mathcal{X}) & \longleftarrow & \mathrm{Hom}(\mathcal{C},\mathcal{X}) & \longleftarrow & 0\\
\updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \\
\mathrm{Hom}(\mathcal{F}^{++},\mathcal{X}) & & \mathrm{Hom}(\mathcal{G}^{++},\mathcal{X}) & & \mathrm{Hom}(\mathcal{C}^{++},\mathcal{X}) & &
\end{array}$$

其中每列的双射是层化 $\bullet \to \bullet^{++}$ 的性质. 但 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ 是层, 于是 $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}^{++}$, $\mathcal{G} \cong \mathcal{G}^{++}$, 这样上图便给出以下正合序列:

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{X}) \longleftarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{X}) \longleftarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{C}^{++}, \mathcal{X}),$$

即是说 $\mathcal{G} \to \mathcal{C}^{++}$ 是 $\mathrm{Coker}(\mathcal{F} \to \mathcal{G})$.

第四步. 有了 Ker 及 Coker, 我们便可取像为 $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, \mathrm{Coker}\, f$, 余像为 $\mathrm{Coim}\ f = \mathrm{Coker}\ \mathrm{Ker}\, f$. 这就证明了 $\mathfrak{Ab}_{\mathscr{T}}$ 为 Abel 范畴.

现在我们证明 (2)、(3). 设有 $\mathcal{F}_i \in \mathfrak{Ab}_{\mathscr{T}}$, $i \in I$. 则显然预层 $U \to \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i(U)$ 是层. 即 $\mathfrak{Ab}_{\mathscr{T}}$ 内存在直积. 另外, 取交换群直和 $\mathcal{S}(U) = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}_i(U)$, 则对任何层 $\mathcal{X}$, 从自然单射 $\mathcal{F}_i \to \mathcal{S}$ 得双射

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{S}, \mathcal{X}) \longrightarrow \prod_i \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_i, \mathcal{X}),$$

由层化的性质 $\mathcal{S} \to \mathcal{S}^{++}$ 得双射

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{S}^{++}, \mathcal{X}) \longrightarrow \prod_i \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_i, \mathcal{X})$$

(从 $\mathcal{F}_i$ 是层知 $\mathcal{F}_i^{++} \cong \mathcal{F}_i$). 于是知道 $\mathcal{F}_i \to \mathcal{S}^{++}$ 是在 $\mathfrak{Ab}_{\mathscr{T}}$ 内 $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ 的直和.

至于 $\mathfrak{Ab}_{\mathscr{T}}$ 内存在足够内射对象, 我们不证了. 这是 Abel 范畴的一个一般性的结果. 证明见 [137]. □

固定概形 S. 以 $\mathfrak{Sch}/S$ 记由 S 概形所组成的范畴. 我们说 $\mathfrak{Sch}/S$ 内的态射集合 $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}_{i \in I}$ 为**满族** (surjective family), 如果 $U = \bigcup_{i \in I} \varphi_i(U_i)$. 若 I 是个有限集, 则说 $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}$ 是个有限满族.

在 $\mathfrak{Sch}/S$ 内, 由所有这样的满族 $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U \mid \varphi_i \text{ 开浸入}\}_{i \in I}$ 所构成的类记作 $\mathscr{C}_{\mathrm{Zar}}$. 在 $\mathfrak{Sch}/S$ 内, 由所有的有限满族 $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U \mid \varphi_i \text{ 满足性质 P}\}_{i \in I}$ 所构成的类记作 $\mathscr{C}_{\mathrm{P}}$. 我们分别取 P 为: 忠实平坦及有限展示, 则得 $\mathscr{C}_{\mathrm{fppf}}$; 取 P 为忠实平坦及拟紧, 则得 $\mathscr{C}_{\mathrm{fpqc}}$.

在 $\mathfrak{Sch}/S$ 上装备上由 $\mathscr{C}_{\mathrm{Zar}} \cup \mathscr{C}_{\mathrm{P}}$ 所决定的 Grothendieck 拓扑后我们记它为 $(\mathfrak{Sch}/S)_{\mathrm{P}}$. 显然有

$$(\mathfrak{Sch}/S)_{\mathrm{fpqc}} \supseteq (\mathfrak{Sch}/S)_{\mathrm{fppf}} \supseteq (\mathfrak{Sch}/S)_{\mathrm{Zar}}$$

([147] IV, 6.3).

有了拓扑便可定义层 (见 [11] §3.2). 我们称 $\mathscr{C}_{\mathrm{P}}$ 上的层为 P 层. Grothendieck 的定理说: 若 $X \in \mathfrak{Sch}/S$, 则 $\mathrm{Hom}_S(\bullet, X)$ 是 fpqc 层 ([11] 定理 3.7). 由 P 层所组成的范畴记为 $(\mathscr{F}/S)_{\mathrm{P}}$. 则 Grothendieck 的定理说: 透过 $X \mapsto \mathrm{Hom}_S(\bullet, X) =$

h_X 我们可以把 $\mathfrak{Sch}/S$ 看作 $(\mathscr{F}/S)_{\text{fpqc}}$ 的**全子范畴** (full subcategory). 这是 "下降法" 的一个基本结论. 下一节我们将证明: 如果 $f: X \to Y$ 是有限展示忠实平坦的概形态射, 则 $\tilde{F}: h_X \to h_Y$ 是 fppf 层满射. 如此命题人们都说是显然的, 读者看法如何?

我们补充一点, 以 P 记 fpqc 或 fppf. 以 T 记 $(\mathfrak{Sch}/S)_{\text{P}}$. 则 $\text{Cat}\, T = \mathfrak{Sch}/S$. 而 $\text{Cov}\, T$ 的元素是 $(\mathfrak{Sch}/S)$ 内满足以下条件的态射集合 $\{U_{ij} \xrightarrow{\varphi_{ij}} U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}_{i\in I, j\in I_j}$, 其中 I_j 是有限集, $\varphi_i : U_i \to U$ 是 S 概形开浸入. $\bigcup_{i\in I} \varphi_i(U_i) = U$, $\varphi_{ij} \in \text{P}$, $\bigcup_{j\in I_i} \varphi_{ij}(U_{ij}) = U_i$.

预层 $\mathcal{F}: (\mathfrak{Sch}/S)_{\text{P}} \to \mathscr{C}$ (即函子 $\mathcal{F}: (\mathfrak{Sch}/S)^o \to \mathscr{C}$, 并假设范畴 $\mathscr{C}$ 内有乘积) 是层的充要条件是:

(1) $\mathcal{F}$ 是 $(\mathfrak{Sch}/S)_{\text{Zar}}$ 层, 即是说, 如果 $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}_{i\in I}$ 是 $\mathfrak{Sch}/S$ 内的一组**开浸入** (open immersion) 使得 $\bigcup \varphi_i(U_i) = U$, 则下图正合:

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod_i \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \times_U U_j).$$

(2) 如果 $V \to U \in \text{P}$, V 和 U 是仿射概形, 则以下图正合:

$$\mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{F}(U) \rightrightarrows \mathcal{F}(U \times_V U)$$

(参见 [147]$_{\text{I}}$ IV, Prop. 6.3.1).

B.2 环上的 fppf 层

为了帮助理解前面所作的拓扑复习. 我们考虑以下特殊情形: 固定交换环 R, 取概形 $S = \text{Spec}\, R$. 常以 $\mathfrak{Sch}/R$ 记 $\mathfrak{Sch}/S$. 我们在本节考虑 R 上的 fppf 层 $\mathcal{F}$, 即 $\mathcal{F}: (\mathfrak{Sch}/R)^o_{\text{fppf}} \to \mathfrak{Sets}$, 其中 $\mathfrak{Sets}$ 是集合范畴. 若 A 是 R 代数, 我们又以 $\mathcal{F}(A)$ 记 $\mathcal{F}(\text{Spec}\, A)$. 从 $(\mathfrak{Sch}/R)_{\text{fpqc}} \supseteq (\mathfrak{Sch}/R)_{\text{fppf}}$, 用 Grothendieck 定理, 我们把 R 概形 $X \in \mathfrak{Sch}/R$ 看成 R 上的 fppf 层. 即是说我们不区分 X 和层 $\text{Hom}_R(\bullet, X)$. 这样 $X(A)$ 是指 $\text{Hom}_R(\text{Spec}\, A, X)$.

我们将用以下术语. 设 A 为 R 代数. 我们说一组 A 代数 $\{B_i\}_{i\in I}$ 为 fppf 覆盖 A, 如果: (1) I 是有限的, (2) 每一 B_i 是平坦有限展示的 A 代数, 及 (3) $\bigcup_{i\in I} \text{Spec}\, B_i = \text{Spec}\, A$. 在本节我们简写 fppf 覆盖为覆盖. 所以 "B 覆盖 A" 是说 B 是忠实平坦有限展示的 A 代数.

用以上术语. 一个预层 $\mathcal{F}: (\mathfrak{Sch}/S)^o \to \mathfrak{Sets}$ 是 fppf 层的充要条件是:

(1) 对任何有限个 R 代数 B_i, 标准映射 $\mathcal{F}(\prod_i B_i) \to \prod_i \mathcal{F}(B_i)$ 是双射.

(2) 对任何 R 代数 A 及任一忠实平坦有限展示的 A 代数 B, 序列

$$\mathcal{F}(A) \xrightarrow{\mathcal{F}(\varphi)} \mathcal{F}(B) \underset{\mathcal{F}(i_2)}{\overset{\mathcal{F}(i_1)}{\rightrightarrows}} \mathcal{F}(B \otimes_A B)$$

是正合的, 其中 $\varphi : A \to B$ 是 B 作为 A 代数的结构同态, $i_1(b) = b \otimes 1$, $i_2(b) = 1 \otimes b$.

考虑任意范畴 $\mathscr{C}, \mathscr{D}$. 设有函子 $T : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, $S : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$. 可以构造函子 $\mathscr{D}^o \times \mathscr{C} \to \mathfrak{Sets}$: $(B, A) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(SB, A)$. 留意从 $\mathscr{D}$ 内的 $B \to B'$ 和 $\mathscr{C}$ 内的 $A \to A'$, 我们得

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(SB', A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(SB, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(SB, A').$$

同样可造函子 $\mathscr{D}^o \times \mathscr{C} \to \mathfrak{Sets}$: $(B, A) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(B, TA)$. 如果这两个从 $\mathscr{D}^o \times \mathscr{C}$ 到 $\mathfrak{Sets}$ 的函子之间存在函子同构 $\rho_{BA} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(SB, A) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(B, TA)$, 则我们说 S 是 T 的左伴随函子, 而说 T 是 S 的右伴随函子.

以 $\mathscr{P}/S$ 记 $\mathfrak{Sch}/S$ 上的预层 $(\mathfrak{Sch}/S)^o \to \mathfrak{Sets}$ 所组成的范畴. 以 $(\mathscr{F}/S)_{\mathrm{fppf}}$ 记 S 上的 fppf 层, 以 $i : (\mathscr{F}/S)_{\mathrm{fppf}} \to \mathscr{P}/S$ 记包含函子. 则可以证明 i 有左伴随函子 $++ : \mathscr{P}/S \to (\mathscr{F}/S)_{\mathrm{fppf}}$ 使得 $++$ 与有限反向极限交换. 见 [147] IV, 4.3, [11] §3.2. 若 $P \in \mathscr{P}/S$, 则称 P^{++} 为 P 的层化.

设 $\{\mathcal{F}_j\}$ 是 $(\mathcal{F}/S)_{\mathrm{fppf}}$ 的一个**反向族** (inverse family). 则可在 $\mathfrak{Sets}$ 内计算反向极限 $\varprojlim \mathcal{F}_j(T)$, 其中 $T \in \mathfrak{Sch}/S$. 可以证明预层 $\varprojlim i(\mathcal{F}_j) : T \mapsto \varprojlim \mathcal{F}_j(T)$ 是层, 并且可以定义 $(\mathscr{F}/S)_{\mathrm{fppf}}$ 内的反向极限 $\varprojlim \mathcal{F}_j$, 使得 $i(\varprojlim \mathcal{F}_j) = \varprojlim i(\mathcal{F}_j)$.

若有 $(\mathscr{F}/S)_{\mathrm{fppf}}$ 内的**正向族** (direct family) $\{\mathcal{F}_j\}$. 则预层 $\varinjlim i(\mathcal{F}_j) : T \mapsto \varinjlim \mathcal{F}_j(T)$ 不一定是层. 可以证明层化后 $(\varinjlim i(\mathcal{F}_j))^{++}$ 是 $\{\mathcal{F}_j\}$ 的正向极限. 即

$$\varinjlim \mathcal{F}_j = (\varinjlim i(\mathcal{F}_j))^{++}.$$

以上的讨论引出以下的定义.

设 $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ 为层态射 (注意: f 是函子态射). 则有预层态射 $i(f) : i(\mathcal{F}) \to i(\mathcal{G})$. 此时 f 的核 $\mathrm{Ker}\, f$ 是 $i(f)$ 的核 $\mathrm{Ker}\,(i(f))$, 因为 $\mathrm{Ker}\,(i(f))$ 是一个层. 但是 $i(f)$ 的像 $\mathrm{Im}\,(i(f))$ 不一定是层. 所以作为层态射的像必需取 $\mathrm{Im}\, f$ 为 $\mathrm{Im}\,(i(f))^{++}$ (层化 $\mathrm{Im}\,(i(f))$). 当 $\mathrm{Im}\, f = \mathcal{G}$ 时我们说 f 是层满射.

设有概形态射 $f : X \to Y$. 若把 X, Y 看作 fppf 层, 则 f 便定出层态射 $\tilde{f} : X \to Y$. 我们需要找寻一个条件用来决定何时 $\tilde{f}$ 是一个层满射. 可以证明以下的结果.

设 $f:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ 为 fppf 层态射，则 f 为层满射的充要条件是：对任一 R 代数 A 及任意 $\alpha\in\mathcal{G}(A)$ 存在 R 代数 B, fppf 覆盖 A 及 $\beta\in\mathcal{F}(B)$ 使得 $f(\beta)=\alpha_B\in\mathcal{G}(B)$, 在这里 α_B 是指 α 在 $\mathcal{G}(A)\to\mathcal{G}(B)$ 之下的像.

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{F}(B) & & \beta \\ & & \downarrow f & & \downarrow \\ \mathcal{G}(A) & \longrightarrow & \mathcal{G}(B): & \alpha\longrightarrow & \bullet \end{array}$$

利用上面的关于层满射的充要条件不难证明：有限展示忠实平坦的概形态射为 fppf 层满射.

现在我们先来了解层满射的充要条件. 说 $f:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ 是满射是指预层的像的层化 $(\mathrm{Im}(i(f)))^{++}=\mathcal{G}$. 所以我们需要了解预层的层化过程.

我们引入一个条件. 设预层 $\mathcal{G}$ 是预层 $\mathcal{F}$ 的子预层. 如果：对任何 R 代数 C 及任一 $\alpha\in\mathcal{F}(C)$, 存在一组 C 代数 $\{B_i\}_{i\in I}$ 覆盖 C 使得对所有 $i\in I$, α 在 $\mathcal{F}(B_i)$ 内的像 α_{B_i} 属于 $\mathcal{G}(B_i)$. 我们就说 $\mathcal{G}$ 在 $\mathcal{F}$ 内满足条件 ◎.

以上关于层满射的充要条件是由以下条件推出：

设 $\mathrm{in}:\mathcal{G}\to\mathcal{F}$ 为预层的包含态射. 则层化后 $(\mathrm{in})^{++}:\mathcal{G}^{++}\to\mathcal{F}^{++}$ 为同构的充要条件是 $\mathcal{G}$ 在 $\mathcal{F}$ 内满足 ◎.

余下我们假定是使用 fppf 拓扑. 我们将对以上的条件提供证明.

为了了解 $\mathcal{P}^{++}$ 当知道这是运算 $\mathcal{P}\to\mathcal{P}^+$ 操作两次所得的. 因此第一步是了解 $\mathcal{P}^+$：设

$$\mathcal{P}:(\mathfrak{Sch}/R)^o\longrightarrow\mathfrak{Sets}$$

是一个预层. 则预层 $\mathcal{P}^+:(\mathfrak{Sch}/R)^o\to\mathfrak{Sets}$ 是这样的定义：对任一 R 代数 A, 取

$$\mathcal{P}^+(A)=\varinjlim \mathrm{Ker}\left(\prod_i\mathcal{P}(B_i)\rightrightarrows\prod_{i,j}\mathcal{P}(B_i\otimes_A B_j)\right),$$

其中 $\varinjlim$ 是对所有的 $\{B_i\}_{i\in I}$ fppf 覆盖 A 进行的 (见 [11] p.38).

首先我们证明：

$$\mathcal{P}^+(A)=\varinjlim\mathrm{Hom}_{\mathscr{P}}(\mathcal{G},\mathcal{P}),$$

其中我们对 $\tilde{A}$ 内满足条件 ◎ 的子预层 $\mathcal{G}$ 取正向极限.

从定义出发. B_i 的 A 代数结构态射 $A\to B_i$ 给出函子态射 $\tilde{B}_i\xrightarrow{\psi_i}\tilde{A}_i$. 设 $\mathcal{T}$ 为 $\tilde{B}_i$ (在预层范畴 $\mathscr{P}$ 内) 的直和 (I 为有限集). 取态射 $\psi:\mathcal{T}\to\tilde{A}$ 的分量为 ψ_i. 以 $\mathrm{Im}\,\psi$ 记 ψ 在 $\mathscr{P}$ 内的像. 则 ψ 决定态射 $\tilde{\psi}:\mathcal{T}\to\mathrm{Im}\psi$. 在 $\mathscr{P}$ 内有正合序列

$$\mathcal{T}\times_{\tilde{A}}\mathcal{T}\underset{\mathrm{pr}_2}{\overset{\mathrm{pr}_1}{\rightrightarrows}}\mathcal{T}\xrightarrow{\tilde{\psi}}\mathrm{Im}\,\psi.$$

再者 $\mathcal{T} \times_{\tilde{A}} \mathcal{T} = \bigoplus_{i,j} \tilde{B}_i \times_{\tilde{A}} \tilde{B}_j = \bigoplus_{i,j} (B_i \otimes B_j)^{\sim}$. 引用 Yoneda 引理, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{P}}(\mathcal{T}, \mathcal{P}) = \prod_i \mathcal{P}(B_i)$ 对任一预层 $\mathcal{P}$ 成立. 于是有 $\mathfrak{Sets}$ 内正合序列

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{P}}(\mathrm{Im}\,\psi, \mathcal{P}) \longrightarrow \prod_i \mathcal{P}(B_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathcal{P}(B_i \otimes_A B_j),$$

亦即是说：在 $\mathcal{P}^+$ 的定义中的 Ker 可以表达为 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{P}}(\mathrm{Im}\,\psi, \mathcal{P})$. 所以

$$\mathcal{P}^+ = \varinjlim \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}}(\mathrm{Im}\,\psi, \mathcal{P}).$$

在其中我们当把 $\mathrm{Im}\,\psi$ 看作的 $\tilde{A}$ 的子函子. 如此便引起下一步：这个 $\mathrm{Im}\,\psi$ 有什么性质?

我们先证明：

预层 $\tilde{A}$ 的子预层 $\mathcal{G}$ 在 $\tilde{A}$ 内满足条件 ◎ 当且仅当：存在 $\{B_i\}_{i\in I}$ fppf 覆盖 A 使得所有由结构态射 $A \to B_i$ 所决定的态射 $\tilde{B}_i \to \tilde{A}$ 均分解为 $\tilde{B}_i \to \mathcal{G} \to \tilde{A}$.

证明如下：设 $\{B_i\}$ 有以上的性质. 现取任一 R 代数 C 及 $\alpha \in \tilde{A}(C) = \mathrm{Hom}_R(A, C)$. 求 C 的覆盖 $\{C_i\}$ 使得 $\alpha_{C_i} \in \mathcal{G}(C_i)$. 从 $\{B_i\}$ 得 $C_i = C \otimes_A B_i$. 则 C_i 为平坦 C 代数而且 $\{C_i\}$ 覆盖 C. α 在 $\tilde{A}(C_i)$ 的像为 $\alpha_{C_i} : A \xrightarrow{\alpha} C \to C_i$, 但 C_i 是在 A 上取张量积. 因此 α_{C_i} 亦可分解为 $A \xrightarrow{\psi_i} B_i \to C_i$ (这只是说：$\alpha(a) \otimes 1 = 1 \otimes \psi_i(a)$). 如此由 $A \to B_i$ 所决定之态射 $\tilde{B}_i(C_i) \to \tilde{A}(C_i)$ 的像包含 α_{C_i}. 但从 $\{B_i\}$ 的假设性质, 我们便有分解：

$$\begin{array}{ccc} \tilde{B}_i(C_i) & \longrightarrow & \tilde{A}(C_i) \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & \mathcal{G}(C_i) & \end{array}$$

因知 $\alpha_{C_i} \in \mathcal{G}(C_i)$.

反过来, 若 $\mathcal{G}$ 在 $\tilde{A}$ 内满足 ◎, 取 α 为 $\mathrm{Id}_A \in \tilde{A}(A)$, 则按 ◎ 存在 $\{B_i\}$ 覆盖 A, 使得 α 在 $\tilde{A}(B_i)$ 的像 α_{B_i} 是属于 $\mathcal{G}(B_i)$. 但 α_{B_i} 是结构态射 $A \to B_i$, 于是决定态射 $\tilde{B}_i \to \tilde{A}$. 而说 $\alpha_{B_i} \in \mathcal{G}(B_i) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}}(\tilde{B}_i, \mathcal{G})$, 即是有分解：

$$\begin{array}{ccc} \tilde{B}_i & \longrightarrow & \tilde{A} \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & \mathcal{G} & \end{array}$$

证毕.

从以上观察可推出：若 $\mathscr{P}$ 为预层，则

$$\mathscr{P}^+(A) = \varinjlim \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}}(\mathcal{G}, \mathscr{P}),$$

其中我们对 $\tilde{A}$ 内满足条件 ◎ 的子预层 $\mathcal{G}$ 取正向极限. 按此说法可以定义态射 $i_{\mathscr{P}} : \mathscr{P} \to \mathscr{P}^+$ 如下：若 A 为 R 代数. 则取 $i_{\mathscr{P}}(A)$ 为态射

$$\mathscr{P}(A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}}(\tilde{A}, \mathscr{P}) \subset \varinjlim_{\mathcal{G}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}}(\mathcal{G}, \mathscr{P}).$$

可以证明对一预层 $\mathscr{P}$ 进行两次 + 的操作所得的预层 $(\mathscr{P}^+)^+$ 是一个层 ([11] §3.2).

我们证明：$i_{\mathscr{P}^+} : \mathscr{P}^+ \to \mathscr{P}^{++}$ 是单态射. 并且 $\mathscr{P}^+$ 在 $\mathscr{P}^{++}$ 内满足条件 ◎.

对 R 代数 A 有 $i_{\mathscr{P}^+}(A) : \mathscr{P}^+(A) \to \mathscr{P}^{++}(A)$. 说 $i_{\mathscr{P}^+}$ 是单态射是指：若 $v, w \in \mathscr{P}^+(A)$, $i_{\mathscr{P}^+}(v) = i_{\mathscr{P}^+}(w)$, 则 $v = w$. 要作证明, 便要利用 $\mathscr{P}^+(A)$ 的不同表现方式.

首先把 $\mathscr{P}^+(A) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}}(\tilde{A}, \mathscr{P}^+)$. 这样说两个态射 $v, w : \tilde{A} \to \mathscr{P}^+$ 在 $\mathscr{P}^{++}(A)$ 中等同, 就是说在态射

$$i_{\mathscr{P}^+}(A) : \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}}(\tilde{A}, \mathscr{P}^+) \longrightarrow \varinjlim \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}}(\mathcal{G}, \mathscr{P}^+)$$

下的像等同, 即有 $\mathcal{G}$ 及 $v', w' \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}}(\mathcal{G}, \mathscr{P})$ 使得 $i_{\mathscr{P}} \circ v' = v|_{\mathcal{G}}$, $i_{\mathscr{P}} \circ w' = w|_{\mathcal{G}}$ 及 $v|_{\mathcal{G}} = w|_{\mathcal{G}}$. 这里我们用了 $\mathscr{P}^+(A) = \varinjlim \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}}(\mathcal{G}, \mathscr{P})$. 由于 $\mathcal{G}$ 是满足条件 ◎, 故有 $\{B_i\}_{i \in I}$ 覆盖 A 并且有分解：

$$\begin{array}{ccc} \tilde{B}_i & \longrightarrow & \tilde{A} \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & \mathcal{G} & \end{array}$$

现在我们有图：

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{B}_i & \longrightarrow & G & \hookrightarrow & \tilde{A} \\ & \underset{v_i}{\overset{w_i}{\searrow}} & v' \Big\downarrow\Big\downarrow w' & & v \Big\downarrow\Big\downarrow w \\ & & \mathscr{P} & \xrightarrow{i_{\mathscr{P}}} & \mathscr{P}^+ \end{array}$$

从 $i_{\mathscr{P}} \circ v_i = i_{\mathscr{P}} \circ w_i$ 知有 $\tilde{B}_i$ 内满足 ◎ 的子预层 $\mathcal{Z}_i$ 使得 $v_i|_{\mathcal{Z}_i} = w_i|_{\mathcal{Z}_i}$. 设 $\{C_{ij}\}_j$ 覆盖 B_i 使有分解 $\gamma_{ij} : \tilde{C}_{ij} \to \mathcal{Z}_i \to \tilde{B}_i$. 于是 $\gamma_{ij} \circ v_i = \gamma_{ij} \circ w_i$.

因为 $\{C_{ij}\}_{i,j}$ 覆盖 A, 所以 $\tilde{C}_{ij}$ 在 $\tilde{A}$ 的像的并集 $\mathcal{Z}$ 满足条件 ◎. 这时又有 $v'|_{\mathcal{Z}} = w'|_{\mathcal{Z}}$. 把 v, w 看成 $\mathscr{P}^+(A) = \varinjlim \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}}(\mathcal{G}, \mathscr{P})$ 之元. 则 $v|_{\mathcal{Z}} = v'|_{\mathcal{Z}}$ 及 $w|_{\mathcal{Z}} = w'|_{\mathcal{Z}}$. 所以 $v = w$.

我们证明：如果 $i_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}^+$ 是单态射，则 $\mathcal{P}$ 在 $\mathcal{P}^+$ 内满足条件 ◎.

取任意 R 代数 A 及 $\alpha \in \mathcal{P}^+(A)$. 把 $\mathcal{P}^+(A)$ 看作 $\varinjlim \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}}(\mathcal{G}, \mathcal{P})$. 则有 $\tilde{A}$ 内满足 ◎ 的子预层 $\mathcal{G}$ 及 $\alpha' \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}}(\mathcal{G}, \mathcal{P})$, 使得 α' 代表 α. 这时若把 $\mathcal{P}^+(A)$ 看作 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{P}}(\tilde{A}, \mathcal{P}^+)$, α 看作态射 $\tilde{A} \to \mathcal{P}^+$, 则有交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \hookrightarrow & \tilde{A} \\ {\scriptstyle \alpha'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ \mathcal{P} & \xrightarrow{i_{\mathcal{P}}} & \mathcal{P}^+ \end{array}$$

从此看出 $\alpha^{-1}(i_{\mathcal{P}}(\mathcal{P})) \supseteq \mathcal{G}$. 因为 $\mathcal{G}$ 在 $\tilde{A}$ 内满足 ◎, 故此 $\alpha^{-1}(i_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}))$ 在 $\tilde{A}$ 内满足 ◎. 于是存在 $\{B_i\}$ 覆盖 A 使其存有分解：

$$\begin{array}{ccc} \tilde{B}_i & \longrightarrow & \tilde{A} \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & \alpha^{-1}(i_{\mathcal{P}}(\mathcal{P})) & \end{array}$$

结合 $\alpha : \tilde{A} \to \mathcal{P}^+$, 便有

$$\begin{array}{ccc} \tilde{B}_i & \xrightarrow{\alpha_{B_i}} & \mathcal{P}^+ \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & \mathcal{P} & \end{array}$$

亦即是 α 在 $\mathcal{P}^+(B_i)$ 的像 α_{B_i} 属于 $\mathcal{P}(B_i)$. 证毕.

应用以上结果于 $i_{\mathcal{P}^+} : \mathcal{P}^+ \to \mathcal{P}^{++}$ 便得 $\mathcal{P}^+$ 在 $\mathcal{P}^{++}$ 内满足 ◎.

我们可以证明这样的结果：

设预层 $\mathcal{T}$ 有子预层 $\mathcal{P}$. 以 $\mathrm{in} : \mathcal{P} \hookrightarrow \mathcal{T}$ 记包含态射. 则 $\mathcal{P}$ 在 $\mathcal{T}$ 内满足条件 ◎ 当且仅当 $(\mathrm{in})^{++} : \mathcal{P}^{++} \to \mathcal{T}^{++}$ 为同构.

先证明：设有层 $\mathcal{F}$. 若 $\mathcal{P}$ 满足 ◎, 则由 in 所决定之映射：

$$h(\mathrm{in}) : \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}}(\mathcal{T}, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}}(\mathcal{P}, \mathcal{F})$$

为双射. 只要证明：任一 $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{F}$ 可以唯一的扩张至 $\varphi' : \mathcal{T} \to \mathcal{F}$, 即对任一 R 代数 A 及任一 $\alpha \in \mathcal{T}(A)$, 必需定义 $\varphi'_A(\alpha) \in \mathcal{F}(A)$. 由假设 $\mathcal{P}$ 在 $\mathcal{T}$ 内满足 ◎, 故

有 $\{B_i\}_{i\in I}$ 覆盖 A 使得 $\alpha_{B_i}:\mathcal{P}(B_i)$. 考虑图表:

$$\begin{array}{ccccc} & & \prod_i \mathcal{P}(B_i) & \overset{v'}{\underset{w'}{\rightrightarrows}} & \prod_{i,j}\mathcal{P}(B_i\otimes_A B_j) \\ & & \downarrow{\scriptstyle \prod_i \varphi(B_i)} & & \downarrow{\scriptstyle \prod_{i,j}\varphi(B_i\otimes_A B_j)} \\ \mathcal{F}(A) & \xrightarrow{u} & \prod_i \mathcal{F}(B_i) & \overset{v'}{\underset{w'}{\rightrightarrows}} & \prod_{i,j}\mathcal{F}(B_i\otimes_A B_j) \end{array}$$

下一行正合是因 $\mathcal{F}$ 是层. 在上行有

$$(\alpha_{B_i})_{B_i\otimes_A B_j}=\alpha_{B_i\otimes_A B_j}=(\alpha_{B_j})_{B_i\otimes_A B_j},$$

于是 v,w 在 $\prod\mathcal{F}(B_i)$ 的子集 $\{(\varphi(\alpha_{B_i}))_{i\in I}\}$ 上等值. 故存在唯一 $\alpha'\in\mathcal{F}(A)$. 取 $\varphi'_A(\alpha)=\alpha'$.

现在证明: 若预层 $\mathcal{P}$ 在预层 $\mathcal{T}$ 内满足 ◎, 则包含态射诱导出同构 $\mathcal{P}^{++}\to\mathcal{T}^{++}$. 事实上因为层化函子 ++ 是 $\mathscr{F}\to\mathscr{P}$ 的左伴随函子, 即是说有同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{F}}(\mathcal{P}^{++},\mathcal{F})\cong\mathrm{Hom}_{\mathscr{P}}(\mathcal{P},\mathcal{F}),$$

其中 $\mathcal{P}$ 为预层, $\mathcal{F}$ 为层, 利用上段结果构造交换图:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathscr{F}}(\mathcal{T}^{++},\mathcal{F}) & \cong & \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}}(\mathcal{T},\mathcal{F}) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h(\mathrm{in})} \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{F}}(\mathcal{P}^{++},\mathcal{F}) & \cong & \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}}(\mathcal{P},\mathcal{F}) \end{array}$$

其中右直下箭头为双射. 故知左边箭头亦为双射. 因 $\mathcal{F}$ 是任意的层. 所以得出 $\mathcal{P}^{++}$ 与 $\mathcal{T}^{++}$ 同构.

反过来, 现设 $\mathcal{P}^{++}$ 与 $\mathcal{T}^{++}$ 同构, 将证子预层 $\mathcal{P}$ 在 $\mathcal{T}$ 内满足条件 ◎. 考虑以下图表:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P}^{+} & \xrightarrow{i_{\mathcal{P}^+}} & \mathcal{P}^{++} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{T} & \longrightarrow & \mathcal{T}^{+} & \longrightarrow & \mathcal{T}^{++} \end{array}$$

前面已证明 $i_{\mathcal{P}^+}$ 是单射并且透过 $i_{\mathcal{P}^+}$ 把 $\mathcal{P}^+$ 看作 $\mathcal{P}^{++}$ 的子预层时, $\mathcal{P}^+$ 在 $\mathcal{P}^{++}$ 内满足条件 ◎. 据假设 $\mathcal{P}^{++}$ 与 $\mathcal{T}^{++}$ 同构. 把 $\mathcal{P}^+$ 看在 $\mathcal{T}^{++}$ 内. 设 $\mathcal{P}_1$ 为 $\mathcal{P}^+$ 在 $\mathcal{T}$ 内

之逆像. 我们断言 $\mathcal{P}$ 在 $\mathcal{P}_1$ 内满足 ◎. 为证此, 取 R 代数 A 及 $\alpha \in \mathcal{P}_1(A)$. 以 ξ 记 α 在 $\mathcal{P}^+(A)$ 的像. 按 $\mathcal{P}^+(A) = \varinjlim \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}}(\mathcal{G}, \mathcal{P})$, 取 $\eta \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}}(\mathcal{G}, \mathcal{P})$ 代表 ξ, 其中 $\mathcal{G}$ 在 $\tilde{A}$ 内满足 ◎. 把以上资料放在下图中:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \hookrightarrow & \tilde{A} \\ \downarrow{\scriptstyle \eta} & & \downarrow{\scriptstyle \xi} \\ \mathcal{P} & \xrightarrow{i_{\mathcal{P}}} & \mathcal{P}^+ \end{array}$$

我们把 ξ 看作 $\mathcal{P}^+(A) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}}(\tilde{A}, \mathcal{P}^+)$ 的元. 从此图看出 $\xi^{-1}(\mathcal{P}) \supseteq \mathcal{G}$, 而 $\mathcal{G}$ 在 $\tilde{A}$ 内满足 ◎. 所以 $\alpha^{-1}(\mathcal{P})$ 在 $\tilde{A}$ 满足 ◎. 按前面关于 $\tilde{A}$ 满足 ◎ 的子预层的讨论. 这就说有 $\{B_i\}$ 覆盖 A, 使得有分解:

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{B}_i & \longrightarrow & \tilde{A} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{P}_1 \\ & \searrow & \nearrow & & \\ & & \alpha^{-1}(\mathcal{P}) & & \end{array}$$

于是有分解:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{B}_i & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{P}_1 \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & \mathcal{P} & \end{array}$$

这就证明了 $\mathcal{P}$ 在 $\mathcal{P}_1$ 内满足 ◎.

现在总结: 假设 $\mathcal{P}^{++}$ 与 $\mathcal{T}^{++}$ 同构. $\mathcal{P}^+$ 在 $\mathcal{P}^{++}$ 内满足 ◎. 故 $\mathcal{P}^+$ 在 $\mathcal{T}^{++}$ 内满足 ◎. 作为逆像, 所以 $\mathcal{P}_1$ 在 $\mathcal{T}$ 内满足 ◎. 而已证 $\mathcal{P}$ 在 $\mathcal{P}_1$ 内满足 ◎, 因此, $\mathcal{P}$ 在 $\mathcal{T}$ 内满足 ◎.

作为推论可得:

设 $f: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ 为层态射. 则 f 为层满射的充要条件是: 对任一 R 代数 A 及任意 $\alpha \in \mathcal{G}(A)$, 存在代数 B 覆盖 A 及 $\beta \in \mathcal{F}(B)$ 使得 $f(\beta) = \alpha_B \in \mathcal{G}(B)$. 这里 α_B 是指 α 在 $\mathcal{G}(A) \to \mathcal{G}(B)$ 下之像.

把 f 看作预层态射时之像记为 $\mathrm{Im}\, f$. 则 f 为层满射是指 $(\mathrm{Im}\, f)^{++} = \mathcal{G}$. 按以上讨论, 这就等价于要求预层 $\mathrm{Im}\, f$ 在 $\mathcal{G}$ 内满足条件 ◎.

按 ◎, 已给 A 及 α, 存在 $\{B_i\}_{i\in I}$ 覆盖 A 及 $\beta_i \in \mathcal{F}(B_i)$ 使得 $f(\beta_i) = \alpha_{B_i}$. 所以若设 f 为层满射, 便取 $B = \prod B_i$ 及 β 等于 (β_i) 在同构 $\mathcal{F}(B) \xrightarrow{\sim} \prod \mathcal{F}(B_i)$ 下之逆像. 反过来, 存在 B 及 β 立得 f 是层满射.

进一步, 当我们把概形看作 fppf 层的时候, 便有以下推论.

设 $f: X \to Y$ 是概形态射. 则以下两条件等价:

(1) 把 X, Y 看作 fppf 层时所诱导出的层态射 $\tilde{f}$ 是层满射.

(2) 对任意点 $y \in Y$ 存在开邻域 $U(y) \overset{i}{\hookrightarrow} Y$, 有限展示忠实平坦的态射 $q(y): V(y) \to U(y)$ 及态射 $s(y): V(y) \to X$, 使得 $fs(y) = iq(y)$.

先证 (1) $\Rightarrow$ (2). 取 $U(y)$ 为 y 的开仿射邻域 $\operatorname{Spec} A$, A 为 R 代数. 包含态射 $i: U(y) = \operatorname{Spec} A \hookrightarrow Y$ 属于 $\operatorname{Hom}(\operatorname{Spec} A, Y) = Y(A)$. 由假设 $\tilde{f}$ 是层满射, 按前段推论, 知有代数 B 覆盖 A 及 $\beta \in X(B) = \operatorname{Hom}(\operatorname{Spec} B, X)$ 使 $\tilde{f}(\beta) = i_B$. 取 $V = \operatorname{Spec} B$, q 为结构同态 $A \to B$ 所决定的概形态射 $V \to U$. 则有

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\beta} & X \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ U & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

这就是 (2) 所求.

现证 (2) $\Rightarrow$ (1). 首先我们可以缩小 $U(y)$. 又可以把 V 换为它的有限个元的仿射覆盖. 然后再取这仿射覆盖的仿射概形的直和. 如此做法便可假设 $U(y)$ 及 V 均为仿射概形. 设 $U(y) = \operatorname{Spec} A(y)$, $V = \operatorname{Spec} A'(y)$.

为了证明 $\tilde{f}$ 是层满射, 我们需要证明: 对 R 代数 A 及 $\alpha \in Y(A)$, 存在 B 覆盖 A, $\beta \in X(B)$, 使 $\tilde{f}(\beta) = \alpha_B$.

取 $\operatorname{Spec} A$ 的覆盖 $\operatorname{Spec} A_{f_i}$ $(i = 1, \cdots, n)$ 使得 $\alpha \in Y(A) = \operatorname{Hom}(\operatorname{Spec} A, Y)$ 把每一 $\operatorname{Spec} A_{f_i}$ 影作形如 $U(y_i)$ 的开子集. 由假设 (2) 有交换图:

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{Spec}(A_{f_i} \otimes_{A(y_i)} A'(y_i)) & \longrightarrow & \operatorname{Spec} A'(y_i) & \xrightarrow{s(y_i)} & X \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q(y_i)} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \operatorname{Spec} A_{f_i} & \xrightarrow{\alpha} & \operatorname{Spec} A(y_i) & \hookrightarrow & Y \end{array}$$

(上方箭头 β_i: $\operatorname{Spec}(A_{f_i} \otimes_{A(y_i)} A'(y_i)) \to X$)

设 $B = \prod_i (A_{f_i} \otimes_{A(y_i)} A'(y_i))$ 及 $\beta = (\beta_i) \in X(B) = \prod_i X(A_{f_i} \otimes_{A(y_i)} A'(y_i))$. 则有

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} B & \xrightarrow{\beta} & X \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \operatorname{Spec} A & \xrightarrow{\alpha} & Y \end{array}$$

命题 B.2.1 设 $f : X \to Y$ 为有限展示忠实平坦的概形态射. 则 f 所决定的层态射 $\tilde{f} : X \to Y$ 为层满射.

证明 对每一 $y \in Y$, 取开仿射邻域 $U(y)$.

存在有限个开仿射 $V_1, \cdots, V_n$ 在 $f^{-1}(U(y))$ 内使得 $\{f(V_i)\}$ 覆盖 $U(y)$. 以 $V'(y)$ 为概形 $V_1, \cdots, V_n$ 的直和. 以 $s(y) : V'(y) \to X$ 记 $V_i \hookrightarrow X$ 所定之态射. 如此便得

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ U & \longrightarrow & Y \end{array}$$

所需结论从前段等价关系得出.

B.3 Abel 范畴的上同调

称范畴 $\mathscr{C}$ 为**加性范畴** (additive category) 如果以下条件成立:

(1) 若 $A, B \in \operatorname{Obj} \mathscr{C}$, 则 $\mathscr{C}$ 内有直积 $A \prod B$ 和直和 $A \amalg B$.

(2) 若 $A, B \in \operatorname{Obj} \mathscr{C}$, 则 $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ 有交换群结构, 并且合成态射

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) \times \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(B, C) &\longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A, C) \\ (f, g) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

是双线性. 我们以 0 记交换群 $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ 对加法的单位元.

(3) $\mathscr{C}$ 有零对象 Z, 即 Z 的恒等态射 1_Z 是 0.

如果加性范畴 $\mathscr{C}$ 还满足以下两个条件:

Ab1. $\mathscr{C}$ 的任一态射 u 必有核 $\operatorname{Ker} u$ 和余核 $\operatorname{Coker} u$.

Ab2. 从 $\mathscr{C}$ 的态射 u 必得同构 $\tilde{u} : \operatorname{Coim} u \to \operatorname{Im} u$, 其中 $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker}(\operatorname{Coker} u)$ 和 $\operatorname{Coim} u = \operatorname{Coker}(\operatorname{Ker} u)$.

则称 $\mathscr{C}$ 为 Abel 范畴.

设 $\mathscr{A}$ 为 Abel 范畴. $\mathscr{A}$ 的一个**上链复形** (cochain complex) 是指 $\mathscr{A}$ 的一组对象 $X^\bullet = (X^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ 并设有态射 $\mathrm{d}_X^n : X^n \to X^{n+1}$ 使得对 $n \in \mathbb{Z}$ 有 $\mathrm{d}_X^{n+1} \circ \mathrm{d}_X^n = 0$. 一个复形态射 $f : X^\bullet \to Y^\bullet$ 是一组 $\mathscr{A}$ 的态射 $f^n : X^n \to Y^n$ 满足条件 $f^{n+1} \mathrm{d}_X^n = \mathrm{d}_Y^n f^n$.

我们定义复形 $X^\bullet$ 的 n 次上同调为

$$H^n(X^\bullet) := \operatorname{Coker}(\operatorname{Im}(\mathrm{d}_X^{n-1}) \longrightarrow \operatorname{Ker}(\mathrm{d}_X^n)).$$

设 $f: A^\bullet \to B^\bullet$ 是复形态射, 则 f 诱导自然态射 $H^n(f): H^n(A^\bullet) \to H^n(B^\bullet)$. 如果有正合序列

$$0 \longrightarrow A^\bullet \longrightarrow B^\bullet \longrightarrow C^\bullet \longrightarrow 0,$$

则有自然态射 $\delta^n: H^n(C^\bullet) \to H^{n+1}(A^\bullet)$ 使得长正合序列

$$\cdots \to H^n(A^\bullet) \to H^n(B^\bullet) \to H^n(C^\bullet) \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(A^\bullet) \to H^{n+1}(B^\bullet) \to \cdots$$

这些结果的证明如平常的同调代数一样亦是以下的蛇引理:

设 $\mathscr{C}$ 内有行为正合的交换图

$$\begin{array}{ccccccc} & & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & & \end{array}$$

则有正合序列

$$0 \to \operatorname{Ker}\alpha \to \operatorname{Ker}\beta \to \operatorname{Ker}\gamma \to \operatorname{Coker}\alpha \to \operatorname{Coker}\beta \to \operatorname{Coker}\gamma \to 0$$

B.4　内 射 分 解

常用的适应类是内射 (或投射) 对象. 我们只讨论内射情形.

我们称 Abel 范畴 $\mathscr{A}$ 的对象 I 为内射如果以下条件成立: 给出 $\mathscr{A}$ 内单态射 $0 \to A \xrightarrow{f} B$ 及态射 $\alpha: A \to I$, 则存在态射 $\beta: B \to I$ 使得 $\alpha = \beta \circ f$.

我们说 $\mathscr{A}$ 有**足够内射对象** (enough injectives), 如果对每个 $A \in \operatorname{Obj}\mathscr{A}$, 存在内射对象 I 及单态射 $0 \to A \to I$.

设 $X \in \operatorname{Obj}\mathscr{A}$. X 的一个内射分解是指一个复形 $I^\bullet \in C(\mathscr{A})$ 满足条件: 若 $i < 0$, 则 $I^i = 0$, 所有 I^i 均为内射对象, 及有态射 $X \to I^0$ 使得有正合序列

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow I^0 \xrightarrow{d_I^0} I^1 \xrightarrow{d_I^1} I^2 \xrightarrow{d_I^2} \cdots$$

若 $\mathscr{A}$ 有足够内射对象, 则 $\mathscr{A}$ 的任一对象均有内射分解.

定义 B.4.1　设 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 为 Abel 范畴, 一个由 $\mathscr{A}$ 到 $\mathscr{B}$ 的 δ 函子是指一组函子 $T = (T^0)_{n\geqslant 0}$ 及对每一个正合序列 $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ 有一组态射 $\delta^n: T^n(A'') \to T^{n+1}(A')$, 满足条件:

(1)

$$\begin{aligned} 0 \to & T^0(A') \to T^0(A) \to T^0(A'') \xrightarrow{\delta^0} T^1(A') \to \cdots \\ & \cdots \to T^n(A') \to T^n(A) \to T^n(A'') \xrightarrow{\delta^n} T^{n+1}(A') \to \cdots \end{aligned}$$

是正合序列.

(2) 若

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

交换, 则

$$\begin{array}{ccc} T^n(A'') & \xrightarrow{\delta^n} & T^{n+1}(A') \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^n(B'') & \xrightarrow{\delta^n} & T^{n+1}(B') \end{array}$$

亦交换.

定义 B.4.2 设 $T : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 是 δ 函子, 若对任一 δ 函子 $S : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 及任一自然变换 $f^0 : T^0 \to S^0$, 存在唯一的 $f^n : T^n \to S^n$ $(n \geqslant 1)$, 对任一正合序列 $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$,

$$\begin{array}{ccc} T^n(A'') & \xrightarrow{\delta^n} & T^{n+1}(A') \\ {\scriptstyle f^n_{A''}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^{n+1}_{A'}} \\ T^n(B'') & \xrightarrow{\delta^n} & T^{n+1}(B') \end{array}$$

为交换图, 则称 T 为泛 δ 函子 (universal δ-functor).

定义 B.4.3 称加性函子 $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 为**可抹的** (effaceable), 若对 $A \in \mathrm{Obj}\,\mathscr{A}$ 存在单态射 $0 \to A \xrightarrow{u} M$, 使 $F(u) = 0$.

引理 B.4.1 设 Abel 范畴 $\mathscr{A}$ 有足够内射对象. 函子 $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 是可抹的当且仅当对 $\mathscr{A}$ 内任一内射对象 M 均有 $F(M) = 0$.

证明 设 $\mathscr{F}$ 可抹的, M 是内射, 则有单射 $0 \to M \xrightarrow{u} N$, 并且 $F(u) = 0$. 因为 M 是内射故有 $N \xrightarrow{v} M$ 使得 $vu = 1_M$. 于是 $1_{F(M)} = F(1_M) = F(v)F(u) = 0$. 从此得 $F(M) = 0$.

反之, 取对象 A. 则有内射对象 I 及单射 $0 \to A \xrightarrow{u} I$. 于是 $F(A) \xrightarrow{F(u)} F(I) = 0$. 即 $F(u) = 0$.

命题 B.4.2　设 Abel 范畴 $\mathscr{A}$ 有足够内射现像. δ 函子 (T^n) 满足条件: 对任意内射对象 Q 和 $i \geqslant 1$ 均有 $T^i(Q)=0$ 当且仅当 (T^n) 为泛 δ 函子.

证明　设有 δ 函子 (S^n) 及自然变换 $\varphi : T^0 \to S^0$. 设 $\psi^0=\varphi$, 定义 ψ^1 如下：取 $\mathscr{A}$ 对象 A, 则有单射 $A \xrightarrow{u} Q$, 即有正合序列：

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} Q \longrightarrow C \longrightarrow 0 \tag{B.1}$$

其中 Q 为内射对象, C 为 $\operatorname{Coker} u$. 由于 $T^1(Q)=0$，故有 $\psi^1_Q(A) : T^1(A) \to S^1(A)$ 使下图交换：

$$\begin{array}{ccccccc}
T^0(Q) & \longrightarrow & T^0(C) & \xrightarrow{\delta^0_E} & T^1(A) & \longrightarrow & 0 \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \varphi(Q)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \varphi(C)} & & \vdots{\scriptstyle \psi^1_Q(A)} & & \\
S^0(Q) & \longrightarrow & S^0(C) & \xrightarrow{\delta^0_E} & S^1(A) & &
\end{array}$$

其中 δ^0_E 是用正合序列 (B.1) 造成的. 我们需要证明 $\psi^1_Q(A)$ 是与 Q 无关. 为此另取正合序列：

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow Q_1 \longrightarrow C_1 \longrightarrow 0, \tag{B.2}$$

则有 $\alpha : Q \to Q_1$, $\beta : C \to C_1$ 使下图交换

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle 1_A} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \beta} & & \\
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & Q_1 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

因为 $T^0(C) \xrightarrow{\delta^0_E} T^1(A)$ 是满射, 所以从 $\psi^1_Q(A)\delta^0_E = \psi^1_{Q_1}(A)\delta^0_E$ 便得 $\psi^1_Q(A) = \psi^1_{Q_1}(A)$. 为此考虑交换图：

$$\begin{array}{ccc}
T^0(C) & \xrightarrow{\delta^0_E} & T^1(A) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle T^0(\beta)} & \nearrow{\scriptstyle \delta^0_{E_1}} & \\
T^0(C_1) & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
S^0(C) & \xrightarrow{\delta^0_E} & S^1(A) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle S^0(\beta)} & \nearrow{\scriptstyle \delta^0_{E_1}} & \\
S^0(C_1) & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
T^0(C) & \xrightarrow{\varphi(C)} & S^0(C) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle T^0(\beta)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle S^0(\beta)} \\
T^0(C_1) & \xrightarrow{\varphi(C_1)} & S^0(C_1)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
T^0(C_1) & \xrightarrow{\delta^0_{E_1}} & T^1(A) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \varphi(C_1)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \psi^1_{Q_1}(A)} \\
S^0(C_1) & \xrightarrow{\delta^0_{E_1}} & S^1(A)
\end{array}$$

于是有

$$\psi^1_Q(A)\delta^0_E = \delta^0_E\varphi(C) = \delta^0_{E_1}S^0(\beta)\varphi(C) = \delta^0_{E_1}\varphi(C_1)T^0(\beta)$$
$$= \psi^1_{Q_1}(A)\delta^0_{E_1}T^0(\beta) = \psi^1_{Q_1}(A)\delta^0_E.$$

从现在开始我们可以把 $\psi^1_Q(A)$ 记为 $\psi^1(A)$ (因为它的定义与 Q 无关). 我们需要证明如此得来的 ψ^1 是自然变换：取态射 $A \xrightarrow{u} B$, 我们需要证明

$$\begin{array}{ccc} T^1(A) & \xrightarrow{T^1(u)} & T^1(B) \\ \downarrow{\scriptstyle \psi^1(A)} & & \downarrow{\scriptstyle \psi^1(B)} \\ S^1(A) & \xrightarrow{S^1(u)} & S^1(B) \end{array}$$

是交换. 取内射对象 Q, Q_1 使得

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle u} & & & & & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & Q_1 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

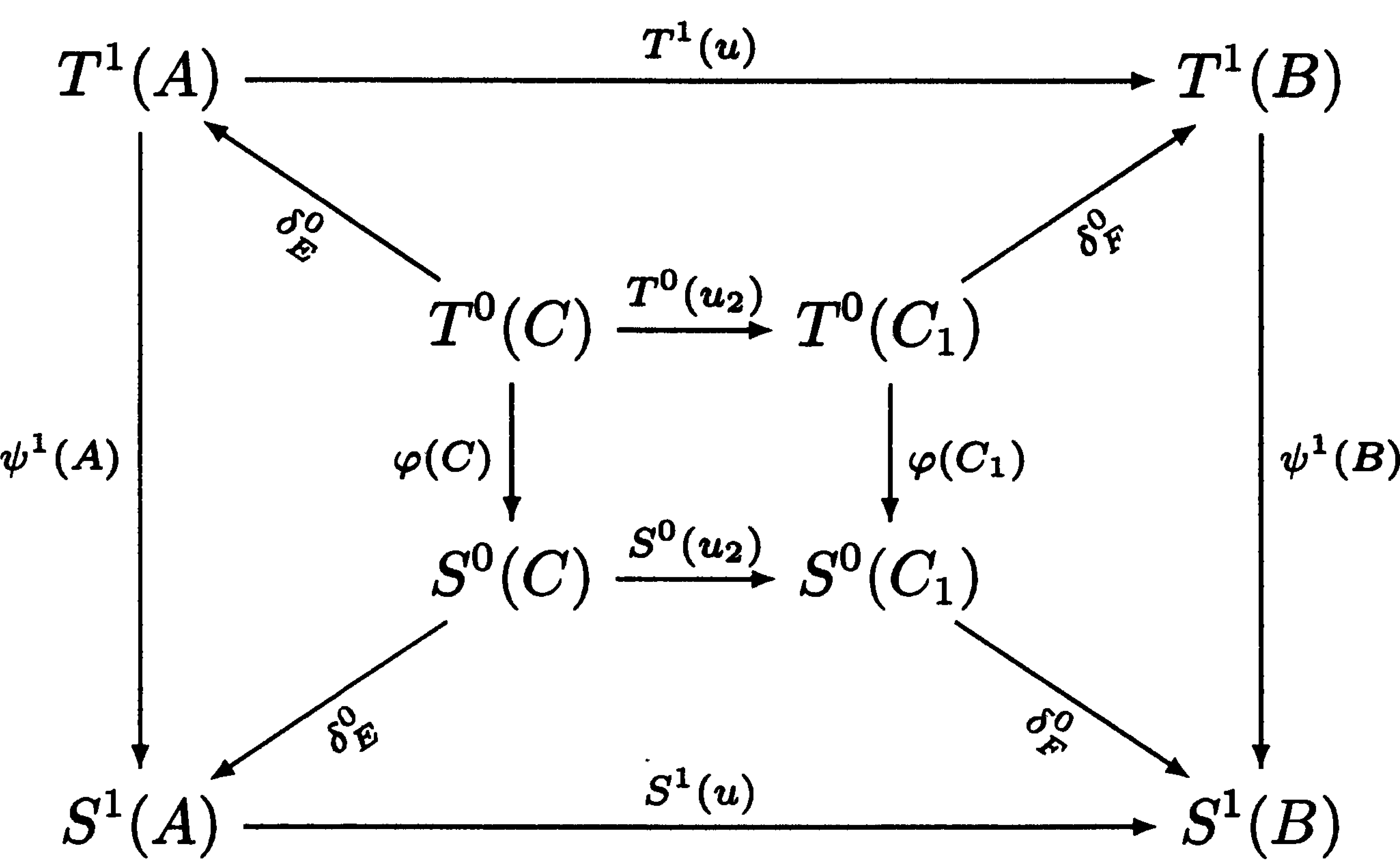
由于 Q_1 是内射对象, 故有 u_1 使下图交换.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & Q \\ & & & \searrow^{u} & \vdots{\scriptstyle u_1} \\ & & & B & \\ & & & \searrow & \downarrow \\ & & & & Q_1 \end{array}$$

故此得到交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle u_1} & & \downarrow{\scriptstyle u_2} & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & Q_1 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

考虑交换图:



因为 δ_E^0 是满射 (有右逆元), 所以只要证明:

$$\psi^1(B)T^1(u)\delta_E^0 = S^1(u)\psi^1(A)\delta_E^0.$$

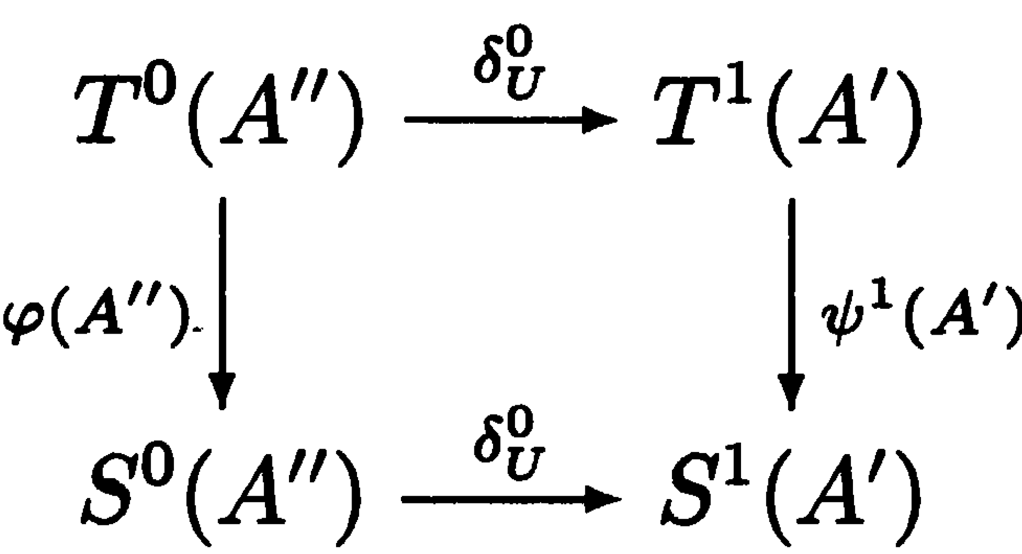
证明如下:

$$\psi^1(B)T^1(u)\delta_E^0 = \psi^1(B)\delta_F^0 T^0(u_2) = \delta_F^0\varphi(C_1)T^0(u_2)$$
$$= \delta_F^0 S^0(u_2)\varphi(C) = S^1(u)\delta_E^0\varphi(C) = S^1(u)\varphi^1(A)\delta_E^0.$$

余下证明: 如有正合序列:

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

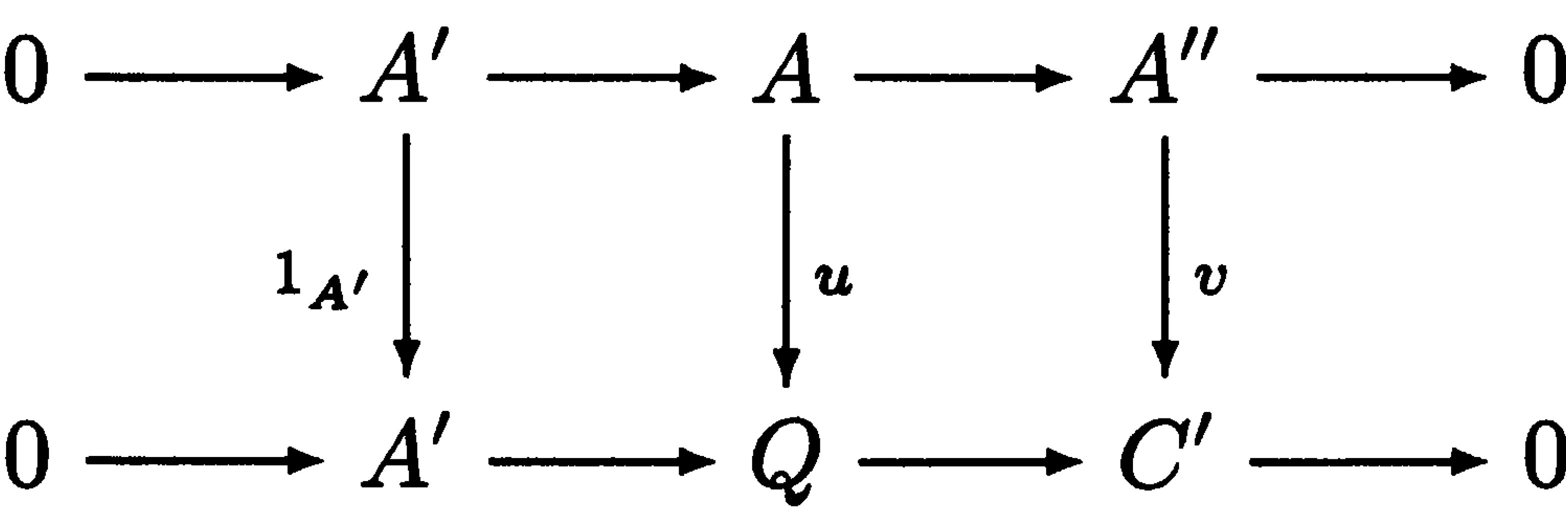
则有交换图



为此考虑正合序列:

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow Q \longrightarrow C' \longrightarrow 0$$

其中 Q 为内射对象. 则有交换图:



利用交换图

$$
\begin{array}{ccc}
T^0(A'') & \xrightarrow{\delta_U^0} & T^1(A') \\
{\scriptstyle T^0(v)}\downarrow & \nearrow{\scriptstyle \delta_V^0} & \\
T^0(C') & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
S^0(A'') & \xrightarrow{\delta_U^0} & S^1(A') \\
{\scriptstyle S^0(v)}\downarrow & \nearrow{\scriptstyle \delta_V^0} & \\
S^0(C') & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
T^0(C') & \xrightarrow{\delta_V^0} & T^1(A') \\
{\scriptstyle \varphi(C')}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi^1(A')} \\
S^0(C') & \xrightarrow{\delta_V^0} & S^1(A')
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
T^0(A'') & \xrightarrow{T^0(v)} & T^0(C') \\
{\scriptstyle \varphi(A'')}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi(C')} \\
S^0(A'') & \xrightarrow{S^0(v)} & S^0(C')
\end{array}
$$

则有

$$
\begin{aligned}
\psi^1(A)\delta_U^0 &= \psi^1(A')\delta_V^0 T^0(v) = \delta_V^0\varphi(C')T^0(v) \\
&= \delta_V^0 S^0(v)\varphi(A'') = \delta_U^0\varphi(A'')
\end{aligned}
$$

正是所需.

到目前为止我们从 $\psi^0 = \varphi$ 出发得到 ψ^1. 显然我们可以重复上面的讨论从 ψ^1 得 ψ^2 等.

反过来部分的证明我们留给读者.

引理 B.4.3(马蹄引理 (Horse shoe lemma)) 设有 Abel 范畴 $\mathscr{A}$ 内交换图:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & 0 & & & & & & & & \\
 & & \downarrow & & & & & & & & \\
0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\varepsilon'} & I'^0 & \longrightarrow & I'^1 & \longrightarrow & I'^2 & \longrightarrow & \cdots \\
 & & {\scriptstyle \iota_A}\downarrow & & & & & & & & \\
 & & A & & & & & & & & \\
 & & {\scriptstyle \pi_A}\downarrow & & & & & & & & \\
0 & \longrightarrow & A'' & \xrightarrow{\varepsilon''} & I''^0 & \longrightarrow & I''^1 & \longrightarrow & I''^2 & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & & & & & & & \\
 & & 0 & & & & & & & &
\end{array}
$$

其中两行是内射分解，列为正合. 设 $I^n = I'^n \Pi I''^n$ 是直积，则得内射分解 $0 \to A \xrightarrow{\varepsilon} I^\bullet$，并有复形正合序列：

$$0 \longrightarrow I' \longrightarrow I \longrightarrow I'' \longrightarrow 0$$

及交换图：

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\varepsilon'} & I' \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & I \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & A'' & \xrightarrow{\varepsilon''} & I''
\end{array}$$

证明　由于 I'^0 是内射的，故有 $A \xrightarrow{j} I'^0$ 使

$$\begin{array}{ccc}
A' & \longrightarrow & I'^0 \\
\downarrow & \nearrow_{j} & \\
A & &
\end{array}$$

交换. 从 j 及 $\varepsilon''\pi_A$，按直积定义得 $\varepsilon : A \to I^0$. 如此则下图交换：

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\varepsilon'} & I'^0 & \longrightarrow & \text{Coker } \varepsilon' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & A & \xrightarrow{\varepsilon} & I^0 & \longrightarrow & \text{Coker } \varepsilon & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A'' & \xrightarrow{\varepsilon''} & I''^0 & \longrightarrow & \text{Coker } \varepsilon'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

左边两列由已知和构造是正合序列. 从蛇引理知右边一列是正合，并且 $\text{Ker } \varepsilon = 0$. 这样我们便得到了下图：

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Coker}\ \varepsilon' & \longrightarrow & I'^1 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & & & \\ & & \mathrm{Coker}\ \varepsilon & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Coker}\ \varepsilon'' & \longrightarrow & I''^1 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$$

也就是说我们回到起步点. 我们可以重复前面的步骤完成证明.

设 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 为 Abel 范畴, $F:\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ 为左正合加性函子. F 的右导函子是指泛 δ 函子 $T=(T^n)$ 使得 $T^0=F$. 如果 T 存在则除自然同构外 T 是唯一的. 我们以 R^nT 记 T^n.

定理 B.4.4 *设 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 为 Abel 范畴, 并且 $\mathscr{A}$ 有足够内射对象. 则任一左正合加性函子 $F:\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ 均有右导函子.*

证明 我们先从 F 构造函子 R^nF. 证明这 (R^nF) 是 δ 函子. 然后再证它是泛 δ 函子.

对每个 $\mathscr{A}$ 内的对象 A 选定内射分解 $0\to A\xrightarrow{\varepsilon}I^\bullet$. 然后设

$$R^nF(A)=H^n(FI^\bullet).$$

我们需要证明 R^nF 与内射分解 $0\to A\xrightarrow{\varepsilon}I$ 的选取无关. 即是: 如果又有内射分解 $0\to A\xrightarrow{\eta}J$, 则有自然同构 $H^n(FI)\to H^n(FJ)$. 事实上

利用比较引理得复形映射 $f:J\to I$ 使下图交换:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\ \eta\ } & J \\ {\scriptstyle \mathrm{id}_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ A & \xrightarrow{\ \varepsilon\ } & I \end{array}$$

于是有映射 $f^*:H^nFJ\to H^nFI$. 同样亦有映射 $g:I\to J$ 使下图交换:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\ \varepsilon\ } & I \\ {\scriptstyle \mathrm{id}_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ A & \longrightarrow & J \end{array}$$

于是有映射 $g^*: H^nFI \to H^nFJ$. 从此推出 $g_*f_* = \mathrm{id}$, $f_*g_* = \mathrm{id}$. 所以 R^nF 是函子.

现在开始证明 $(R^nF)_{n\geqslant 0}$ 是 δ 函子.

首先, 因为 $0 \to F(A) \to F(I^0) \to F(I^1)$ 是正合. 所以 $R^0F(A) = F(A)$, 即 $R^0F = F$.

其次, 设有正合序列

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

由选定的内射分解 $0 \to A \xrightarrow{\varepsilon'} I'$, $0 \to A \xrightarrow{\varepsilon''} I''$. 用马蹄引理扩展为

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\varepsilon'} & I' \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\varepsilon} & I \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A'' & \xrightarrow{\varepsilon''} & I'' \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 \end{array}$$

其中 $0 \to A \xrightarrow{\varepsilon} I$ 为 A 的一个内射分解. 由于 $R^nF(A)$ 的计算与内射分解的选取无关. 我们可以用这个内射分解代替原来选定的. 由于 I'^n 内射, 所以

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I'^n & \longrightarrow & I^n & \longrightarrow & I''^n & \longrightarrow & 0 \\ & & & \searrow\!\!\!\searrow & \vdots & & & & \\ & & & & I'^n & & & & \end{array}$$

即有分列正合序列. 因为 F 是加性函子, 所以

$$0 \longrightarrow F(I'^n) \rightleftarrows F(I^n) \longrightarrow F(I''^n) \longrightarrow 0$$

是分裂正合序列 ([69] II.1, Prop. 1.1). 所以

$$0 \longrightarrow F(I') \longrightarrow F(I) \longrightarrow F(I'') \longrightarrow 0$$

是复形正合序列. 于是得长正合序列

$$\cdots \longrightarrow R^nF(A') \longrightarrow R^nF(A) \longrightarrow R^nF(A'') \xrightarrow{\delta^n} R^{n+1}F(A') \longrightarrow$$

最后我们说：δ 是自然映射, 即是：设已给交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle f'} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f''} & & \\ 0 & \longrightarrow & B' & \xrightarrow[i_B]{} & B & \xrightarrow[\pi_B]{} & B'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

则有交换图：

$$\begin{array}{ccc} R^nF(A'') & \xrightarrow{\delta^n} & R^{n+1}F(A') \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ R^nF(B'') & \xrightarrow{\delta^n} & R^{n+1}F(B') \end{array}$$

证明留给读者.

如果 Q 是内射对象. 则正合序列

$$0 \longrightarrow Q \xrightarrow{1_Q} Q \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

是 Q 的内射分解. 因此, $R^iF(Q) = 0$ 对 $i \geqslant 1$. 我们已证明了 $(R^nF)_{n\geqslant 0}$ 是 δ 函子. 所以按前面命题得知 $(R^nF)_{n\geqslant 0}$ 是泛 δ 函子. □

B.5 位形的上同调

我们讲述上同调计算的主要定理. 我们将讨论以下三个问题：(1) 预层的 Čech 上同调, (2) 交换层的上同调, (3) 高次直像的计算.

(1) 已给 Grothendieck 拓扑 $\mathscr{T} = (\mathrm{Cat}\, T, \mathrm{Cov}\, T)$. 以 $\mathscr{P}$ 记定义在 Cat T 上的交换预层所组成的范畴. 则 $\mathscr{P}$ 为有足够内射对象的交换范畴. 因此可以对左正合函子求右导函子.

如果, $\mathfrak{A} = \{U_i \to U\}_{i\in I} \in \mathrm{Cov}\, T$, $\mathcal{F} \in \mathscr{P}$, 则设

$$H^0(\mathfrak{A}, \mathcal{F}) = \mathrm{Ker}\Big(\prod_i \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \times_U U_j)\Big).$$

这样便得到加性左正合函子 $H^0(\mathfrak{A}, \bullet)$：

$$\mathscr{P} \longrightarrow \mathfrak{Ab} : \mathcal{F} \longmapsto H^0(\mathfrak{A}, \mathcal{F}).$$

若 U 为 $\mathrm{Cat}\,T$ 的对象. 范畴 $\mathscr{I}_U$ 的对象为 $\mathrm{Cov}\,T$ 内的元素 $\{U_i \to U\}$. $\mathscr{I}_U$ 的态射是指覆盖的加细映射 ([11] §3.2). 我们定义

$$\check{H}^0(U, \mathscr{F}) = \varinjlim_{\mathscr{U} \in \mathscr{I}_U} H^0(\mathscr{U}, \mathscr{F}).$$

可以证明如此得来的 $\mathscr{P} \to \mathfrak{Ab} : \mathscr{F} \longmapsto \check{H}^0(U, \mathscr{F})$ 是加性左正合函子. 于是它有右导函子 $R^q(\check{H}^0(U, \bullet))$. 我们称这个右导函子在预层 $\mathscr{F}$ 的取值 $R^q(\check{H}^0(U, \bullet))(\mathscr{F})$ 为 Čech 上同调群, 并记之为 $\check{H}^q(U, \mathscr{F})$.

如经典的上同调群一样, Čech 上同调群可以用 Čech 复形来计算. 给出 $\mathscr{F} \in \mathscr{P}$ 和 $\mathscr{U} = \{U_i \to U\}_{i \in I} \in \mathrm{Cov}\,T$. 由 $\mathscr{U}$ 得出**单纯复形** (simplicial complex) ($\hat{j} : U_{i_0} \times_U \cdots \times_U U_{i_{q+1}} \to U_{i_0} \times_U \cdots \times_U \hat{U}_{i_j} \cdots \times_U U_{i_{q+1}}$ 是指取消因子 U_{i_j}).

$$U \longleftarrow \{U_i\}_{i \in I} \underset{\hat{1}}{\overset{\hat{0}}{\leftleftarrows}} \{U_i \times_U U_j\}_{(i,j) \in I^2} \overset{\hat{0}}{\underset{\hat{2}}{\overset{\hat{1}}{\Lleftarrow}}} \{U_i \times_U U_j \times_U U_k\}_{(i,j,k) \in I^3} \Lleftarrow \cdots$$

用上 $\mathscr{F}$ 便得**上单纯复形** (cosimplicial complex).

$$\prod_i \mathscr{F}(U_i) \underset{\mathscr{F}(\hat{1})}{\overset{\mathscr{F}(\hat{0})}{\rightrightarrows}} \prod_{(i,j)} \mathscr{F}(U_i \times_U U_j) \overset{\mathscr{F}(\hat{0})}{\underset{\mathscr{F}(\hat{2})}{\overset{\mathscr{F}(\hat{1})}{\Rrightarrow}}} \prod_{(i,j,k)} (U_i \times_U U_j \times_U U_k) \Rrightarrow \cdots$$

我们引入符号

$$C^q(\mathscr{U}, \mathscr{F}) = \prod_{(i_0, \cdots, i_q) \in I^{q+1}} \mathscr{F}(U_{i_0} \times_U \cdots \times_U U_{i_q}).$$

定义上边缘算子 $\mathrm{d}^q : C^q(\mathscr{U}, \mathscr{F}) \to C^{q+1}(\mathscr{U}, \mathscr{F})$ 如下:

$$(\mathrm{d}^q s)_{i_0, \cdots, i_{q+1}} = \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j \mathscr{F}(\hat{j})(s_{i_0, \cdots, \hat{i}_j, \cdots, i_{q+1}}).$$

如常可算出: $\mathrm{d}^{q+1} \circ \mathrm{d}^q = 0$, $q \geqslant 0$. 从这个复形 $\{C^q(\mathscr{U}, \mathscr{F}), \mathrm{d}^q\}$ 计算得来的上同调群我们记为 $H^q(C^\bullet(\mathscr{U}, \mathscr{F}))$.

利用 δ 函子的理论我们可以证明

$$\check{H}^q(U, \mathscr{F}) = \varinjlim_{\mathscr{U} \in \mathscr{I}_U} H^q(C^\bullet(\mathscr{U}, \mathscr{F})).$$

(2) 已给 Grothendieck 拓扑 $\mathscr{T} = (\mathrm{Cat}\,T, \mathrm{Cov}\,T)$. 以 $\mathfrak{S}$ 记定义在 T 上的交换层所组成的范畴. 则 $\mathfrak{S}$ 为有足够内射对象的交换范畴. 因此, 如果 f 是从 $\mathfrak{S}$ 到 Abel 范畴的加性左正合函子, 则右导函子 $R^q f$ 存在.

现取 $U \in \operatorname{Cat} T$. 则函子

$$\Gamma_U : \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{Ab} : \mathcal{F} \longmapsto \mathcal{F}(U)$$

为加性左正合的. 于是有右导函子 $R^q\Gamma_U$. 我们称 $R^q\Gamma_U(\mathcal{F})$ 为第 q 个上同调群, 并记为 $H^q(U, \mathcal{F})$ (或为 $H^q(T; U, \mathcal{F})$ 或 $H^q_T(U, \mathcal{F})$).

利用 Čech 上同调的谱序列可得双射:

$$\check{H}^p(U, \mathcal{F}) \longrightarrow H^p(U, \mathcal{F})$$

对 $p = 0, 1$ 成立.

(3) 我们在本节讨论**高次直像** (higher direct image). 分以下两部分:

(i) 两个 Grothendieck 拓扑之间的态射 $\varphi : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ 是指一个函子 $\varphi : \operatorname{Cat} T \to \operatorname{Cat} T'$, 满足以下条件:

(a) 如果 $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\} \in \operatorname{Cov} T$, 则

$$\{\varphi(U_i) \xrightarrow{\varphi(\varphi_i)} \varphi(U)\} \in \operatorname{Cov} T'.$$

(b) 如果 $\{U_i \to U\} \in \operatorname{Cov} T$ 和 $V \to U$ 为 $\operatorname{Cat} T$ 的态射, 则对所有 i,

$$\varphi(U_i \times_U V) \longrightarrow \varphi(U_i) \times_{\varphi(U)} \varphi(V)$$

均为态射.

我们继续前面的记号 $\mathcal{P}, \mathfrak{S}$ 等. 以 $i : \mathfrak{S} \to \mathcal{P}$ 记包含函子. 若 $\mathcal{F}$ 为预层, 则以 $\mathcal{F}^{++}$ 记 $\mathcal{F}$ (对拓扑 $\mathcal{T}$) 的层化. 以 $++ : \mathcal{P} \to \mathfrak{S}$ 记层化函子. 设 $\mathcal{F}' \in \mathcal{P}'$, 定义 $f^p\mathcal{F}'$ 如下: 对 $U \in \operatorname{Obj}(\operatorname{Cat} T)$, 取 $\varphi^p\mathcal{F}'(U) = \mathcal{F}'(\varphi(U))$. 从 $\varphi : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ 我们得 $\varphi^p : \mathcal{P}' \to \mathcal{P}$. 这样我们便定义 $\varphi^s : \mathfrak{S}' \to \mathfrak{S}$ 为

$$\mathfrak{S}' \xrightarrow{i'} \mathcal{P}' \xrightarrow{\varphi^p} \mathcal{P} \xrightarrow{++} \mathfrak{S}.$$

可以证明 φ^s 为加性左正合.

利用 Leray 谱序列可以计算 φ^p 的左导函子 $R^q(\varphi^p) : \mathfrak{S}' \to \mathfrak{S}$ 如下: 对 $\mathcal{F}' \in \mathfrak{S}'$, $R^q(\varphi^p)(\mathcal{F}')$ 是预层 $U \longmapsto H^q(f(U), \mathcal{F}')$ 对应拓扑 $\mathcal{T}$ 的层化.

(ii) 作为以上的例子我们考虑 fppf 拓扑.

取概形 X. 我们定义小 fppf 位形 X_{fppf}. 我们取 $\operatorname{Cat}(X_{\mathrm{fppf}})$ 的对象为忠实平坦有限展示概形态射 $T \to X$. 取 $\operatorname{Cov}(X_{\mathrm{fppf}})$ 的元素为 $(\mathfrak{Sch}/X)_{\mathrm{fppf}}$ 的元素

$$\left\{ \begin{array}{ccc} U_i & \longrightarrow & U \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & X & \end{array} \right\}$$

但要求 $U_i \to X$, $U \to X$ 均属于 Cat (X_{fppf}).

现设有概形态射 $f: X' \to X$, 则函子 $T \to X$ 映去 $T \times_X X' \to X'$ 定义拓扑态射 $\varphi: X_{\text{fppf}} \to X'_{\text{fppf}}$. 在 X_{fppf} 上的交换层范畴记作 $\mathfrak{S}$. 则有加性左正合函子 $\varphi^s: \mathfrak{S}' \to \mathfrak{S}$. 我们以 f_* 记这个函子并称它为**直像函子** (direct image functor). 按前所引命题, 则 $R^q f_* \mathcal{F}'$ 是 X_{fppf} 上的预层 $T \mapsto H^q(T \times_X X', \mathcal{F})$ 的层化.

附录C　英汉术语对照表

abelian category	Abel 范畴 (397)
abelian scheme	Abel 概形 (190)
abelian variety	Abel 簇 (190)
absolute Frobenius	绝对 Frobenius (139)
act	作用 (149)
acyclic	零调的 (408)
adapted class	适应类 (408)
additive category	加性范畴 (393, 426)
additive functor	加性函子 (393)
adjoint representation	伴随表示 (10)
affine algebraic group	仿射代数群 (2)
affine group scheme	仿射群概形 (121)
algebraic torus	代数环面 (286)
almost simple algebraic group	殆单代数群 (82)
antipodal morphism	对映态射 (123)
arithmetic Frobenius	算术 Frobenius (139)
arithmetic subgroup	算术子群 (97)
augmentation ideal	增广理想 (121)
augmentation map	增广映射 (121)
augmentation morphism	增广态射 (123)
bad reduction	坏约化 (110)
Barsotti-Tate group	Barsotti-Tate 群 (192)
bi-extension	双扩张 (231, 249)
bi-torsor	双挠子 (245)
birigidification	双刚化 (249)
bounded below	有下界 (402)
BT group	BT 群 (200)
canonical model	规范模形 (102)
canonical topology	标准拓扑 (413)
Cartier dual	Cartier 对偶 (136)
Cartier dual group	Cartier 对偶群 (135)
categorical quotient	范畴商 (149)
central extension	中心扩张 (226)
character	特征标 (29, 136, 284)
character group scheme	特征标群概形 (136)

class module	类模 (277)
closed fibre	闭纤维 (183, 192)
closed subgroup scheme	闭子群概形 (122)
co-boundary condition	上边缘条件 (232)
co-cycle condition	上闭链条件 (232)
co-induced module	上诱导模 (256)
co-inverse	余逆元 (123)
co-unit	余单位 (123)
cocartesian square	余卡氏图 (156)
cochain complex	上链复形 (426)
cohomological functor	上同调函子 (398)
cohomologically trivial	上同调平凡的 (260)
cohomology class	上同调类 (232)
cohomology group	上同调群 (257)
coinverse	余逆映射 (121)
cokernel	余核 (149, 152, 397)
commensurable	可公度 (325)
commutative group object	交换群对象 (145)
compatible	相容 (401)
complete variety	完备簇 (190)
completely reducible	完全可约的 (20)
complex	复形 (402)
complex morphism	复形态射 (402)
complex multiplication	复乘 (104)
comultiplication	余乘法 (121)
conductor	前导子 (110)
cone	锥 (403)
connected	连通的 (3)
connected étale sequence	连通 étale 序列 (173)
constant group scheme	常值群概形 (124)
contravariant functor	反变函子 (414)
corestriction homomorphism	上限制同态 (261)
cosimplicial complex	上单纯复形 (437)
crystal	晶体 (201)
cubical structure	立方结构 (253)
cup product	上积 (274, 275)
cusp form	尖形式 (111)
cylinder	柱 (403)
deformation	形变 (183, 192)
degree	次数 (191, 402)
δ-functor	δ 函子 (406)
derivation	导子 (5, 6)

full subcategory	全子范畴 (396, 417)
fundamental class	基本类 (277)
fundamental group	基本群 (165)
generic fibre	一般纤维 (183, 192)
geometric Frobenius	几何 Frobenius (139)
geometric point	几何点 (163)
geometrically reductive group	几何简约代数群 (20)
global duality theorem	整体对偶定理 (319)
good reduction	好约化 (192)
Griffiths transversality	Griffiths 横截性 (101)
group extension	群扩张 (269)
group functor	群函子 (146)
group object	群对象 (119, 145)
group of ideles	idele 群 (304)
group scheme	群概形 (118)
groupoid	群胚 (152)
height	高度 (200)
henselian local ring	Hensel 局部环 (169)
higher direct image	高次直像 (438)
homology group	同调群 (257)
homomorphism	同态 (145)
Hopf algebra	Hopf 代数 (121)
idele class group	idele 类群 (322)
identity component	单位元分支 (3)
induced module	诱导模 (256)
inertia group	惯性群 (169, 302)
infinitesimal period relation	无穷小周期关系 (101)
inflation homomorphism	膨胀同态 (262)
injective object	内射对象 (409)
injective resolution	内射分解 (409)
inverse family	反向族 (418)
isocrystal	等晶体 (201)
isogenous	同源 (111)
isogeny	同源 (191, 293)
kernel	核 (148, 397)
L-group	L 群 (356)
left coset scheme	左陪集概形 (150)
left derived functor	左导出函子 (407)
left exact	左正合的 (406)
lift	提升 (183)
lifting	提升 (192)
linear algebraic group	线性代数群 (2)

linearization	线性化 (284)
linearly reductive group	线性简约代数群 (20)
local moduli	局部参模 (195)
local Tate duality theorem	局部 Tate 对偶定理 (318)
localising subcategory	局部化子范畴 (408)
localizing system	局部化系 (398)
locally finite free	局部有限自由的 (117)
locally finitely presented	局部有限展示的 (117)
locally of finite type	局部有限型 (117)
locally trivial	局部平凡 (326)
model	模型 (111, 183, 192)
modular function	模函数 (111)
modular variety	模簇 (111)
module crystal	模晶体 (203)
module scheme	模概形 (176)
monomorphism	单射 (397)
multiplicative group	乘性群 (126)
multiplicative system	乘性系 (398)
Néron model	Néron 模型 (193)
Newton polygon	Newton 多边形 (202)
normalized primitive form	标准原形 (113)
normalized valuation	正规化赋值 (300)
octahedron diagram	八面体图 (395)
open immersion	开浸入 (417)
orbit	轨道 (149)
order	阶 (117, 185)
ordinary	通常的 (195)
p-Barsotti-Tate group	p Barsotti-Tate 群 (200)
p-divisible group	p 可除群 (200)
p-group	p 群 (200)
p-torsion group	p 扭群 (200)
parabolic subgroup	抛物子群 (25)
period space	周期的模空间 (101)
periods of algebraic cycles	代数链的周期 (102)
place	位 (301)
Poincaré sheaf	Poincaré 层 (220)
Poitou-Tate duality	Poitou-Tate 对偶 (320)
Poitou-Tate sequence	Poitou-Tate 序列 (320)
polarizable	可以极化的 (101)
polarization	极化 (223)
potential good reduction	潜在好约化 (192)
prétopologie	(413)

prehomogeneous vector space	概齐次向量空间 (72)
presheaf	预层 (414)
prime divisor	素除子 (300)
prime element	素元 (301)
principal adele	主 adele (303)
principal crossed homomorphism	主交叉同态 (269)
principal homogeneous bundle	主齐性纤维丛 (236)
principal polarization	主极化 (223)
pro-p-subgroup	投射 p 子群 (169)
produit contracté	缩积 (246)
profinite group	投射有限群 (169)
prolongation	拓展 (184, 192)
proper morphism	固有态射 (190)
proper subcategory	真子范畴 (396)
quasi-compact	拟紧的 (117)
quasi-finite	拟有限的 (117)
quasi-isomorphism	拟同构 (404)
quasi-split group	拟裂群 (107)
quotient scheme	商概形 (149)
radical	根基 (20)
ramification index	分歧指数 (301)
rank	秩 (42, 117)
Raynaud module scheme	Raynaud 模概形 (176)
reciprocity law	互反律 (102)
reduction mod p	模 p 约化 (109)
reductive group	简约代数群 (20)
reflection	反射 (32)
regular	正则 (74)
relative Frobenius	相对 Frobenius (139)
relative Frobenius morphism	相对 Frobenius 态射 (141)
relative invariant	相对不变量 (72)
relative Picard functor	相对 Picard 函子 (210)
residue class degree	剩余类次数 (301)
restricting ground field	基域限制 (293)
restriction homomorphism	限制同态 (261)
right derived functor	右导出函子 (407)
right exact	右正合的 (406)
right invariant derivation	右不变导子 (132)
right translation	右平移 (122)
rigidification	刚化 (211, 249)
rigidity lemma	刚性引理 (188)
ring of adeles	adele 环 (303)

root	根 (31)
schematic closure	概形闭包 (184)
semi-stable reduction	半稳定约化 (192)
semidirect product	半直积 (19)
semilocal theory	半局部理论 (309)
semisimple group	半单代数群 (20)
separable	可分的 (287)
separated	已分的 (190)
Serre group	Serre 群 (367)
Shapiro's lemma	Shapiro 引理 (261)
sheaf	层 (414)
sheaf of sets	集层 (232, 245)
Shimura variety	志村簇 (101)
simple group	单群 (184)
simple root	单根 (33)
simplicial complex	单纯复形 (437)
site	位形 (413)
situs	(413)
slope sequence	斜率序列 (202)
special point	特殊点 (105)
split	分裂 (288)
split extension	分裂扩张 (226)
split factor set	分裂因子集 (269)
strict henselian local ring	严格 Hensel 局部环 (169)
strictly free action	严格自由作用 (149)
strong approximation theorem	强逼近定理 (101, 304)
surjective family	满族 (416)
t-category	t 范畴 (396)
T-valued point	T 值点 (119)
Tamagawa measure	Tamagawa 测度 (341)
Tamagawa number	玉河数 (100, 345)
tamely ramified group	弱分歧群 (169)
Taniyama group	Taniyama 群 (368)
Tate's theorem	Tate 定理 (312)
Teichmüller character	Teichmüller 特征标 (176)
terminal object	终对象 (144, 245)
theorem of the cube	立方定理 (218)
Θ-group	Θ 群 (225)
topology	拓扑 (413)
topos[1]	(232, 245, 249, 413)

①此对照表中无中文译名的词条目前尚无统一的译名.

torsor	挠子 (236)
torus	环面 (17, 192, 286)
transfer	转移 (265)
translation functor	平移函子 (394, 403)
triangle	三角形 (394)
triangulated category	剖分范畴 (394)
trivialization	平凡化 (249)
truncated exponential	截尾指数 (138)
truncated logarithm	截尾对数 (138)
truncation functor	截断函子 (396)
type	形号 (100)
uniformizing parameter	单值化参数 (301)
unipotent group	幂幺群 (128)
unipotent radical	幺根 (20)
universal δ-functor	泛 δ 函子 (428)
universal effective epimorphisms	泛有效满射 (413)
universally closed	泛闭的 (190)
unramified	非分歧 (193)
unramified character	不分歧特征标 (358)
unramified element	不分歧元 (356)
valuation	赋值 (299)
valuative criterion for properness	固有性赋值准则 (218)
valuative criterion for separateness	可分性赋值准则 (218)
Verlagerung	(265)
Verschiebung	(143)
weak approximation theorem	弱逼近定理 (300)
Weil group	Weil 群 355
Weyl chamber	Weyl 房 (33, 47)
wildly ramified group	强分歧群 (169)
zero object	零对象 (397)
1-coboudary	1 上边缘 (268)
1-cocycle	1 上闭链 (268)
2-coboudary	2 上边缘 (268)
2-cocycle	2 上闭链 (269)

索　引

其 他

《现代数学基础丛书》已出版书目

(按出版时间排序)

1 数理逻辑基础（上册） 1981.1 胡世华、陆钟万 著
2 紧黎曼曲面引论 1981.3 伍鸿熙、吕以辇、陈志华 著
3 组合论（上册） 1981.10 柯召、魏万迪 著
4 数理统计引论 1981.11 陈希孺 著
5 多元统计分析引论 1982.6 张尧庭、方开泰 著
6 概率论基础 1982.8 严士健、王隽骧、刘秀芳 著
7 数理逻辑基础（下册） 1982.8 胡世华、陆钟万 著
8 有限群构造（上册） 1982.11 张远达 著
9 有限群构造（下册） 1982.12 张远达 著
10 环与代数 1983.3 刘绍学 著
11 测度论基础 1983.9 朱成熹 著
12 分析概率论 1984.4 胡迪鹤 著
13 巴拿赫空间引论 1984.8 定光桂 著
14 微分方程定性理论 1985.5 张芷芬、丁同仁、黄文灶、董镇喜 著
15 傅里叶积分算子理论及其应用 1985.9 仇庆久等 编
16 辛几何引论 1986.3 J.柯歇尔、邹异明 著
17 概率论基础和随机过程 1986.6 王寿仁 著
18 算子代数 1986.6 李炳仁 著
19 线性偏微分算子引论（上册） 1986.8 齐民友 著
20 实用微分几何引论 1986.11 苏步青等 著
21 微分动力系统原理 1987.2 张筑生 著
22 线性代数群表示导论（上册） 1987.2 曹锡华等 著
23 模型论基础 1987.8 王世强 著
24 递归论 1987.11 莫绍揆 著
25 有限群导引(上册) 1987.12 徐明曜 著
26 组合论（下册） 1987.12 柯召、魏万迪 著
27 拟共形映射及其在黎曼曲面论中的应用 1988.1 李忠 著
28 代数体函数与常微分方程 1988.2 何育赞 著

29 同调代数 1988.2 周伯壎 著
30 近代调和分析方法及其应用 1988.6 韩永生 著
31 带有时滞的动力系统的稳定性 1989.10 秦元勋等 编著
32 代数拓扑与示性类 1989.11 马德森著 吴英青、段海鲍译
33 非线性发展方程 1989.12 李大潜、陈韵梅 著
34 反应扩散方程引论 1990.2 叶其孝等 著
35 仿微分算子引论 1990.2 陈恕行等 编
36 公理集合论导引 1991.1 张锦文 著
37 解析数论基础 1991.2 潘承洞等 著
38 拓扑群引论 1991.3 黎景辉、冯绪宁 著
39 二阶椭圆型方程与椭圆型方程组 1991.4 陈亚浙、吴兰成 著
40 黎曼曲面 1991.4 吕以辇、张学莲 著
41 线性偏微分算子引论（下册） 1992.1 齐民友 著
42 复变函数逼近论 1992.3 沈燮昌 著
43 Banach 代数 1992.11 李炳仁 著
44 随机点过程及其应用 1992.12 邓永录等 著
45 丢番图逼近引论 1993.4 朱尧辰等 著
46 线性微分方程的非线性扰动 1994.2 徐登洲、马如云 著
47 广义哈密顿系统理论及其应用 1994.12 李继彬、赵晓华、刘正荣 著
48 线性整数规划的数学基础 1995.2 马仲蕃 著
49 单复变函数论中的几个论题 1995.8 庄圻泰 著
50 复解析动力系统 1995.10 吕以辇 著
51 组合矩阵论 1996.3 柳柏濂 著
52 Banach 空间中的非线性逼近理论 1997.5 徐士英、李冲、杨文善 著
53 有限典型群子空间轨道生成的格 1997.6 万哲先、霍元极 著
54 实分析导论 1998.2 丁传松等 著
55 对称性分岔理论基础 1998.3 唐云 著
56 Gel'fond-Baker 方法在丢番图方程中的应用 1998.10 乐茂华 著
57 半群的 S-系理论 1999.2 刘仲奎 著
58 有限群导引(下册) 1999.5 徐明曜等 著
59 随机模型的密度演化方法 1999.6 史定华 著
60 非线性偏微分复方程 1999.6 闻国椿 著
61 复合算子理论 1999.8 徐宪民 著
62 离散鞅及其应用 1999.9 史及民 编著

63 调和分析及其在偏微分方程中的应用 1999.10 苗长兴 著
64 惯性流形与近似惯性流形 2000.1 戴正德、郭柏灵 著
65 数学规划导论 2000.6 徐增堃 著
66 拓扑空间中的反例 2000.6 汪林、杨富春 编著
67 拓扑空间论 2000.7 高国士 著
68 非经典数理逻辑与近似推理 2000.9 王国俊 著
69 序半群引论 2001.1 谢祥云 著
70 动力系统的定性与分支理论 2001.2 罗定军、张祥、董梅芳 编著
71 随机分析学基础（第二版） 2001.3 黄志远 著
72 非线性动力系统分析引论 2001.9 盛昭瀚、马军海 著
73 高斯过程的样本轨道性质 2001.11 林正炎、陆传荣、张立新 著
74 数组合地图论 2001.11 刘彦佩 著
75 光滑映射的奇点理论 2002.1 李养成 著
76 动力系统的周期解与分支理论 2002.4 韩茂安 著
77 神经动力学模型方法和应用 2002.4 阮炯、顾凡及、蔡志杰 编著
78 同调论——代数拓扑之一 2002.7 沈信耀 著
79 金兹堡-朗道方程 2002.8 郭柏灵等 著
80 排队论基础 2002.10 孙荣恒、李建平 著
81 算子代数上线性映射引论 2002.12 侯晋川、崔建莲 著
82 微分方法中的变分方法 2003.2 陆文端 著
83 周期小波及其应用 2003.3 彭思龙、李登峰、谌秋辉 著
84 集值分析 2003.8 李雷、吴从炘 著
85 数理逻辑引论与归结原理 2003.8 王国俊 著
86 强偏差定理与分析方法 2003.8 刘文 著
87 椭圆与抛物型方程引论 2003.9 伍卓群、尹景学、王春朋 著
88 有限典型群子空间轨道生成的格（第二版） 2003.10 万哲先、霍元极 著
89 调和分析及其在偏微分方程中的应用（第二版） 2004.3 苗长兴 著
90 稳定性和单纯性理论 2004.6 史念东 著
91 发展方程数值计算方法 2004.6 黄明游 编著
92 传染病动力学的数学建模与研究 2004.8 马知恩、周义仓、王稳地、靳 祯 著
93 模李超代数 2004.9 张永正、刘文德 著
94 巴拿赫空间中算子广义逆理论及其应用 2005.1 王玉文 著
95 巴拿赫空间结构和算子理想 2005.3 钟怀杰 著
96 脉冲微分系统引论 2005.3 傅希林、闫宝强、刘衍胜 著

97 代数学中的Frobenius结构 2005.7 汪明义 著
98 生存数据统计分析 2005.12 王启华 著
99 数理逻辑引论与归结原理(第二版) 2006.3 王国俊 著
100 数据包络分析 2006.3 魏权龄 著
101 代数群引论 2006.9 黎景辉 陈志杰 赵春来 著
102 矩阵结合方案 2006.9 王仰贤 霍元极 麻常利 著